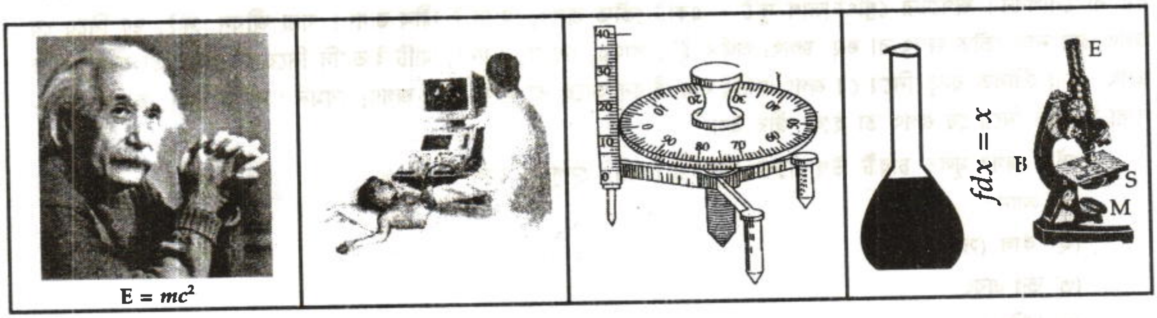
প্রধান শব্দ (Key Words) : ভৌত জগৎ, জীব জগৎ, পরিমাপ, রাশি, একক, এককের প্রকারভেদ, মৌলিক একক, লব্ধ বা যৌগিক একক, ব্যবহারিক একক, মাত্রা, নিয়মিত ত্রুটি, অনিয়মিত ত্রুটি।

১ ভৌত জগৎ ও পরিমাপ

PHYSICAL WORLD AND MEASUREMENT



RMDAC

সূচনা
Introduction

দৈনন্দিন জীবনে বিজ্ঞান আমাদের নিত্য সঙ্গী। সকালে ঘুম থেকে উঠে রাতে ঘুমানো পর্যন্ত সকল কর্মকাণ্ডের সাথে মিশে আছে বিজ্ঞান। বিজ্ঞান মানব জীবনকে করেছে সুন্দর ও সমৃদ্ধ, বাড়িয়ে দিয়েছে আরাম-আয়েশ এবং সুখ স্বাচ্ছন্দ্য। কিন্তু বিজ্ঞানের এই সমৃদ্ধি একদিনে সম্ভব হয়নি। প্রাচীনকাল থেকে অদ্যাবধি বিজ্ঞানীদের চিন্তা-চেতনা, তথ্য উদ্ভাবন এবং প্রয়োগ বিজ্ঞানকে সমৃদ্ধ করেছে। মানব সম্পদ, চিকিৎসাবিজ্ঞান, কৃষিবিজ্ঞান, সাহিত্য-সংস্কৃতি, সমাজবিজ্ঞান, জ্যোতির্বিজ্ঞান, রসায়নশাস্ত্র, গণিতশাস্ত্র এবং জীববিজ্ঞান এমনকি জীবন দর্শনের ক্ষেত্রেও অবদান রেখেছে বিজ্ঞান। দৈনন্দিন জীবনের প্রতিটি কাজের সাথে পরিমাপ বিষয়টি জড়িত। পদার্থবিজ্ঞানের প্রায় সকল পরীক্ষণেই বিভিন্ন রাশির পরিমাপ করতে হয়। ভৌত জগতের প্রকৃতি, বর্তমান সভ্যতায় পদার্থবিজ্ঞানের অবদান এবং পরিসর, বিস্ময়কর আবিষ্কার, বিভিন্ন জ্ঞান-বিজ্ঞানের সাথে পদার্থবিজ্ঞানের সম্পর্ক, পরিমাপের নির্ভুলতা দূর করে সঠিকতা যাচাই, বিভিন্ন মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক ও বিজ্ঞানীদের অবদানসহ নানা বিষয়ে বিজ্ঞানের প্রয়োগই হলো এ অধ্যায়ের মূল বিষয়।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- ভৌত জগতের প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের পরিসর এবং বিভিন্ন ক্ষেত্রে এর বিস্ময়কর অবদান ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের ব্যবহৃত বিভিন্ন ধারণা, সূত্র, নীতি, স্বীকার্য, অনুকল্প এবং তত্ত্বের অর্থ উপলব্ধি ও ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের সাথে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার সম্পর্ক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- স্থান, সময়, ভর এবং অন্যান্য প্রতিভাসের (manifestation) কার্যকারণ সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- মৌলিক ও লব্ধ এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে পারবে।
- পরিমাপের মূলনীতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষণের ক্রমবিকাশ ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পরিমাপের ত্রুটি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পরিমাপযোগ্য রাশির শুদ্ধতর মান নির্ধারণের কৌশল প্রয়োগ করতে পারবে।
- ব্যবহারিক :
  ১. স্ফেরোমিটারের সাহায্যে গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয়।
  ২. নিক্তির সাহায্যে দোলন পদ্ধতিতে বস্তুর ভর নির্ণয়।

১.১ ভৌত জগতের প্রকৃতি
Nature of physical world

আমরা যেখানে আছি, যে কারণে আছি, যা পঞ্চইন্দ্রিয় দ্বারা অনুভব করছি বা আমাদের অনুভূতি বহির্ভূত যা কিছু অস্তিত্বশীল (ভর ও শক্তি) রয়েছে তাই জগৎ। জগতের এই ধারণা আমাদের ভৌত জগৎকে বুঝতে সাহায্য করবে। যে কোনো বিষয় সম্পর্কে ধারণা স্পষ্ট হবার অর্থ তার অস্তিত্ব, আর অস্তিত্বের কারণ সম্পর্কে ধারণা দেয় সেই জিনিসের ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য। জগতের শ্রেণিবিভাগ দুটি—একটি **ভৌত জগৎ**, অপরটি **জীব জগৎ**। যার জীবন নেই, তা নিয়ে যে জগৎ তার নাম ভৌত জগৎ বা জড় জগৎ; অর্থাৎ ইট, পাথর, লোহা, সোনা, মাটি ইত্যাদি নিয়ে যে জগৎ তা হলো ভৌত জগৎ। আর জীবিত বস্তু নিয়ে যে জগৎ অর্থাৎ যার জীবন আছে তা হলো জীব জগৎ; যেমন : মানুষ, গরু, ছাগল, গাছ-পালা ইত্যাদি নিয়ে যে জগৎ তা হলো জীব জগৎ।

ভৌত জগৎ মূলত **চারটি** উপাদানের সমন্বয়ে তৈরি। সেগুলো হলো :
(১) স্থান
(২) কাল (সময়)
(৩) ভর এবং
(৪) শক্তি।

প্রথম দুটি তাত্ত্বিক হওয়ায় ভৌত জগৎকে ভর ও শক্তির উপস্থিতি দ্বারাই বুঝান হয় (আইনস্টাইনের বিখ্যাত সূত্র $E = mc^2$)। এক্ষেত্রে ভর ও শক্তি একই সূত্রে গাঁথা। ভৌত জগৎকে তিনটি উপাদানের সমন্বয় বলে প্রচার করা হয় অর্থাৎ ভর ও শক্তিকে আলাদা দুটি উপাদানে না রেখে একত্রে শক্তি লেখা হয়। ভৌত জগৎ বিশাল ও বৈচিত্র্যপূর্ণ। বিষয়টি নিয়ে গবেষণা করতে গিয়েই মানুষ তা উপলব্ধি করেছে। তাইতো বৈজ্ঞানিক সূত্রগুলোকে চিরন্তন সত্য বলা যায় না। কারণ বর্তমান বৈজ্ঞানিক সূত্র কোনো ভৌত বিষয়কে ব্যাখ্যা করতে না পারলে নতুন সূত্র দাঁড় করাতে হয়। উদাহরণস্বরূপ গ্যালিলিও রূপান্তরকে পরিবর্তন করে লরেঞ্জ রূপান্তরে পরিণত করতে হয়েছে। ভৌত জগতের বৈচিত্র্য উপলব্ধি করার দুটি চমৎকার উপায় রয়েছে। এক, ভৌত জগৎকে ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতরভাবে দেখা; দুই, ভৌত জগৎকে বৃহৎ হতে বৃহত্তরভাবে দেখা।

ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতরভাবে দেখার অর্থ হলো— কোনো বস্তুকে ভেঙ্গে পাওয়া যায় অণু, অণুকে ভেঙ্গে পাওয়া যায় পরমাণু। আবার পরমাণুকে ভেঙ্গে পাওয়া যায় স্থায়ী ও অস্থায়ী কণিকা, কণিকাকে ভেঙ্গে কোয়ার্ক, কোয়ার্ককে ভেঙ্গে শক্তিগুচ্ছ আরও কত কী ! শুধু তাই নয়, এর প্রত্যেকটি অংশের আবার বহু শ্রেণি রয়েছে।

বৃহৎ হতে বৃহত্তরভাবে দেখার অর্থ হলো— উপগ্রহ, গ্রহ, সৌর জগতের মতো জগৎ, ছায়াপথ, আরও বৃহত্তর কত কী! ভৌত জগতে আরও রয়েছে ব্ল্যাকহোল যা হতে আলোক পর্যন্ত বের হয়ে আসতে পারে না। অনুমান করা হয় এক বৃহৎ ব্ল্যাকহোলকে কেন্দ্র করে বৃহৎ ছায়াপথগুলো ঘুরছে। **ভৌত জগতের নানা বিষয়ের বিশেষ জ্ঞানের আলোচনাই ভৌত বিজ্ঞান।**

আজ আমরা যে আধুনিক জীবন যাপন করছি তা ভৌত বিজ্ঞানেরই অবদান। জীববিজ্ঞানের অগ্রগতিরও দাবিদার ভৌত বিজ্ঞান। ভৌত বিজ্ঞানের অনেক শাখার মধ্যে পদার্থবিজ্ঞান, রসায়ন শাস্ত্র, গণিত শাস্ত্র, জ্যোতির্বিদ্যা, ভূবিদ্যা প্রভৃতি অন্যতম। এসব বিজ্ঞানের মাধ্যমে মানুষ ভৌত জগৎকে বোঝার চেষ্টা চালিয়ে যাচ্ছে। তবে মজার বিষয় হচ্ছে সমগ্র ভৌত জগতের সকল পদার্থের মধ্যে মানুষ জানতে পেরেছে খুব সামান্যই। অনুমান করা হয় মানুষ জানতে পেরেছে মাত্র 4%। উপরন্তু কপারনিকাস, গ্যালিলিও, রবার্ট বয়েল, স্যার আইজ্যাক নিউটন, ফ্র্যাংকলিন, জেমস্ ওয়াট, গ্যালভানি, ভোল্টা, ফ্যারাডে, অ্যাম্পিয়ার, ও'ম, মার্কনি, আচার্য জগদীশ চন্দ্র বসু, ওয়েরস্টেড, রনজেন, ডি-ব্রগলি, হাইজেনবার্গ, রাদারফোর্ড, হেনরি বেকেরেল, কুরি, মাদাম কুরি, মিলিক্যান, চ্যাডউইক, গ্লাশো, ওয়েইনবার্গ, আব্দুস সালাম প্রমুখ যশস্বী বিজ্ঞানীদের অবদান ভৌত বিজ্ঞানের অমূল্য সম্পদ। সংক্ষেপে বলা যায়, **বিশ্ব ব্রহ্মাণ্ডের জীব সম্পদ ছাড়া সবকিছুই ভৌত বিজ্ঞানের দুর্ভেদ্য ভিত।**

আমাদের উচিত ভৌত জগৎ নিয়ে গবেষণা করে আমাদের কৌতূহল মিটানো, ভৌত জগৎকে মানব কল্যাণে ব্যবহার করা এবং ভৌত জগতের সাথে সাথে জীব জগতের অস্তিত্বের কারণ সম্পর্কে জেনে সে অনুসারে জীবন পরিচালনা করা।

১·২ পদার্থবিজ্ঞানের পরিসর ও বিস্ময়কর অবদান
Scope of physics and its wonderful contributions

১·২·১ পদার্থবিজ্ঞানের পরিসর
Scope of physics

পদার্থবিজ্ঞান হলো বিজ্ঞানের চাবিকাঠি। অন্যান্য বিজ্ঞানের মৌলিক শাখা হলো পদার্থবিজ্ঞান। কারণ এর নীতিগুলোই বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখাসমূহের ভিত্তি রচনা করেছে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, অণু-পরমাণু গঠন থেকে শুরু করে ঝড়-বৃষ্টির পূর্বাভাস পর্যন্ত পদার্থবিজ্ঞান বিস্তৃত। পঠন পাঠনের সুবিধার জন্য এবং বিশদভাবে আলোচনার জন্য পদার্থবিজ্ঞানকে বিভিন্ন ভাগে ভাগ করা হয়েছে, যথা—

(১) সাধারণ পদার্থবিজ্ঞান (General Physics)
(২) তাপবিজ্ঞান (Heat)
(৩) শব্দবিজ্ঞান (Sound)
(৪) আলোকবিজ্ঞান (Light)
(৫) চুম্বকবিজ্ঞান (Magnetism)
(৬) তড়িৎ বা বিদ্যুৎবিজ্ঞান (Electricity)
(৭) ইলেকট্রনিক্স (Electronics)
(৮) পারমাণবিক বিজ্ঞান (Atomic Physics) ইত্যাদি।

[MAT: 19-20]

সাধারণ পদার্থবিজ্ঞানকে আবার দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে, যথা—

(১) বলবিদ্যা (Mechanics)
(২) পদার্থের ধর্ম (Properties of matter)

বলবিদ্যা বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়া সংক্রান্ত বিভিন্ন বিষয় আলোচনা করে। পদার্থের ধর্ম বস্তুর বিভিন্ন গুণ আলোচনা করে।

বলবিদ্যা আবার দুই ভাগে বিভক্ত, যথা—

(১) স্থিতিবিদ্যা (Statics) এবং
(২) গতিবিদ্যা (Dynamics)

স্থিতিবিদ্যা স্থিতিশীল বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়া আলোচনা করে এবং গতিবিদ্যা গতিশীল বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়া আলোচনা করে।

পদার্থের কতগুলো গুণ বা বৈশিষ্ট্য রয়েছে। এগুলোকে মিলিতভাবে পদার্থের ধর্ম (Properties of matter) বলে। পদার্থের ধর্ম দুই প্রকার; যথা—

(১) সাধারণ ধর্ম (General property) এবং
(২) বিশেষ ধর্ম (Special property)

যে ধর্ম সকল পদার্থেরই কম-বেশি রয়েছে তাকে পদার্থের সাধারণ ধর্ম বলে; যেমন ওজন, বিস্তৃতি, রোধ, স্থিতিস্থাপকতা ইত্যাদি। আর যে ধর্ম সকল পদার্থের নেই তাকে পদার্থের বিশেষ ধর্ম বলে, যেমন স্থিতিস্থাপকতা (elasticity), দৃঢ়তা (rigidity), ভঙ্গুরতা (fragility) ইত্যাদি ধর্ম কেবল কঠিন পদার্থের বেলায় দেখা যায়। এসব ধর্ম কঠিন পদার্থের বিশেষ ধর্ম। সান্দ্রতা (viscosity) তরল ও বায়বীয় পদার্থের বিশেষ ধর্ম। পৃষ্ঠটান বা তলটান (surface tension) তরল পদার্থের বিশেষ ধর্ম।

পদার্থবিজ্ঞানের পরিসর বা আওতা সুবিস্তীর্ণ। মানব সভ্যতার অগ্রগতির মূলে ইহা ভিত্তিপ্রস্তর স্বরূপ। মানব জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে ইহা বিশেষভাবে প্রয়োজনীয়। পদার্থবিজ্ঞানের সাহায্য ছাড়া এই মহাবিশ্ব সম্বন্ধে কোনো কিছু জানা আমাদের পক্ষে সম্পূর্ণ অসম্ভব। অসীম আকাশ হতে শুরু করে প্রত্যেক পরমাণুর অভ্যন্তর পর্যন্ত এর পরিধি বিস্তৃত। যেখানেই বস্তু ও শক্তি রয়েছে সেখানেই পদার্থবিজ্ঞানের কিছু না কিছু করণীয় রয়েছে। সুতরাং সাধারণ শিক্ষার বাহক হিসেবে পদার্থবিজ্ঞানের সেবায় ব্রত হওয়া প্রত্যেক নাগরিকের কর্তব্য। পদার্থবিজ্ঞানের ব্যাপকতা এবং এর ব্যবহার মানবকল্যাণে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে চলেছে।

১·২·২ বিভিন্ন ক্ষেত্রে পদার্থবিজ্ঞানের বিস্ময়কর অবদান
Wonderful contributions of physics in different fields

মানব কল্যাণে পদার্থবিজ্ঞানের অবদান অপরিসীম। বিভিন্ন শক্তি হতে দৈনন্দিন জীবনে আমরা প্রভূত আরাম-আয়েশ পেয়ে থাকি। একমাত্র বিদ্যুৎ শক্তি এত প্রকার কার্যে ব্যবহৃত হয়েছে যে, আধুনিক যুগকে বৈদ্যুতিক যুগ বললেও অত্যুক্তি হয় না। বৈদ্যুতিক পাখা, বৈদ্যুতিক বাতি, বৈদ্যুতিক চুল্লি, টেলিগ্রাফ, টেলিফোন, টেলিভিশন, কম্পিউটার, রেডিও, মোটর, বিদ্যুচ্চালিত ট্রেন, বিদ্যুচ্চালিত কল-কারখানা সবই বিদ্যুতের অবদান। বাষ্পীয় ইঞ্জিন, পেট্রোল ইঞ্জিন

এবং তৈল ইঞ্জিন হতে আমরা যে তাপ শক্তি পাই তা বিভিন্ন কার্যে প্রয়োগ করি। বায়ুর চাপ মাপার জন্য ব্যারোমিটার, উষ্ণতা বা তাপমাত্রা মাপার জন্য থার্মোমিটার, বায়ুতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ মাপার জন্য আমরা হাইগ্রোমিটার নামক যন্ত্র ব্যবহার করি। আলোকবিজ্ঞানে আমরা চশমা, অণুবীক্ষণ যন্ত্র, দূরবীক্ষণ যন্ত্র, ক্যামেরা প্রভৃতি ব্যবহার করে থাকি। বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র; যেমন: হারমোনিয়াম, বাঁশি, ঢাক, ঘণ্টা, পিয়ানো, গ্রামোফোন, বেহালা, এসরাজ, সেতার প্রভৃতি যন্ত্র দ্বারা আমরা বিশেষভাবে উপকৃত হই। বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে হাইড্রলিক প্রেস, বিভিন্ন পাম্প, তুলাযন্ত্র, ঘড়ি, দোলক, লিভার, ক্রেন, পুলি প্রভৃতি যন্ত্রের বহুল ব্যবহার রয়েছে। রিয়্যাক্টর (reactor) নামক যন্ত্রের সাহায্যে পরমাণুর নিউক্লিয়াসকে ভেঙ্গে যে প্রচুর শক্তি পাওয়া যায় সেই শক্তিকে বিদ্যুৎ উৎপাদনে, বিভিন্ন শিল্পে এবং চিকিৎসাবিজ্ঞানে প্রয়োগ করা হয়। এ ছাড়াও বিশ্লিষ্ট এই যন্ত্র পারমাণবিক বোমা প্রস্তুতে ব্যবহৃত হয়। মানুষ আজ রকেট চালিত মহাকাশযানে চড়ে চন্দ্রে এবং গ্রহান্তরে পাড়ি দিচ্ছে। এসবই **বিজ্ঞানের বিস্ময়কর অবদান।**

বিজ্ঞানের উন্নতির জন্যই মানুষ পেয়েছে গুহার পরিবর্তে আধুনিক বাড়ি-ঘর, পার্থিব আরাম-আয়েশ ও জীবনের নিরাপত্তা। বিজ্ঞানের অগ্রগতির ফলে মানুষ দূরকে করেছে নিকট, প্রকৃতিকে করেছে বশীভূত এবং অসম্ভবকে করেছে সম্ভব। সুখ-স্বাচ্ছন্দ্য, আরাম-আয়েশ এবং নিরাপত্তার জন্য মানবজাতি বিজ্ঞানের কাছে ঋণী। বিজ্ঞানের কল্যাণে 10^{-30} মিটার আকৃতির মৌলিক কণাসহ 10^{30} মিটার দূরত্বের আকাশ পর্যবেক্ষণ করা সম্ভব হয়েছে। অতএব আমাদের প্রত্যেক নাগরিকের বিজ্ঞান সাধনাকে সাধারণ শিক্ষার প্রধান বাহন হিসেবে গ্রহণ করা উচিত।

১.৩ পদার্থবিজ্ঞানে ধারণা, সূত্র, নীতি, স্বীকার্য, অনুকল্প এবং তত্ত্ব-এর অর্থ
Meaning of concept, law, principle, postulates, hypothesis and theory in physics

বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব প্রতিষ্ঠার জন্য অনেক চিন্তা-ভাবনা ও পরীক্ষা-নিরীক্ষার প্রয়োজন। বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব কীভাবে প্রতিষ্ঠা লাভ করে তা বুঝাবার জন্য একটি মনোজ্ঞ উদাহরণ দেওয়া হলো। মনে করি, একটি ছেলে বাড়ি হতে হারিয়ে গিয়েছে। গৃহস্বামী এই সংবাদ পেয়ে সঙ্গে সঙ্গেই অস্থির হয়ে উঠবেন এবং জল্পনা-কল্পনা করতে শুরু করবেন। প্রথমেই তিনি মনে করবেন যে ছেলেটি কোনো প্রতিবেশীর বাড়িতে গিয়েছে। এটা তদন্ত করবার জন্য তিনি প্রতিবেশীর বাড়িতে যাবেন। কিন্তু ছেলেটিকে যদি প্রতিবেশীর বাড়িতে পাওয়া না যায় তবে তিনি ধরে নিবেন যে তাঁর অনুমান মিথ্যা এবং তিনি এই অনুমান পরিত্যাগ করবেন। মনে করি, ঠিক ওই সময়ে জনৈক ভদ্রলোক গৃহস্বামীকে জানালেন যে, ছেলেটিকে 'X' নামক রাস্তায় দেখা গিয়েছে। তখন গৃহস্বামী ধরে নিবেন যে, তাঁর ছেলে হারিয়ে যায়নি বরং ছেলেটি 'X' নামক রাস্তায় গিয়েছে। তখন তিনি ছেলেটির সন্ধানে 'X' নামক রাস্তায় যাবেন। যাবার পর তিনি দেখলেন যে 'X' নামক রাস্তাটি দুটি রাস্তায় বিভক্ত। মনে করি, একটি 'Y' এবং অপরটি 'Z'। এখন তাঁর নিকট দুটি সম্ভাবনা দেখা দিবে। ছেলেটি দুটি রাস্তার যেকোনো একটি রাস্তায় যেতে পারে। ছেলেটি কোন রাস্তায় গিয়েছে এর সত্যতা নিরূপণের জন্য ঐ জায়গায় তদন্তের প্রয়োজন। তদন্তের পর দেখা গেল যে, ছেলেটি 'Z' নামক রাস্তায় গিয়েছে। এখন গৃহস্বামীর ধারণা ছেলেটি হারিয়ে যায়নি। সে 'X' নামক রাস্তা হয়ে 'Z' নামক রাস্তায় গিয়েছে। ছেলেটিকে পাবার জন্য তিনি 'Z' নামক রাস্তায় যাবেন। মনে করি, 'Z' নামক রাস্তাটি আবার তিনটি রাস্তায় বিভক্ত। সেগুলো হলো 'P', 'Q' এবং 'R'। ছেলেটি কোন রাস্তায় গিয়েছে তা জানার জন্য আরও তদন্তের প্রয়োজন। এভাবে ছেলেটি সম্পর্কে আমরা ক্রমাগত জানতে পারি এবং আমাদের তত্ত্ব প্রতিষ্ঠা লাভ করতে থাকবে। অনুরূপভাবে বলা যেতে পারে যে বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব প্রতিষ্ঠার জন্য শতাব্দীর পর শতাব্দী ধরে জল্পনা-কল্পনা, চিন্তা-ভাবনা ও পরীক্ষা-নিরীক্ষা চলে আসছে এবং চালিয়ে যেতে হবে।

ধারণা বা প্রত্যয়
Concept

কোনো কিছু সম্পর্কে সঠিক উপলব্ধি বা বোধগম্যতা হলো ওই বিষয় সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা। অথবা, ধারণা হলো কোনো ভাবনা বা চিন্তাধারা বা কোনো সাধারণ অভিমত। যেমন তাপের ধারণা হলো— তাপ এক প্রকার শক্তি যা কোনো বস্তুতে প্রয়োগ করলে বা বস্তুটিকে গরম করলে বস্তুটির তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায় এবং বর্জন করলে তাপমাত্রা হ্রাস পায়।

সূত্র
Law

যখন কোনো তত্ত্ব অনেক পরীক্ষা-নিরীক্ষার সাহায্যে প্রমাণিত হয় এবং এর মূল কথাগুলো একটি উক্তির মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তখন তাকে বৈজ্ঞানিক সূত্র বলা হয়। সূত্র অনেক সময় আবিষ্কর্তার নামানুসারে হয়; যেমন: ও'মের সূত্র, বয়েলের সূত্র; কখনো বিষয়ের নামে, যেমন: শক্তির নিত্যতা সূত্র, তাপগতিবিদ্যার সূত্র; আবার কখনো আবিষ্কারক এবং বিষয় উভয়ের নামে হয়ে থাকে, যেমন: নিউটনের গতিসূত্র, গ্যালিলিওর পড়ন্ত বস্তুর সূত্র।

RMDAC

নীতি
Principle

যেসব প্রাকৃতিক সত্য সরাসরি স্পষ্টভাবে প্রমাণ করা যায় এবং ওই সত্যের সাহায্যে অনেক প্রাকৃতিক ঘটনাকে প্রমাণ করা যায়, তাকে নীতি বলে। যেমন: ডপলারের নীতি, হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি ইত্যাদি।

স্বীকার্য
Postulates

[DAT: 19-20]

কোনো গাণিতিক মডেল বা সূত্র প্রতিষ্ঠা করার লক্ষ্যে যদি কিছু পূর্বশর্ত স্বীকার করে নেওয়া হয়, তবে ওই পূর্বশর্তসমূহকে স্বীকার্য (Postulates) বলে। সাধারণত কোনো বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব একটি সার্বিক বিবৃতি দিয়ে শুরু হয়, ইহাই স্বীকার্য। যেমন: বিখ্যাত বিজ্ঞানী নীলস বোর (Neils Bohr) পরমাণু মডেল প্রদানের জন্য দুটি স্বীকার্য গ্রহণ করেন। আবার, বিজ্ঞানী আইনস্টাইন আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব প্রবর্তন করেন যা দুটি মৌলিক স্বীকার্যের উপর প্রতিষ্ঠিত।

অনুকল্প
Hypothesis

বিজ্ঞানীরা তাঁদের পর্যবেক্ষিত ঘটনার কারণ সম্বন্ধে ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য অনেক সময় পূর্বে আবিষ্কৃত প্রাকৃতিক নিয়মের সাথে সামঞ্জস্য রেখে কিছু অনুমান করেন। এই অনুমানগুলোকে বলা হয় অনুকল্প। অনুকল্পগুলো পর্যবেক্ষিত ঘটনার প্রাথমিক ব্যাখ্যা প্রদান করে। অনুকল্পগুলোর সত্যতা যাচাইয়ের জন্য পরীক্ষা সম্পাদন করা হয় এবং পরীক্ষায় সত্য প্রমাণিত হলে তা তত্ত্বে পরিণত হয়। পরীক্ষণ বা পর্যবেক্ষণ দ্বারা অনুকল্প সমর্থিত হতেও পারে, আবার বাতিলও হতে পারে। তবে কিছু কিছু অনুকল্প আছে যা প্রমাণিত হওয়ার পরেও অনুকল্প হিসেবে এখনো পরিচিত। যেমন অ্যাভোগেড্রোর অনুকল্প (Avogadro's hypothesis)।

তত্ত্ব
Theory

অনুকল্প ও নিয়মের সমন্বয়ে তত্ত্ব প্রতিষ্ঠিত। পরীক্ষা-নিরীক্ষার দ্বারা প্রমাণিত অনুকল্পকে তত্ত্ব বলে। বৈজ্ঞানিক তত্ত্বের সাহায্যে প্রকৃতিকে সবচেয়ে বিশ্বাসযোগ্যভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। যখন কোনো তত্ত্বকে কিছু ধারণা বা উক্তি এবং সমীকরণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়, তখন সেই তত্ত্বকে সূত্র বলে। সুতরাং **সকল সূত্রই তত্ত্ব, তবে সকল তত্ত্ব সূত্র নয়।** আবার **সকল তত্ত্বই অনুকল্প, তবে সকল অনুকল্প তত্ত্ব নয়।** তত্ত্ব সাধারণত আবিষ্কর্তার নামানুসারে অথবা বিষয়ের সাথে সংগতি রেখে নামকরণ করা হয়। যেমন: আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্ব, কোয়ান্টাম তত্ত্ব ইত্যাদি।

১.৪ পদার্থবিজ্ঞান ও অন্যান্য বিজ্ঞান ও জ্ঞানের জগৎ
Physics and world of other sciences and knowledge

পদার্থবিজ্ঞানের সাথে বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার সম্পর্ক : পদার্থবিজ্ঞান হচ্ছে বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার ভিত্তি। বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখার উন্নয়নে পদার্থবিজ্ঞান গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে আসছে। পদার্থবিজ্ঞানের সূত্রাবলি বিজ্ঞানের নতুন শাখার উদ্ভব ঘটিয়েছে যাকে আমরা জীবপদার্থবিদ্যা (biophysics) বলতে পারি। Mechanical, nuclear, gravimetric এবং acoustics পদ্ধতি বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় বিশেষ করে ভূতত্ত্ববিদ্যা, পরিমাপন বিদ্যা, সমুদ্র গবেষণা ও ভূকম্পবিদ্যায় ব্যাপক হারে ব্যবহৃত হয়ে আসছে। সুতরাং বলা যায় মানবজাতির উন্নতি এবং প্রযুক্তির উন্নয়নে পদার্থবিজ্ঞানের ভূমিকা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। নিম্নে বিভিন্ন বিজ্ঞান এবং সাহিত্য সংস্কৃতি, সমাজবিজ্ঞানসহ দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন বিষয়ের উপর পদার্থবিজ্ঞানের প্রভাব আলোচনা করা হলো। পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন তত্ত্ব, নীতি, সূত্র বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় অধ্যয়ন সহজ করে দিয়েছে।

রসায়ন : পরমাণুর গঠন, তেজস্ক্রিয়তা (radioactivity), এক্স-রে বর্তমান রসায়ন শাস্ত্রের জগতে বিপ্লব সূচনা করেছে। এই সমস্ত গবেষণা মৌলের পর্যায় সারণিতে পুনর্বিন্যাস ঘটিয়েছে, নমুনা বস্তুর গতি নির্ণয় করেছে, ভ্যালেন্সির প্রকৃতি এবং রাসায়নিক বন্ধন সম্বন্ধে অবহিত করেছে। ইহা জটিল রাসায়নিক গঠন জানতে সহায়তা করে।

গণিতশাস্ত্র : পদার্থবিজ্ঞান হচ্ছে তাত্ত্বিক বিজ্ঞান। পদার্থবিজ্ঞানের তত্ত্বগুলো গাণিতিক ধারণার মাধ্যমে সম্পন্ন হয়। তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানের উন্নয়নে গণিতশাস্ত্র শক্তিশালী হাতিয়ার হিসেবে কাজ করে আসছে।

জীববিদ্যা : জীববিদ্যায় পদার্থবিজ্ঞানের ভূমিকা অপরিসীম। জীববিদ্যা অধ্যয়নে মাইক্রোস্কোপের ব্যবহার অনেক গুরুত্বপূর্ণ। ইলেকট্রনিক মাইক্রোস্কোপের সাহায্যে কোষের গঠন জানা অনেক সহজ হয়েছে; অর্থাৎ কোষের গঠন জানা অনেকটা সম্ভবপর করে তুলেছে ইলেকট্রনিক মাইক্রোস্কোপ। X-Ray-এর ব্যবহার নিউক্লিক অ্যাসিডের গঠন জানতে সহায়তা করেছে যা জীবনকার্যের মূল প্রক্রিয়া নিয়ন্ত্রণ করে। এ ছাড়া জীব দেহে সংঘটিত শারীরবৃত্তীয় প্রক্রিয়া যেমন: ব্যাপন (diffusion), অসমোসিস (osmosis) ইত্যাদি পদার্থবিজ্ঞানের নীতি ব্যবহার করে ব্যাখ্যা করা যায়।

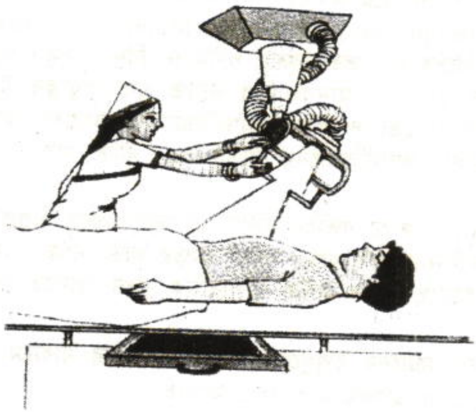
জ্যোতির্বিদ্যা : জ্যোতির্বিদ্যা সম্পর্কীয় টেলিস্কোপ গ্যালিলিওকে জ্যোতিষ্কমণ্ডলী সম্পর্কে জানতে সহায়তা করেছিল। বিভিন্ন দেশের মানমন্দিরে বড় বড় টেলিস্কোপ স্থাপন করে সৌরজগতের বিভিন্ন গ্রহ সম্বন্ধে আমরা জ্ঞানার্জন করতে পারি। রেডিও টেলিস্কোপের ব্যবহার Quasars এবং Pulsars আবিষ্কারে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করেছে এবং ইহা জ্যোতির্বিজ্ঞানীদের বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের অনেক রহস্য উদঘাটন করতে সহায়তা করেছে। পদার্থবিজ্ঞানের উন্নত চিত্রগ্রহণ পদ্ধতি জ্যোতির্বিদ্যার জগতে বিরাট ভূমিকা পালন করেছে।

প্রযুক্তির বিভিন্ন শাখা : প্রযুক্তি কীভাবে তোমার জীবনকে প্রভাবিত করে তা খেয়াল কর। সকালে ঘুম থেকে উঠে দাঁত ব্রাশ করা, গোসল করা, রান্না করা, খাওয়া, কলেজে যাওয়া, গাড়িতে উঠা, রাতে বাতি জ্বালিয়ে পড়াশুনা করা, কলম দিয়ে খাতায় লেখা, জ্বর মাপা, ঘড়ি দেখা, রেডিও-টিভিতে খবর শুনা সবকিছুই হলো প্রযুক্তি। এ ছাড়া জমি চাষ করে কৃষকের ফসল ফলানো, বিভিন্ন রোগের চিকিৎসার জন্য ব্যবহৃত হয় নানা রকমের প্রযুক্তি। তাই বলা যায়, প্রযুক্তি আমাদের জীবনযাত্রাকে প্রভাবিত করছে। আধুনিক প্রযুক্তির মধ্যে সবচেয়ে বিস্ময়কর প্রযুক্তি হলো তথ্য প্রযুক্তি। এই সকল প্রযুক্তিকে সুশৃঙ্খল ও সমৃদ্ধ করার জন্য ভিন্ন ভিন্ন শাখায় বিভক্ত করা হয়েছে। যেমন তথ্য প্রযুক্তি, কৃষি প্রযুক্তি, চিকিৎসা প্রযুক্তি, মহাকাশ প্রযুক্তি ইত্যাদি।

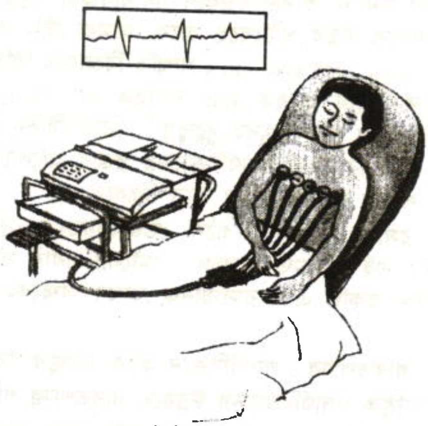
প্রযুক্তি সাধারণত সাধারণ বিজ্ঞান কিংবা পদার্থবিজ্ঞানের প্রয়োগের উপর নির্ভরশীল। পদার্থবিজ্ঞান ও অন্যান্য বিজ্ঞানের বাস্তব প্রয়োগ শিল্পের উন্নয়নে এবং মানবের জীবন-মানের উন্নয়নে বিশেষ ভূমিকা পালন করে থাকে। ফ্যারাডে কর্তৃক আবিষ্কৃত তড়িচ্চুম্বকীয় আবেশ (electromagnetic induction) এক অভূতপূর্ব আবিষ্কার যা শুধু মানুষের উন্নয়নই ঘটায়নি, বরং তা প্রযুক্তির মূল ভিত্তি। জেনারেটর, মোটর, ট্রান্সফরমার ও অন্যান্য বৈদ্যুতিক যন্ত্র আবিষ্কারের ফলে যন্ত্র সভ্যতার সূচনা হয়েছে। ফ্যারাডের এই যুগান্তকারী আবিষ্কার প্রযুক্তিবিদ্যার ভিত্তিস্বরূপ। দীর্ঘ তরঙ্গদৈর্ঘ্য পরিসরে তড়িৎ চৌম্বকীয় তরঙ্গের জ্ঞান রেডিও, টেলিভিশন, বেতার যোগাযোগ ব্যবস্থার উন্নয়নে বিশেষ অবদান রাখছে। স্যাটেলাইট চ্যানেলের মাধ্যমে আমরা বিভিন্ন দেশের অনুষ্ঠান টিভির পর্দায় সরাসরি দেখতে পাই। এ ধরনের স্যাটেলাইট আবহাওয়ার পূর্বাভাস দিতে সক্ষম। তা ছাড়া ভূতাত্ত্বিক জরিপ (Geophysical survey) এবং তেলের খনি আবিষ্কার করতে সহায়তা করে।

আমরা গৃহে ও শিল্প কারখানায় যে বিদ্যুৎ ব্যবহার করে থাকি তা বিভিন্ন প্রকার শক্তির রূপান্তরের মাধ্যমে বৈদ্যুতিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। বিদ্যুৎ উৎপাদন কেন্দ্রে তাপ শক্তিকে বৈদ্যুতিক শক্তিতে রূপান্তরিত করা হয়। জলবিদ্যুৎ কেন্দ্রে পানির বিভব শক্তিকে ব্যবহার করে যান্ত্রিক শক্তিকে বৈদ্যুতিক শক্তিতে রূপান্তরিত করা হয়। নিউক্লীয় পারমাণবিক চুল্লিতে ফিশন মিথস্ক্রিয়ার ফলে সৃষ্ট নিউক্লীয় শক্তিকে ব্যবহার করে বিদ্যুৎ উৎপাদন করা হয়। এগুলোসহ পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন প্রয়োগ প্রযুক্তিক্ষেত্র উন্নয়নে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখছে। সুতরাং নিঃসন্দেহে বলা যায় পদার্থবিজ্ঞান প্রযুক্তির জগতে এবং আমাদের দৈনন্দিন জীবনে বিরাট অবদান রাখছে।

চিকিৎসাবিজ্ঞান : আধুনিক চিকিৎসা যেমন: মানবজীবন রক্ষাকারী হিসেবে কাজ করছে তেমনি পদার্থবিজ্ঞানের উদ্ভাবিত নানাবিধ যন্ত্র সঠিক রোগ নির্ণয়ে দীর্ঘদিন অবদান রেখে চলেছে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, এক্স-রে, আলট্রা-সনোগ্রাফ, সিটিস্ক্যান, এম আর আই, ইসিজি, এন্ডোসকোপি, রেডিওথ্যারাপি, ইটিটি, এনজিওগ্রাফি ও আইসোটোপ



এক্স-রে



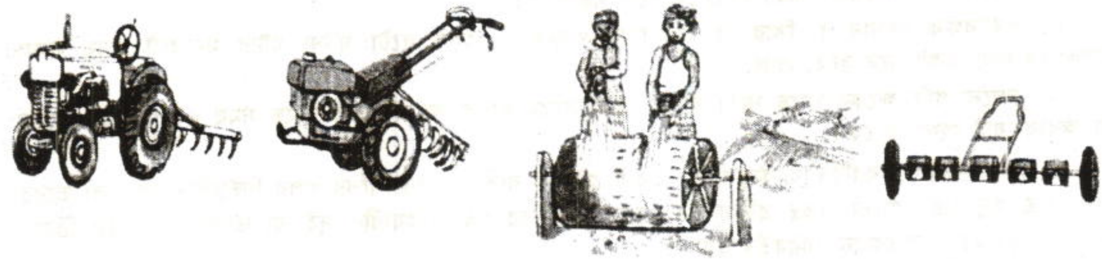
ইসিজি

চিত্র ১·১

ব্যবহার করে চিকিৎসকগণ তাদের চিকিৎসা ব্যবস্থাকে সঠিকভাবে প্রয়োগ করতে সক্ষম হচ্ছে। চিত্র ১·১ এ এক্স-রে ও ইসিজি মেশিন দেখানো হলো। রোগ নির্ণয়ে X-Ray ব্যবহৃত হয়ে থাকে। ক্যান্সারসহ অন্যান্য রোগের চিকিৎসায় রেডিওথেরাপি প্রদান করা হয় এবং এতে রেডিও আইসোটোপ ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

কৃষিবিজ্ঞান : প্রযুক্তি মানব সভ্যতার মতোই পুরানো। যখন থেকে সভ্যতার ইতিহাস লেখা হচ্ছে তার আগে থেকেই প্রযুক্তির ব্যবহার চলে আসছে। আমাদের বেঁচে থাকার জন্য সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হলো খাদ্য। প্রকৃতিতে যেসব উদ্ভিদ ও প্রাণী সহজাতভাবে জন্মে ও বৃদ্ধি পায় তা মানুষ এক সময় ব্যবহার করেছে। বিভিন্ন উদ্ভিদ, গাছের ফল, মূল, প্রাণীর মাংস খাদ্যরূপে মানুষ গ্রহণ করেছে শত শত বছর ধরে। পরবর্তীতে যাযাবর জীবনের অবসান ঘটিয়ে মানুষ যখন খাদ্য উৎপাদন ও পশুপালন শুরু করল তখনই কৃষি সভ্যতার শুরু।

কৃষি প্রযুক্তিতে বড় ধরনের পরিবর্তন এলো দুটো কারণে। একটি হলো উদ্ভিদবিজ্ঞানীরা আবিষ্কার করলেন কীভাবে উদ্ভিদ সূর্যের আলো থেকে শক্তি নিয়ে এবং মাটি, পানি ও বাতাস থেকে প্রয়োজনীয় উপাদান নিয়ে খাদ্য উৎপাদন করে। অন্যটি হলো নতুন সব কৃষি যন্ত্রের উদ্ভাবন ও কৃষিকাজের যান্ত্রিকীকরণ। এর ফলে কৃষির ব্যাপক অগ্রগতি ঘটেছে যাকে কৃষি বিপ্লব বলা যায়। এসব উদ্ভাবিত সকল যন্ত্রপাতি হলো পদার্থবিজ্ঞানের অবদান। চিত্র ১·২ এ কয়েকটি কৃষি যন্ত্রপাতি দেখানো হলো।



(ক) ট্রাক্টর (খ) শক্তি চালিত লাঙ্গল (গ) ধান মাড়াই যন্ত্র (ঘ) বীজ বপন যন্ত্র

চিত্র ১·২

সাহিত্য ও সংস্কৃতি : সাহিত্য ও সংস্কৃতি সভ্য জাতিসত্তার একটি উল্লেখযোগ্য দিক। সাহিত্য ও সংস্কৃতি চর্চা মানব সমাজকে সভ্য জাতি হিসেবে প্রতিষ্ঠা করে। এরই আওতায় পদার্থবিজ্ঞান নানাভাবে ভূমিকা রেখে চলেছে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় কবিতা পাঠে, শব্দের তীব্রতা বৃদ্ধি করতে, মাইক্রোফোনের সাহায্যে কথা বলা থেকে শুরু করে গান-বাজনা চর্চায় ব্যবহৃত হচ্ছে বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্রসহ নানাবিধ পদার্থবিজ্ঞানের উদ্ভাবিত যন্ত্রপাতি ও কলাকৌশল।

সমাজবিজ্ঞান : পদার্থবিজ্ঞানের ক্ষেত্রে বিজ্ঞানীদের বিভিন্ন আবিষ্কার মানব কল্যাণ এবং উন্নয়নে গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখে চলেছে। পদার্থবিজ্ঞানের সাথে সমাজ জীবনের ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক রয়েছে। পদার্থবিজ্ঞানের জগতের যেকোনো আবিষ্কার সমাজকে প্রভাবিত করে। পদার্থবিজ্ঞানের যেকোনো প্রযুক্তি আমাদের জীবনের প্রতিটি স্তরকে স্পর্শ করেছে। পদার্থবিজ্ঞানের আবিষ্কার যোগাযোগের ক্ষেত্রে বৈপ্লবিক পরিবর্তন সাধন করেছে। উদাহরণস্বরূপ— টেলিফোন, টেলিগ্রাফ, টেলিপ্রিন্টার, টেলেক্স, ই-মেইল, ফ্যাক্স, ইন্টারনেট ইত্যাদির মাধ্যমে আমরা সারা বিশ্বের সাথে অতি অল্প সময়ে যোগাযোগ স্থাপন করতে সক্ষম হচ্ছি। রেডিও ও টেলিভিশন আমাদের যোগাযোগ ব্যবস্থাকে দ্রুততর করেছে। স্যাটেলাইট চ্যানেলসমূহ আমাদের যোগাযোগ ব্যবস্থায় যুগান্তকারী বিপ্লবের সূচনা করেছে। বিশ্বের কোথায় কী ঘটেছে বা ঘটছে তা আমরা মুহূর্তের মধ্যে দেখতে পাচ্ছি, জানতে পারছি। Microelectronics, lasers এবং কম্পিউটার মানবের চিন্তনে এবং জীবন ব্যবস্থায় বড় ধরনের পরিবর্তন সাধন করেছে।

দর্শন : মানুষের আচার-আচরণ নির্ভর করে তার ব্যক্তিসত্তা ও কর্মকাণ্ডের ওপর। মানুষ প্রকৃতির দাস। সে যে আচরণ অন্যের কাছ থেকে পেয়ে থাকে অপরের সাথে সে তদ্রূপ আচরণ করার চেষ্টা করে। এক্ষেত্রে পদার্থবিজ্ঞানের ভাষায় বলা যায় প্রত্যেক ক্রিয়ারই সমান এবং বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে। মানুষের মেধা ও মনন যদি কোনো কারণে থেমে যায় বা বাধাগ্রস্ত হয় তা অন্য কোনো কর্মকাণ্ডে অন্যভাবে প্রতিফলিত হয় এবং তার মেধা, মনন ও প্রতিভার কোনো ঘাটতি ঘটে না। এদিক দিয়ে উক্ত তথ্যটি পদার্থবিজ্ঞানের ভরবেগের নিত্যতার সূত্রের সাথে একাত্ম হয়ে আছে। এভাবে চলমান জীবনে নানা ক্ষেত্রে পদার্থবিজ্ঞান ওতপ্রোতভাবে জড়িয়ে আছে।

খেলাধুলা : খেলাধুলা শরীর ও মনকে সতেজ করে। সুশৃঙ্খল ও নিয়মমাফিক খেলাধুলায় ব্যবহৃত বিভিন্ন সরঞ্জামাদি এবং আনুষঙ্গিক দ্রব্যাদি শুধু খেলার মানকেই বৃদ্ধি করে না বরং শরীরচর্চায় নানাবিধ সুযোগ সৃষ্টি করে দেয়। যেমন ফ্লাশলাইট ব্যবহার করে রাতে আমরা খেলা উপভোগ করি, সময় নিয়ন্ত্রণের জন্য বিভিন্ন ধরনের টাইমার ব্যবহার করি, ফলাফল প্রদর্শনের জন্য স্কোরবোর্ড ব্যবহার করি, গতি মাপার জন্য স্পিডোমিটার ব্যবহার করি। এ ছাড়া খেলাধুলার সাথে সম্পৃক্ত নানা ক্ষেত্রে পদার্থবিজ্ঞানের সকল প্রযুক্তি খেলার জগৎকে সমৃদ্ধ করেছে।

১.৫ পদার্থবিজ্ঞানে স্থান, সময় ও ভর
Space, time and mass in physics

[MAT: 22-23]

চিরায়িত বলবিদ্যা নিউটনীয় বলবিদ্যা নামে পরিচিত (Classical mechanics is known as Newtonian mechanics)। এই বলবিদ্যায় তিনটি মৌলিক রাশির ধারণা করা হয়েছে। এগুলো হলো স্থান (Space), সময় বা কাল (Time) এবং ভর (Mass)।

ক. স্থান : বিজ্ঞানী নিউটনের মতে, স্থান একটি পরম জিনিস যা তার নিজের মধ্যেই অবস্থান করে। এটি বাইরের কোনো কিছুর সঙ্গে সম্পর্কীয় নয় এবং পরিবেশ দ্বারা প্রভাবিত হয় না। যেমন: কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য বস্তুর বা পর্যবেক্ষকের গতির উপর নির্ভরশীল নয় এবং স্থির অবস্থায় অপরিবর্তনীয়।

খ. সময় বা কাল : নিউটনের মতে সময় বা কাল প্রকৃতিগতভাবে একটি পরম রাশি যা বাইরের কোনো কিছুর ওপর নির্ভর না করে সমভাবে এগিয়ে চলে। সুতরাং সময় সর্বজনীন এবং নির্দিষ্ট হারে এগিয়ে চলে যা বস্তু বা পর্যবেক্ষকের গতির উপর নির্ভরশীল নয়। এ থেকে দুটো মন্তব্য করা যায় :

(১) পর্যবেক্ষক চলমান বা স্থির যে অবস্থায়ই থাকুক না কেন দুটো ঘটনা ঘটার মধ্যবর্তী সময় সকল পর্যবেক্ষকের জন্য একই মনে হবে; এবং

(২) কোনো পর্যবেক্ষকের কাছে দুটো ঘটনা একই সময়ে ঘটলে পর্যবেক্ষকের কাছে সময় একই হবে, তাদের গতীয় অবস্থা যাই হোক না কেন।

গ. ভর : নিউটনীয় বলবিদ্যায় বস্তুর ভর একটি মৌলিক রাশি যা তার গতির ওপর নির্ভরশীল নয় এবং ভরের নিত্যতা সূত্র অনুসারে কোনো স্বতন্ত্র প্রক্রিয়াধীন বস্তুসমূহের ভর ওই প্রক্রিয়াধীন দুই বা ততোধিক বস্তুর ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার দরুন হয়। এর কোনো পরিবর্তন ঘটে না।

আধুনিক ধারণা

বিজ্ঞানী আইনস্টাইন প্রমাণ করেন যে, **চিরায়ত বলবিদ্যার মৌলিক রাশি তিনটি গতির সাথে পরিবর্তন হয়। সুতরাং রাশি তিনটি পরম নয়।**

ক. স্থান : কোনো বস্তুর গতিশীল অবস্থার দৈর্ঘ্য ওই বস্তুর স্থির অবস্থার দৈর্ঘ্যের চেয়ে ছোট হওয়াকে দৈর্ঘ্য সংকোচন বলে। সুতরাং গতির সাথে বস্তুর দৈর্ঘ্য সংকুচিত হয়।

খ. সময় বা কাল : কোনো জড় বা স্থির কাঠামোতে সংঘটিত ঘটনা উক্ত কাঠামো সাপেক্ষে গতিশীল অন্য কোনো কাঠামো থেকে লক্ষ করলে দেখা যাবে ঘটনার সময় ব্যবধান বৃদ্ধি পেয়েছে। এ বিষয়টিকে কাল দীর্ঘায়ন বা সময় প্রসারণ বলে। সুতরাং গতির সাথে সময়ের প্রসারণ ঘটে।

গ. ভর : বস্তু গতিশীল হলে এর ভর বৃদ্ধি পায়। এই ঘটনাকে ভরের আপেক্ষিকতা বা গতিজনিত ভর বৃদ্ধি বলে।

১.৬ মৌলিক একক বা প্রাথমিক একক এবং লব্ধ একক বা যৌগিক একক
Fundamental unit or derived unit

বিজ্ঞানে ব্যবহৃত অসংখ্য ভৌত রাশির প্রতিটির নিজস্ব একক আছে। কিন্তু সব ভৌত রাশির একককে মাত্র তিনটি এককের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যথা—

(১) **মৌলিক একক (বা মূল একক) বা প্রাথমিক একক** (Fundamental unit),

(২) **লব্ধ (বা প্রান্ত) বা যৌগিক একক** (Derived unit) এবং

(৩) **ব্যবহারিক একক** (Practical unit)।

যে একক অন্য কোনো এককের ওপর নির্ভর করে না এবং একেবারে সম্পর্কশূন্য বা স্বাধীন তাকে মৌলিক একক বা প্রাথমিক একক বলে। যেমন দৈর্ঘ্য বা ভর বা সময়ের একক অন্য কোনো এককের ওপর নির্ভর করে না। সুতরাং দৈর্ঘ্যের একক, ভরের একক এবং সময়ের একক মৌলিক একক। **এই তিনটিকে ভিত্তি করে যে একক গঠন করা হয় বা মৌলিক একক হতে যে একক পাওয়া যায় তাকে লব্ধ একক বা যৌগিক একক বলে।** উদাহরণস্বরূপ ক্ষেত্রফল মাপতে দৈর্ঘ্যকে প্রস্থ দিয়ে গুণ করতে হয়। যেমন এক মিটার (m) দৈর্ঘ্য ও এক মিটার (m) প্রস্থবিশিষ্ট ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 1$ মিটার (m) $\times 1$ মিটার (m) $= 1$ বর্গ মিটার বা, $1\,m^2$।

এই বর্গ মিটারই ক্ষেত্রফল মাপার একক। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, দৈর্ঘ্যের একক জানা থাকলে, ক্ষেত্রফলের একক জানা যায়, তার জন্য নতুন কোনো এককের দরকার হয় না। অতএব ক্ষেত্রফলের একক যৌগিক একক। তেমনি আয়তন, বেগ, ত্বরণ, বল ইত্যাদির একক যৌগিক একক।

মৌলিক একক তিনটি; যথা—

(ক) দৈর্ঘ্যের একক (Unit of length),

(খ) ভরের একক (Unit of mass) এবং

(গ) সময়ের একক (Unit of time)।

এই এককগুলো হবে নির্দিষ্ট, সুবিধাজনক ও অপরিবর্তনীয় অর্থাৎ গরমকালে কোনো দূরত্ব যদি 1 মিটার হয়, তবে শীতকালেও তা 1 মিটার হবে। সময় কিংবা চাপ ইত্যাদির প্রভাবে তাদের কোনো পরিবর্তন ঘটে না।

কোনো কোনো সময় মৌলিক বা প্রাথমিক একক খুব বড় বা ছোট হওয়ায় ব্যবহারিক কাজের অনুপযোগী হয়ে পড়ে। এসব ক্ষেত্রে তাদের উপ-গুণিতক (ভগ্নাংশ) (Sub-multiples) বা গুণিতক (Multiples)-কে একক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।

কোনো কোনো ক্ষেত্রে সুবিধাজনক নতুন এককও ব্যবহৃত হয়। এর নাম ব্যবহারিক একক (Practical unit); যেমন কিলোমিটার (km), মাইক্রোন (μ), টন ইত্যাদি। অবশ্য প্রশ্নও জাগে বিজ্ঞানী আইনস্টাইন-এর আপেক্ষিক তত্ত্ব অনুসারে কোনো ভর, সময় ও দৈর্ঘ্য মহাজগতের সব স্থান হতে সমান হবে কী ?

অনুসন্ধানমূলক কাজ : আলোকবর্ষ প্রাথমিক একক না লব্ধ একক ? ব্যাখ্যা দাও।

শূন্য মাধ্যমে আলোক এক বছরে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে এক আলোকবর্ষ বলে। এর মাত্রা দৈর্ঘ্যের মাত্রার সমান। সুতরাং আলোকবর্ষ হলো প্রাথমিক একক।

একক লেখার পদ্ধতি

1960 সালে আন্তর্জাতিক সম্মেলনে গৃহীত একক এবং সংখ্যা লেখার কয়েকটি নিয়ম নিম্নে উল্লেখ করা হলো :

(১) একক একবচনে লিখতে হবে; যথা: km, কিন্তু (kms নয়)

(২) এককের শেষে ফুলস্টপ দেয়া যাবে না; যেমন: km, কিন্তু (km. নয়)

(৩) দশমিক চিহ্ন দেয়ার নিয়ম 1.9; তবে অনেকে 1·9 এভাবেও লেখে।

(৪) দীর্ঘ সংখ্যা পাঠে সুবিধার জন্যে দশমিক স্থান হতে আরম্ভ করে ডানে বা বামে একত্রে তিনটি করে সংখ্যা লিখতে হবে।

অশুদ্ধ	শুদ্ধ
24765·321	24,765·321

(৫) একক লেখার সময় প্রয়োজন মতো বিভক্তি চিহ্ন (/) যথা (N/m^2) একবার মাত্র ব্যবহার করা যাবে। তবে তা না করাই ভালো। যেমন N/m^2 এর স্থলে Nm^{-2} লেখা উচিত।

(৬) এককের দশমাংশগুলো নিম্নলিখিতভাবে লিখতে হবে; যেমন:

ডেসি ($=10^{-1}$)d

সেন্টি ($=10^{-2}$) c ইত্যাদি।

(৭) সাধারণ ব্যবহারে মিনিট, ঘণ্টা, দিন, সপ্তাহ, মাস, বছর ইত্যাদি চললেও বিজ্ঞানের সঠিক পরিমাপে এ ধরনের একক ব্যবহার করা অনুচিত।

এককের পদ্ধতি
System of units

উপরের তিনটি প্রাথমিক একককে প্রকাশ করার জন্য তিনটি পদ্ধতি আছে। এ ছাড়া পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার প্রয়োজন উপযোগী অতিরিক্ত এক বা একাধিক প্রমাণ রাশি ও তার একক যুক্ত করে পরিমাপের আরও দুটি পদ্ধতি প্রচলিত আছে। পদ্ধতিগুলো নিম্নে আলোচনা করা হলো।

(১) **সেন্টিমিটার-গ্রাম-সেকেন্ড পদ্ধতি বা মেট্রিক পদ্ধতি বা ফ্রেঞ্চ পদ্ধতি (Centimetre-Gramme-Second System or Metric system or French system)** : এ পদ্ধতিকে সংক্ষেপে সি. জি. এস. (C. G. S.) বা সেমি. গ্রাম সে. পদ্ধতি বলা হয়।

এখানে,

সি.	অক্ষরটি বুঝাচ্ছে	সেন্টিমিটার—দৈর্ঘ্যের একক
জি.	” ”	গ্রাম—ভরের একক
এস.	” ”	সেকেন্ড—সময়ের একক

অর্থাৎ এই পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক সেন্টিমিটার, ভরের একক গ্রাম এবং সময়ের একক সেকেন্ড। এই পদ্ধতিকে দশমিক পদ্ধতি (Decimal system) বলে।

(২) মিটার-কিলোগ্রাম-সেকেন্ড পদ্ধতি (Metre-Kilogramme-Second system) : এই পদ্ধতিকে সংক্ষেপে এম. কে. এস. (M. K. S.) পদ্ধতি বলা হয়। এখানে,

এম. অক্ষরটি বুঝাচ্ছে মিটার—দৈর্ঘ্যের একক
কে. " " কিলোগ্রাম—ভরের একক
এস. " " সেকেন্ড—সময়ের একক

অর্থাৎ, এ পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক মিটার, ভরের একক কিলোগ্রাম এবং সময়ের একক সেকেন্ড।

(৩) আন্তর্জাতিক পদ্ধতির একক বা এস. আই. একক (International System of Units or S. I. Units) : বিভিন্ন দেশে ভিন্ন ভিন্ন পদ্ধতির এককের প্রচলন আছে। কোথাও এফ. পি. এস. পদ্ধতি, কোথাও সি. জি. এস. পদ্ধতি, আবার কোথাও এম. কে. এস. পদ্ধতি। পরিমাপের এই বৈষম্যের জন্য বাস্তব ক্ষেত্রে বেশ অসুবিধা হয়। এই অসুবিধা দূর করার উদ্দেশ্যে বিশ্বের বিভিন্ন দেশের বিজ্ঞানীরা পরিমাপের উপরোক্ত তিনটি পদ্ধতি ছাড়াও 1960 সালে পরিমাপের একটি নতুন পদ্ধতি প্রচলন করেন। এটিই আন্তর্জাতিক পদ্ধতির একক বা এস. আই. একক.। পূর্বের এম. কে. এস. পদ্ধতির সাথে আরও কয়েকটি প্রমাণ রাশি ও উহার একক যোগ করে এই পদ্ধতি তৈরি করা হয়। এই পদ্ধতিতে ব্যবহৃত বিভিন্ন মৌলিক রাশি এবং তাদের একক ও প্রতীক নিচের তালিকায় উল্লেখ করা হলো। এই পদ্ধতিতে সর্বমোট নয়টি রাশি আছে।

[MAT: 21-22]

ক্রমিক সংখ্যা	রাশি	একক	এককের প্রতীক
1.	দৈর্ঘ্য	মিটার	m
2.	ভর	কিলোগ্রাম	kg
3.	সময়	সেকেন্ড	s
4.	তাপমাত্রা	কেলভিন	K
5.	বিদ্যুৎ প্রবাহমাত্রা	অ্যাম্পিয়ার	A
6.	কোণ (দ্বিমাত্রিক)	রেডিয়ান	rad
7.	কোণ (ত্রিমাত্রিক)	স্টেরিডিয়ান	Sr
8.	দীপন মাত্রা	ক্যান্ডেলা	cd
9.	পদার্থের পরিমাণ	মোল	mole

এটি প্রণিধানযোগ্য যে, আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে এই নয়টি মূল এককের সাহায্যে বস্তু জগতের পরিমাপ বিষয়ক সর্বপ্রকার একক পাওয়া যায়।

এ পদ্ধতিতে লব্ধ একক এবং তাদের প্রতীক নিম্নে বর্ণিত হলো।

ক্রমিক সংখ্যা	রাশি	একক	এককের প্রতীক
1.	বল	নিউটন	N
2.	শক্তি	জুল	J
3.	ক্ষমতা	ওয়াট	W
4.	তড়িতাধান	কুলম্ব	C
5.	বৈদ্যুতিক রোধ	ও'ম	Ω
6.	বৈদ্যুতিক বিভব	ভোল্ট	V
7.	কম্পাঙ্ক	হার্জ	Hz

(৪) M.K.S.A. পদ্ধতি : পরিমাপের পূর্বোক্ত পদ্ধতি ছাড়াও বলবিদ্যা, তড়িৎ ও চুম্বকের সমষ্টিগত প্রয়োজনে আর একটি নতুন পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়। এর নাম মিটার-কিলোগ্রাম-সেকেন্ড-অ্যাম্পিয়ার পদ্ধতি। সংক্ষেপে একে M.K.S.A.

System বা এম. কে. এস. এ. পদ্ধতি বলা হয়। এটি একটি সুসংগত পদ্ধতি। এটি চারটি প্রমাণ একক নিয়ে গঠিত, যথা—

ক্রমিক সংখ্যা	রাশি	একক	এককের প্রতীক
1.	দৈর্ঘ্য	মিটার	m
2.	ভর	কিলোগ্রাম	kg
3.	সময়	সেকেন্ড	s
4.	বিদ্যুৎ প্রবাহমাত্রা	অ্যাম্পিয়ার	A

মৌলিক এককসমূহ, এগুলোর গুণিতক ও উপগুণিতক

আমরা জানি মৌলিক একক তিনটি; যথা—

(ক) **দৈর্ঘ্যের একক,**

(খ) **ভরের একক** এবং

(গ) **সময়ের একক।**

(ক) দৈর্ঘ্যের একক : সি. জি. এস. পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক সেন্টিমিটার। 90 ভাগ প্লাটিনাম ও 10 ভাগ ইরিডিয়ামের সংকর নির্মিত দণ্ডের উপর দুইটি নির্দিষ্ট দাগের মধ্যবর্তী দূরত্বকে **আন্তর্জাতিক মিটার** (International Proto-type Metre) বলে। আন্তর্জাতিক ওজন ও পরিমাপ সংস্থার রক্ষণশালায় দণ্ডটি বিশেষভাবে রক্ষিত আছে। তাপমাত্রার বৃদ্ধি বা হ্রাসের প্রভাব যাতে এর উপর না পড়ে, সেজন্য দণ্ডটিকে 0°C তাপমাত্রায় রাখা হয়। এই দূরত্বের এক শ' ভাগের এক ভাগকে এক সেন্টিমিটার বলে।

এককসমূহের তালিকা

সি. জি. এস. এবং এম. কে. এস. ও আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের এককের তালিকা :

10 মিলিমিটার (মিমি)	= 1 সেন্টিমিটার (সেমি)	10 ডেকামিটার (Dm)	= 1 হেক্টোমিটার (হেমি)
10 সেন্টিমিটার	= 1 ডেসিমিটার (ডেমি)	10 হেক্টোমিটার (Hm)	= 1 কিলোমিটার (কিমি)
10 ডেসিমিটার (dm)	= 1 মিটার (মি)	10 কিলোমিটার (km)	= 1 মিরিয়া মিটার (মিরিয়ামি)
10 মিটার (m)	= 1 ডেকামিটার (ডেকামি)		

অন্যান্য ছোট, বড় ও নভোমণ্ডলীয় একক :

1 ফার্মি (fm)	= 10^{-13} সেমি	= 10^{-15} মিটার
1 এক্সরে ইউনিট (X.U.)	= 10^{-11} সেমি	= 10^{-13} মিটার
1 অ্যাংস্ট্রম (Å)	= 10^{-8} সেমি	= 10^{-10} মিটার
1 মিলিমাইক্রোন (mμ)	= 10^{-7} সেমি	= 10^{-9} মিটার
1 মাইক্রোন (μ) বা মাইক্রোমিটার	= 10^{-4} সেমি	= 10^{-6} মিটার
1 মেগামিটার (Mm)	= 10^{8} সেমি	= 10^{6} মিটার
1 অ্যাস্ট্রনোমিক্যাল ইউনিট (AU)	= $1{\cdot}495 \times 10^{8}$ মিটার (11) = $9{\cdot}289 \times 10^{7}$ মাইল	
	= $1{\cdot}495 \times 10^{8}$ km (সূর্য ও পৃথিবীর গড় দূরত্ব)	
1 আলোকবর্ষ (ly) বা লাইট ইয়ার	= এক বছরে আলোকের অতিক্রান্ত দূরত্ব	
	= $9{\cdot}46 \times 10^{15}$ মি = $9{\cdot}46 \times 10^{12}$ কিলোমিটার	
	= $5{\cdot}865 \times 10^{12}$ মাইল	
1 পারসেক (pc) = 3·26 আলোকবর্ষ	= $3{\cdot}083 \times 10^{13}$ কিলোমিটার = $3{\cdot}083 \times 10^{16}$ মিটার	
	= 3·2616 ly = 206265 au	
1 একক পারমাণবিক ভর (a.m.u.)	= $1{\cdot}66 \times 10^{-27}$ কিলোগ্রাম	
1 হেক্টর	= 10^{4} m^2	
1 কুইন্টাল	= 100 kg	
1 টন	= 1000 kg	
1 বছর	= $3{\cdot}156 \times 10^{7}$ s	

[MAT: 24-25,12-13,9-10; DAT: 20-21,19-20,17-18]

কয়েকটি উপসর্গের (Prefixes) অর্থ :

	উপসর্গ	সংকেত	অর্থ	এককের কত গুণ
এককের উপগুণিতক	ডেসি (Deci)	d	$\frac{1}{10}$	10^{-1} (দশাংশ)
	সেন্টি (Centi)	c	$\frac{1}{10^2}$	10^{-2} (শতাংশ)
	মিলি (Milli)	m	$\frac{1}{10^3}$	10^{-3} (সহস্রাংশ)
	মাইক্রো (Micro)	μ	$\frac{1}{10^6}$	10^{-6} (নিযুতাংশ)
	ন্যানো (Nano)	n	$\frac{1}{10^9}$	10^{-9} অংশ
	পিকো (Pico)	p	$\frac{1}{10^{12}}$	10^{-12} „
	ফেমটো (Femto)	f	$\frac{1}{10^{15}}$	10^{-15} „
[DAT: 23-24]	অ্যাটো (Ato)	a	$\frac{1}{10^{18}}$	10^{-18} „
এককের গুণিতক	ডেকা (Deca)	da	$\frac{10}{1}$	10^1 (দশ গুণ)
	হেক্টো (Hecto)	h	$\frac{100}{1}$	10^2 (শত গুণ)
	কিলো (Kilo)	k	$\frac{1000}{1}$	10^3 (হাজার গুণ)
	মিরিয়া (Myria)	Ma	$\frac{10000}{1}$	10^4 (দশ হাজার গুণ)
	মেগা (Mega)	M	$\frac{1000000}{1}$	10^6 (দশ লক্ষ গুণ)
	গিগা (Giga)	G	$\frac{1000000000}{1}$	10^9 গুণ
	টেরা (Tera)	T	$\frac{1000000000000}{1}$	10^{12} গুণ
	পেটা (Peta)	P	$\frac{1000000000000000}{1}$	10^{15} গুণ
	এক্সা (Exa)	E	$\frac{1000000000000000000}{1}$	10^{18} গুণ
	জেটা (Zetta)	Z	$\frac{1000000000000000000000}{1}$	10^{21} গুণ
	ইয়োটা (Yotta)	Y	$\frac{1000000000000000000000000}{1}$	10^{24} গুণ

গাণিতিক উদাহরণ ১.১

১। এক টনে কত কিলোগ্রাম (kg) ?

আমরা জানি,

1 টন $= 2{,}240$ পাউন্ড

$= 2{,}240 \times 453{\cdot}6$ g

$= \frac{2{,}240 \times 453{\cdot}6}{1000}$ kg

$= 1{,}016$ kg

RMDAC

২। 1 গ্যালন কত ঘনমিটার (m^3)-এর সমান ?

আমরা জানি,

1 গ্যালন $= 277$ inch^3 ও 1 inch $= 2{\cdot}54$ cm

∴ 1 inch^3 $= (2{\cdot}54 \text{ cm})^3 = 16{\cdot}39 \text{ cm}^3 = 16{\cdot}39 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

কাজেই, 1 গ্যালন $= 277 \times 16{\cdot}39 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 4{\cdot}54 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

৩। বলের একককে মৌলিক এককের মাধ্যমে প্রকাশ কর। [চ. বো. ২০১৫]

আমরা জানি,

বল, $F =$ ভর $\times$ ত্বরণ $= ma$

এখানে ভর, m-এর একক kg এবং ত্বরণ a-এর একক ms^{-2}

সুতরাং F-এর মৌলিক একক = $kg\ ms^{-2}$

হিসাব কর : X, Y এবং Z এই তিনটি ভৌত রাশির একক যথাক্রমে kgm^2s^{-3}, kgs^{-1} এবং ms^{-2} হলে X, Y এবং Z-এর মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর।

ধরা যাক, $X = KY^aZ^b$ ... ... (i)

যেখানে K একটি মাত্রাহীন ধ্রুবক, a ও b হলো সংখ্যাসূচক।

প্রশ্নানুযায়ী, X-এর মাত্রা = ML^2T^{-3}

Y-এর মাত্রা = MT^{-1}

এবং Z-এর মাত্রা = LT^{-2}

সমীকরণ (i)-এ এই মানগুলো বসিয়ে পাই,

$$ML^2T^{-3} = M^aT^{-a}L^bT^{-2b} = M^aL^bT^{-a-2b}$$

সমীকরণ (i)-এর উভয় পক্ষের মাত্রা তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = 2$

অতএব, নির্ণেয় সম্পর্ক $X = KYZ^2$

মৌলিক ও লব্ধ এককের মাত্রা ও মাত্রা সমীকরণ
Dimension and dimensional equation of fundamental and derived units

মাত্রা
Dimension

আমরা পূর্বেই আলোচনা করেছি যে উৎপত্তি অনুসারে রাশি দুই প্রকার—একটি **মৌলিক রাশি** এবং অপরটি **যৌগিক রাশি**। আমরা আরও জানি, যেসব রাশি অন্য কোনো রাশির ওপর নির্ভর করে না, তাদেরকে মৌলিক রাশি বলে। এখন আমরা আলোচনা করব, কোনো রাশির 'মাত্রা' বলতে কী বুঝি ? কোনো রাশির মাত্রার নিম্নলিখিত যেকোনো একটি সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

(১) কোনো একটি রাশি এবং তার মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য যে সংকেত ব্যবহার করা হয় তাকে উক্ত রাশির মাত্রা বলে।

উদাহরণস্বরূপ দৈর্ঘ্য একটি রাশি। ফুট বা সেমি বা মিটার তার মৌলিক একক। দৈর্ঘ্য এবং এর মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য 'L' সংকেত ব্যবহার করা হয়। এখানে L দৈর্ঘ্য বুঝায়। আবার ফুট বা সেমি বা মিটার এরাও প্রত্যেকে দৈর্ঘ্য প্রকাশ করে। সুতরাং 'L' অক্ষর দৈর্ঘ্য এবং এর মৌলিক এককের মধ্যে যোগসূত্র স্থাপনের একটি সংকেত। অতএব দৈর্ঘ্যের মাত্রা L।

(২) কোনো একটি প্রাকৃতিক রাশির মাত্রা উক্ত রাশি এবং তার মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

(৩) কোনো লব্ধ একক গঠন করতে মৌলিক একককগুলোকে যে ঘাতে উন্নীত করা হয়, সে ঘাতকে ওই লব্ধ এককের মাত্রা বলে।

মাত্রা সমীকরণ
Dimensional equation

পদার্থবিজ্ঞানের তিনটি মৌলিক রাশি হলো **দৈর্ঘ্য, ভর** এবং **সময়**। এদের মাত্রা যথাক্রমে L, M এব T। দৈর্ঘ্যকে L দ্বারা প্রকাশ করা হয় বলে দৈর্ঘ্য এক L-মাত্রিক রাশি, ক্ষেত্রফল হলো দৈর্ঘ্য $\times$ দৈর্ঘ্য $= L \times L = L^2$। অতএব ক্ষেত্রফল দুই L-মাত্রিক রাশি। অনুরূপভাবে, আয়তন হলো দৈর্ঘ্য $\times$ দৈর্ঘ্য $\times$ দৈর্ঘ্য $= L \times L \times L = L^3$। অতএব আয়তন হলো তিন L-মাত্রিক রাশি ইত্যাদি। এখানে $[L]$, $[L^2]$, $[L^3]$-কে **মাত্রিক বা মাত্রা সমীকরণ** (Dimensional equation) বলা হয়।

দৈর্ঘ্যের মাত্রা সমীকরণ = [L]। ভরকে M দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর মাত্রা সমীকরণ = [M]। সময়কে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। T এর মাত্রা সমীকরণ = [T]।

মাত্রা সমীকরণের নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে।

যে সমীকরণ মৌলিক একক এবং লব্ধ এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে তাকে মাত্রা সমীকরণ বলে।

গানিতিক উদাহরণ ১.২

১। তড়িৎ প্রাবল্য E-এর মাত্রা সমীকরণ লিখ।

আমরা জানি, তড়িৎ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ধনাত্মক আধানের ওপর প্রযুক্ত বলকে তড়িৎ প্রাবল্য বলে। সুতরাং,

$E = \frac{F}{q}$, এখানে F প্রযুক্ত বল ও q আধান।

এখন, F এর মাত্রা = MLT^{-2} এবং q এর মাত্রা = AT

$\therefore \quad E = \frac{MLT^{-2}}{AT} = MLT^{-3}A^{-1} \qquad [\because q = it = AT]$

সুতরাং E এর মাত্রা সমীকরণ $[MLT^{-3}A^{-1}]$

২। দেখাও যে, কৌণিক ভরবেগের মাত্রা ও প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবকের মাত্রা একই।

আমরা জানি,

ক�ৌণিক ভরবেগ $= mv \times r$ (এখানে m = ভর, v = বেগ এবং r = ব্যাসার্ধ)

$= [MLT^{-1}] \times [L]$

$= [ML^2T^{-1}] \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

আবার, প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক, $h = \frac{E}{\upsilon} \qquad [\because E = h\upsilon]$

$= \frac{\text{শক্তি}}{\text{কম্পাঙ্ক}} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[T^{-1}]}$

$= [ML^2T^{-1}] \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে দেখা যায় যে কৌণিক ভরবেগের মাত্রা ও প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবকের মাত্রা অভিন্ন।

৩। যদি বল (F), দৈর্ঘ্য (L) এবং সময় (T) মৌলিক রাশি হয়, তবে ভরের মাত্রা নির্ণয় কর।

নিউটনের দ্বিতীয় গতি সূত্রানুসারে আমরা জানি,

বল = ভর × ত্বরণ

$\therefore$ ভর = $\frac{\text{বল}}{\text{ত্বরণ}}$

এখন, বলের মাত্রা = F, ত্বরণের মাত্রা = LT^{-2}

$\therefore$ ভরের মাত্রা = $\frac{F}{LT^{-2}} = FL^{-1}T^2$

মাত্রা সমীকরণের প্রয়োজনীয়তা

পদার্থবিজ্ঞানে মাত্রা সমীকরণের ভূমিকা অপরিসীম। নিম্নে এর ভূমিকা বা প্রয়োজনীয়তা উল্লেখ করা হলো :

(১) এক পদ্ধতির একককে অন্য পদ্ধতির এককে রূপান্তর করা যায়।
(২) সমীকরণের নির্ভুলতা যাচাই করা যায়।
(৩) বিভিন্ন রাশির সমীকরণ গঠন করা যায়।
(৪) কোনো ভৌত রাশির একক নির্ণয় করা যায়।
(৫) কোনো ভৌত সমস্যার সমাধান করা যায়।

সমমাত্রিক নীতি (Principle of dimensional homogeneity) :

কোনো সঠিক সম্পর্ক বা সমীকরণের দুটি দিকের মাত্রা সব সময় অভিন্ন হবে। এটিই সমমাত্রিক নীতি।

কাজ : একটি মাত্রাহীন ভৌত রাশির নাম লিখ এবং দেখাও যে রাশিটি মাত্রাহীন।

মাত্রাহীন ভৌত রাশিটি হলো সমতলিক কোণ (Plane angle) θ।

এখন কোণের সংজ্ঞানুযায়ী, আমরা জানি,

$\theta = \frac{\text{বৃত্তচাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$

বৃত্তচাপ ও ব্যাসার্ধ উভয় রাশিরই মাত্রা হলো দৈর্ঘ্যের মাত্রা [L]

$\therefore$ কোণ $(\theta) = \frac{[L]}{[L]} = 1$

সুতরাং সমতলিক কোণ একটি মাত্রাহীন রাশি।

১.৭ ভৌত রাশির মান এক একক পদ্ধতি হতে অন্য একক পদ্ধতিতে রূপান্তর
Conversion of the value of a physical quantity from one unit to another unit

যদি কোনো ভৌত রাশির মান একটি একক পদ্ধতিতে জানা থাকে তবে সমমাত্রিক নীতি প্রয়োগ করে ও মাত্রা বিশ্লেষণের মাধ্যমে অন্য একটি একক পদ্ধতিতে রাশিটির মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ : S.I. এবং C.G.S. পদ্ধতিতে বলের একক হলো যথাক্রমে Newton এবং dyne। 1 Newton বল কত dyne বলের সমান তা এখানে নির্ণয় করা হলো।

আমরা জানি, বলের মাত্রা সমীকরণ = $[MLT^{-2}]$

ধরা যাক, C.G.S. পদ্ধতিতে ভর, দৈর্ঘ্য এবং সময়ের একক যথাক্রমে m_1, l_1 ও t_1 এবং S.I. পদ্ধতিতে ভর, দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক যথাক্রমে m_2, l_2 ও t_2।

ধরা যাক, 1 Newton = n dyne

অতএব, বলের মাত্রা অনুযায়ী লেখা যায়,

$$1 \times m_2 l_2 t_2^{-2} = n \times m_1 l_1 t_1^{-2}$$

বা, $$n = \left(\frac{m_2}{m_1}\right) \times \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \times \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-2}$$

বা, $$n = \frac{10^3\,g}{1\,g} \times \frac{10^2\,cm}{1\,cm} \times \left(\frac{1\,s}{1\,s}\right)^{-2} \qquad [\because m_2 = 1\,kg,\ m_1 = 1\,g,\ l_2 = 1\,m,\ l_1 = 1\,cm,\ t_2 = 1\,s = t_1]$$

বা, $n = 10^5$

$\therefore$ 1 Newton = 10^5 dyne

অর্থাৎ Newton এককে প্রকাশিত কোনো মানকে dyne এককে পরিবর্তন করার রূপান্তর গুণক (conversion factor) হলো $\frac{10^5\,dyne}{1\,N}$

মাত্রা বিশ্লেষণ
Dimensional analysis

কোনো প্রাকৃতিক রাশির মাত্রাকে প্রাথমিক রাশিগুলোর মাত্রায় প্রকাশ করাকে মাত্রা বিশ্লেষণ বলে।

উদাহরণ : পারদের ঘনত্ব 13·6 g cm^{-3}। যদি ভর kg-তে এবং দৈর্ঘ্য m-এ পরিমাপ করা হয়, তবে নতুন একক পদ্ধতিতে পারদের ঘনত্ব কত ?

এখন, ঘনত্বের একক g cm^{-3}; সুতরাং এর মাত্রা হচ্ছে $[ML^{-3}]$

ধরা যাক, M_1, L_1 এবং M_2, L_2 যথাক্রমে g, cm এবং kg, m-কে প্রকাশ করে। অতএব, ওই দুই একক পদ্ধতিতে ঘনত্বের মাত্রা হবে $[M_1L_1^{-3}]$ এবং $[M_2L_2^{-3}]$। যদি ঘনত্বের সাংখ্যমান ওই দুই পদ্ধতিতে যথাক্রমে n_1 ও n_2 হয়, তবে লেখা যায়—

$$n_1 [M_1L_1^{-3}] = n_2 [M_2L_2^{-3}]$$

$$\therefore \quad n_2 = \frac{n_1 [M_1L_1^{-3}]}{[M_2L_2^{-3}]} = n_1 \times \left[\frac{M_1}{M_2}\right] \times \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{-3}$$

এখানে $n_1 = 13{\cdot}6$

$$\therefore \quad n_2 = 13{\cdot}6 \times \left[\frac{1\,g}{1\,kg}\right] \times \left[\frac{1\,cm}{1\,m}\right]^{-3}$$

$$= \left[\frac{1\,g}{1000\,g}\right] \times \left[\frac{1\,cm}{100\,cm}\right]^{-3}$$

$$= 13{\cdot}6 \times \frac{1}{1000} \times 1000000$$

$$= 13{\cdot}6 \times 10^3\,kgm^{-3}$$

গাণিতিক উদাহরণ ১.৩

১। একটি বস্তুর ওপর 50 N বল ক্রিয়া করলে ওই বলের মান ডাইন এককে প্রকাশ কর।

আমরা জানি, S.I. পদ্ধতিতে বলের একক নিউটন (N) এবং C.G.S. পদ্ধতিতে বলের একক ডাইন (dyne)

বলের মাত্রা সমীকরণ, $F = [MLT^{-2}]$

$$\therefore \quad n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^x \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^y \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^z$$

$$= 50 \left(\frac{kg}{g}\right)^1 \left(\frac{m}{cm}\right)^1 \left(\frac{s}{s}\right)^{-2}$$

$$= 50 \times 1000 \times 100 \times 1 = 5 \times 10^6 \text{ dyne}$$

২। যদি ত্বরণের একক $9{\cdot}8$ ms^{-2} এবং বেগের একক 3×10^8 ms^{-1} ধরা হয়, তা হলে সময়ের একক কী হবে?

আমরা জানি,

বেগের মাত্রা, $v = [LT^{-1}]$ এবং ত্বরণের মাত্রা, $a = [LT^{-2}]$

$$\therefore \quad T \text{ এর মাত্রা} = \frac{[v]}{[a]} = \frac{3 \times 10^8}{9{\cdot}8}$$

$$= 3{\cdot}06 \times 10^7 \text{ s}$$

৩। মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $\tau \propto \frac{nr^4}{l}$।

এখানে, τ = প্রতি একক পাকের জন্য মোচড় দ্বন্দ্ব, l = তারের দৈর্ঘ্য, r = তারের ব্যাসার্ধ এবং n = দৃঢ়তা গুণাঙ্ক

τ এর মাত্রা $= ML^2T^{-2}$, n এর মাত্রা $= ML^{-1}T^{-2}$, r ও l এর মাত্রা $= L$

অতএব, ডানপক্ষ $\frac{nr^4}{l}$-এর মাত্রা $= \frac{ML^{-1}T^{-2} \times L^4}{L}$

$= ML^2T^{-2}$ = বামপক্ষ

১.৮ সমীকরণের নির্ভুলতা যাচাই
Verification of accuracy of an equation

সমমাত্রিক নীতির সাহায্যে কোনো সমীকরণের উভয় দিকের মাত্রা বিশ্লেষণ করে আমরা একটি সমীকরণের মাত্রাগত নির্ভুলতা যাচাই করতে পারি।

উদাহরণ : একটি বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণটি মাত্রাগতভাবে নির্ভুল কি না যাচাই করা হোক।

এখন, s-এর মাত্রা $= L$, u-এর মাত্রা $= LT^{-1}$, সময় t-এর মাত্রা $= T$ এবং a-এর মাত্রা $= LT^{-2}$

অতএব, বামদিকের মাত্রা $= L$ এবং ডানদিকের দুটি রাশির মাত্রা ut এবং $\frac{1}{2}at^2$

ut-এর মাত্রা $= LT^{-1} \times T = L$ এবং

$\frac{1}{2}at^2$-এর মাত্রা $= 1 \times LT^{-2} \times T^2 = L$

সুতরাং সমীকরণটির ডানদিকের মাত্রা $= L$

অতএব, বামদিকের মাত্রা = ডানদিকের মাত্রা

অর্থাৎ সমীকরণটি মাত্রাগতভাবে নির্ভুল।

১.৯ বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির মধ্যে সম্পর্কযুক্ত যথাযথ সমীকরণ গঠন
Formation of appropriate equation using relation of different physical quantities

সমমাত্রিক নীতির সাহায্যে বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায়। কোনো ভৌত রাশি যেসব বিষয়ের ওপর নির্ভরশীল তা জানা থাকলে ওই রাশিকে ওই সমস্ত বিষয়গুলোর সাথে সম্পর্কযুক্ত একটি সমীকরণ প্রকাশ করা যায়। তবে খেয়াল রাখতে হবে যেন সমীকরণের উভয় পার্শ্বের মাত্রা অবশ্যই সমান হয়। বিষয়টি কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করা হলো।

উদাহরণ ১। একটি ছোটো ভারী বস্তুকে একটি নগণ্য ভরের অপ্রসারণযোগ্য সুতা দিয়ে বেঁধে ঝুলিয়ে দিলে সরল দোলক তৈরি হয়। আমরা জানি, এর দোলনকাল T নির্ভর করে ববের ভর m, দোলকের দৈর্ঘ্য l এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর ওপর। এখন এদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

ধরা যাক সম্পর্কটি হলো,

$$T = Km^x l^y g^z \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1.1)$$

এখানে K হলো মাত্রাহীন ধ্রুবক এবং x, y ও z হলো সংখ্যা সূচক।

এখন T-এর মাত্রা $= t$, m-এর মাত্রা = M, l-এর মাত্রা = L ও g-এর মাত্রা $= LT^{-2}$।

এই মাত্রাগুলো সমীকরণ (1.1) এ বসিয়ে পাই,

$$T = 1 \,.\, M^x L^y (LT^{-2})^z$$

বা, $$M^0L^0T^1 = M^x L^{y+z} T^{-2z} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1.2)$$

সমীকরণ (1.2)-এর উভয় দিকের মাত্রা তুলনা করা যায়।

ভরের মাত্রা থেকে পাওয়া যায়, $x = 0$

সময়ের মাত্রা থেকে পাওয়া যায়, $1 = -2z$

সুতরাং $z = -\frac{1}{2}$

দৈর্ঘ্যের মাত্রা থেকে পাওয়া যায়, $0 = y + z$

বা, $y = -z = \frac{1}{2}$

এই মানগুলোকে সমীকরণ (1.1)-এ বসিয়ে পাই,

$$T = Km^0 l^{1/2} g^{-\frac{1}{2}}$$

বা, $$T = K\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1.3)$$

এই সম্পর্ক থেকে বোঝা যায় যে, (ক) m-এর ওপর T নির্ভর করে না (খ) $T \propto \sqrt{l}$ এবং (গ) $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$। এগুলোই হচ্ছে সরল দোলকের সূত্রাবলি।

উল্লেখ্য, K ধ্রুবকটির মান মাত্রা বিশ্লেষণ থেকে জানা যায় না।

উদাহরণ ২। r ব্যাসার্ধের একটি গোলক η সান্দ্রতাঙ্কবিশিষ্ট একটি তরলের মধ্যদিয়ে v প্রান্তিক বেগে পতনশীল। গোলকটির ওপর সান্দ্রতাজনিত ঊর্ধ্বমুখী সান্দ্র বল F নির্ণয় কর। সান্দ্র বল F গোলকটির ব্যাসার্ধ r, তরলের সান্দ্রতাঙ্ক η, প্রান্তিক বেগ v-এর ওপর নির্ভরশীল।

ধরা যাক সান্দ্র বল, $F = Kr^x\eta^y v^z$

আমরা জানি, F-এর মাত্রা MLT^{-2}, η-এর মাত্রা $ML^{-1}T^{-1}$, v-এর মাত্রা LT^{-1} এবং r-এর মাত্রা L

$\therefore \quad MLT^{-2} = L^x [ML^{-1}T^{-1}]^y [LT^{-1}]^z \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad$ (i)

সমীকরণ (i)-এর উভয় পার্শ্বের দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়ের মাত্রা তুলনা করে পাই,

$x - y + z = 1$, $y = 1$ এবং $-y - z = -2$

এই তিনটি সমীকরণ সমাধান করে পাই,

$x = 1$, $y = 1$ এবং $z = 1$

$\therefore \quad F = Kr\eta v$

পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে K-এর মান পাওয়া যায় $K = 6\pi$

$\therefore \quad F = 6\pi r\eta v$; এটি স্টোকসের সূত্র নামে পরিচিত।

উদাহরণ ৩। একটি টানা তারের আড় কম্পাঙ্ক (n), তারের টান (T), তারের দৈর্ঘ্য (l) এবং তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর (m)-এর ওপর নির্ভর করে। তারের কম্পাঙ্কের সাথে অন্যান্য রাশিগুলোর সম্পর্ক স্থাপন কর।

মনে করি সম্পর্কটি হলো,

$$n \propto T^x l^y m^z = KT^x l^y m^z \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (i)$$

এখন n-এর মাত্রা T^{-1}, টান T-এর মাত্রা = বলের মাত্রা

$= MLT^{-2}$, l-এর মাত্রা = [L] এবং m-এর মাত্রা $= [ML^{-1}]$

$$\therefore \quad [T^{-1}] = [MLT^{-2}]^x [L]^y [ML^{-1}]^z$$
$$= [M^{x+z} L^{x+y-z} T^{-2x}] \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (ii)$$

সমীকরণ (ii)-এর উভয় দিকের মাত্রা তুলনা করে পাই,

$x + z = 0$ $\qquad$ $x + y - z = 0$

বা, $x = -z$ $\qquad$ বা, $-z + y - z = 0$

আবার, $-2x = -1$ $\qquad$ বা, $y = 2z$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}$

বা, $z = -\frac{1}{2}$, $y = 2 \times -\frac{1}{2} = -1$

সমীকরণ (i)-এ x, y ও z-এর মান বসিয়ে পাই,

$$n = KT^{\frac{1}{2}} l^{-1} m^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

পরীক্ষার ফলাফল থেকে K-এর মান পাওয়া যায়, $K = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

উদাহরণ ৪। গতিবেগ (v), সময় (T) এবং বল (F)-কে যদি মৌলিক রাশি ধরা হয়, তবে ভরের মাত্রা কী হবে ?

আমরা জানি,

গতিবেগের মাত্রা, $[v] = LT^{-1}$, সময়ের মাত্রা, $[t] = T$, বলের মাত্রা, $[F] = MLT^{-2}$

এই তিনটি রাশি থেকে L ও T অপনয়ন (elimination) করলে ভরের মাত্রা M পাওয়া যায়

অতএব ভরের মাত্রা, $[m] = M = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1} \times T^{-1}} = \frac{[F]}{[v]\,[t]^{-1}}$

$$= [F]\,[v]^{-1}[t] = Fv^{-1}T$$

অর্থাৎ, গতিবেগ, সময় ও বলকে যদি মৌলিক রাশি ধরা হয়, তবে ভরের মাত্রা = $Fv^{-1}T$

উদাহরণ ৫। গ্রহ সূর্যের চারদিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। যদি পর্যায়কাল, T (i) কক্ষের ব্যাসার্ধ, r (ii) সূর্যের ভর, M এবং (iii) মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, G-এর ওপর নির্ভর করে, তা হলে দেখাও যে, গ্রহগুলো কেপলারের তৃতীয় সূত্র মেনে চলে; অর্থাৎ দেখাও যে, $T^2 \propto r^3$।

এখানে, $T \propto r$, $T \propto M$ এবং $T \propto G$

$\therefore \quad T \propto rMG$ বা, $T = Kr^x M^y G^z$

এবং বল, $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

বা, $G = \frac{\text{বল} \times (\text{দূরত্ব})^2}{(\text{ভর})^2}$

$\therefore \quad G = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}$

$$\therefore \quad T = [L]^x\,[M]^y\,[M^{-1}L^3T^{-2}]^z = M^{y-z}L^{x+3z}T^{-2z} \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

এখন সমীকরণ (i)-এর উভয় পক্ষের T, M, L-এর মাত্রা সমান ধরে পাই,

$y - z = 0;\ x + 3z = 0$

বা, $-2z = 1 \ \therefore\ z = -\frac{1}{2}$

$\therefore \quad y = -\frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2} \left[\because z = -\frac{1}{2}\right]$

$\therefore \quad T = Kr^{3/2}M^{-\frac{1}{2}}G^{-1/2}$

$\therefore \quad T^2 = K^2\frac{r^3}{MG} = \frac{K^2}{GM}r^3 \propto r^3$

এখানে সূর্যের ভর M এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G

সুতরাং, $T^2 \propto r^3$ (প্রমাণিত)

মাত্রা সমীকরণের সীমাবদ্ধতা
Limitations of dimensional equation

মাত্রা সমীকরণের বহুল প্রয়োগ থাকলেও এর কিছু সীমাবদ্ধতা রয়েছে, যেমন—

(১) কোনো সম্পর্ক বা সমীকরণে উপস্থিত ধ্রুবকের মান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যেমন: সরল দোলনকাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, সম্পর্কটির ধ্রুবক 2π মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

(২) কোনো সমীকরণে যদি মাত্রাযুক্ত ধ্রুবক থাকে, তবে সম্পর্কটি নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যেমন নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রে, $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ সমীকরণটিতে G হলো মাত্রাযুক্ত ধ্রুবক। এর উপস্থিতির জন্য মাত্রা বিশ্লেষণের মাধ্যমে সম্পর্কটি নির্ণয় করা যায় না।

(৩) কোনো সম্পর্কে যদি একটি মাত্রাহীন রাশি থাকে তবে সম্পর্কটির অবশিষ্ট রাশিগুলোর সঙ্গে মাত্রাহীন রাশিটির সম্পর্ক মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব নয়। যেমন বল F দ্বারা কোনো বস্তুর ওপর কৃত কাজ W বল ও সরণের মান এবং বল ও সরণের দিকের মধ্যবর্তী কোণের ওপর করে। অর্থাৎ $W = Fs\cos\theta$। এখন θ মাত্রাহীন রাশি হওয়ায় সম্পর্কটি মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

(৪) কেবল L, M ও T এই তিনটি মৌলিক রাশির ওপর ভিত্তি করে আমরা মাত্রা সমীকরণ গঠন করি। কিন্তু কোনো অজ্ঞাত রাশি যদি এই তিন রাশি অপেক্ষা বেশি রাশির ওপর নির্ভরশীল হয়, তবে সেই অজ্ঞাত রাশির মাত্রা সমীকরণ আমরা গঠন করতে পারি না। যেমন তাপ পরিবাহিতাঙ্কের মাত্রা সমীকরণ কেবল L, M ও T দ্বারা প্রকাশ করা যায় না, কারণ এটি আরও একটি রাশি যা তাপমাত্রার ওপর নির্ভরশীল।

(৫) এ ছাড়া মাত্রিক পদ্ধতিতে কোনো মাত্রাবিহীন রাশি যথা 'ধ্রুবক'-এর মান বের করা যায় না।

(৬) যে সমস্ত সমীকরণে সূচকীয়, ত্রিকোণমিতিক (যেমন $\sin\theta$, $\cos\theta$ ইত্যাদি) এবং লগারিদমিক রাশি থাকে সেই সমস্ত সমীকরণকে মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে প্রতিষ্ঠা করা যায় না।

(৭) মাত্রা বিশ্লেষণ পদ্ধতি স্কেলার ও ভেক্টর রাশি চিহ্নিত করতে পারে না।

(৮) একই মাত্রার প্রাকৃতিক রাশি একই নাও হতে পারে। যেমন টর্ক, কাজ এবং শক্তি—এদের মাত্রা একই অর্থাৎ $[ML^2T^{-2}]$। কিন্তু এরা একই প্রকৃতির রাশি নয়। কাজ ও শক্তি স্কেলার রাশি, পক্ষান্তরে টর্ক ভেক্টর রাশি।

কয়েকটি প্রাকৃতিক রাশি, সম্পর্ক, মাত্রা ও এস.আই. একক

All

ক্রমিক নম্বর	প্রাকৃতিক রাশি	সম্পর্ক	মাত্রা	এস. আই. একক
১।	দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা, ব্যাসার্ধ, সরণ, দূরত্ব ইত্যাদি (Length, width, height, radius, displacement, distance etc.)		[L]	মিটার (m)
২।	ভর (mass)		[M]	কিলোগ্রাম (kg)
৩।	সময় (time)		[T]	সেকেন্ড (s)
৪।	ক্ষেত্রফল (area)	$(\text{দৈর্ঘ্য})^2$	$[L^2]$	m^2
৫।	আয়তন (volume)	$(\text{দৈর্ঘ্য})^3$	$[L^3]$	m^3
৬।	ঘনত্ব (density)	$\frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}}$	$[ML^{-3}]$	kgm^{-3}
৭।	গতিবেগ (velocity)	$\frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}}$	$[LT^{-1}]$	ms^{-1}
৮।	ত্বরণ (acceleration)	$\frac{\text{বেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$	$[LT^{-2}]$	ms^{-2}
৯।	বল (force)	ভর × ত্বরণ	$[MLT^{-2}]$	নিউটন (N)
১০।	চাপ (pressure) [MAT: 19-20]	$\frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$	পাসক্যাল (Pa) $= Nm^{-2}$

ক্রমিক নম্বর	প্রাকৃতিক রাশি	সম্পর্ক	মাত্রা	এস. আই. একক
১১।	কার্য বা শক্তি (work or energy) [DAT: 20-21]	বল × সরণ	$[ML^2T^{-2}]$	জুল (J)
১২।	ক্ষমতা (power)	$\frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}}$	$[ML^2T^{-3}]$	ওয়াট (W)
১৩।	ভরবেগ (momentum)	ভর × গতিবেগ	$[MLT^{-1}]$	$kgms^{-1}$
১৪।	বলের ঘাত (impulse of force)	বল × সময়	$[MLT^{-1}]$	$kgms^{-1}$
১৫।	বলের ভ্রামক (moment of force)	বল × দূরত্ব	$[ML^2T^{-2}]$	kgm^2s^{-2}
১৬।	জড়তার ভ্রামক (moment of inertia)	ভর × (দূরত্ব)^2	$[ML^2]$	kgm^2
১৭।	চক্রগতির ব্যাসার্ধ (radius of gyration)	$\left(\frac{\text{জড়তার ভ্রামক}}{\text{ভর}}\right)^{\frac{1}{2}}$	$[L]$	m
১৮।	কোণ (angle)	$\frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$	মাত্রাহীন রাশি	রেডিয়ান (rad)
১৯।	ঘনকোণ (solid angle)	$\frac{\text{ক্ষেত্রফল}}{(\text{দূরত্ব})^2}$	মাত্রাহীন রাশি	স্টেরেডিয়ান (steradian)
২০।	মহাকর্ষীয় প্রাবল্য (gravitational intensity)	$\frac{\text{বল}}{\text{ভর}}$	$[LT^{-2}]$	Nkg^{-1}
২১।	মহাকর্ষীয় বিভব (gravitational potential)	$\frac{\text{কাজ}}{\text{ভর}}$	$[L^2T^{-2}]$	Jkg^{-1}
২২।	কৌণিক ভরবেগ (angular momentum)	রৈখিক ভরবেগ × দূরত্ব	$[ML^2T^{-1}]$	kgm^2s^{-1}
২৩।	বেগের নতিমাত্রা (velocity gradient)	$\frac{\text{বেগের পরিবর্তন}}{\text{দূরত্ব}}$	$[T^{-1}]$	s^{-1}
২৪।	পীড়ন (stress)	$\frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$	$kgm^{-1}s^{-2}$ বা Nm^{-2}
২৫।	বিকৃতি (strain)	$\frac{\text{দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন}}{\text{প্রাথমিক দৈর্ঘ্য}}$	মাত্রাহীন	—
২৬।	স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক (modulus of elasticity)	$\frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}$	$[ML^{-1}T^{-2}]$	Nm^{-2}
২৭।	পয়সন অনুপাত (Poisson's ratio)	$\frac{\text{পার্শ্বীয় বিকৃতি}}{\text{অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$	মাত্রাহীন	—
২৮।	অভিকর্ষজ ত্বরণ (acceleration due to gravity)	$\frac{\text{মহাকর্ষীয় ধ্রুবক} \times \text{পৃথিবীর ভর}}{(\text{পৃথিবীর ব্যাসার্ধ})^2}$	$[LT^{-2}]$	ms^{-2}
২৯।	পৃষ্ঠটান (surface tension)	$\frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$	$[MT^{-2}]$	Nm^{-1} বা kgs^{-2}

RMDAC

ক্রমিক নম্বর	প্রাকৃতিক রাশি	সম্পর্ক	মাত্রা	এস. আই. একক
৩০।	সান্দ্রতাঙ্ক (co-efficient of viscosity)	বল/ক্ষেত্রফল ÷ বেগের পরিবর্তন/দূরত্ব	$[ML^{-1}T^{-1}]$	Nsm^{-2} বা Pas^{-1}
৩১।	আপেক্ষিক গুরুত্ব (specific gravity)	বস্তুর ভর ÷ সমআয়তন পানির ভর	মাত্রাহীন রাশি	—
৩২।	কম্পাঙ্ক (frequency)	ঘটনা সংখ্যা ÷ সময়	$[T^{-1}]$	Hertz (Hz) $= s^{-1}$
৩৩।	পর্যায়কাল (time period)	সময়	$[T]$	s
৩৪।	তাপ (heat)	—	—	J
৩৫।	তাপমাত্রা (temperature)	—	$[\theta]$	কেলভিন (K)
৩৬।	আপেক্ষিক তাপ (specific heat)	তাপশক্তি ÷ ভর × তাপমাত্রার পার্থক্য	$[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$	$Jkg^{-1}K^{-1}$
৩৭।	লীন তাপ (latent heat)	তাপশক্তি ÷ ভর	$[L^2T^{-2}]$	Jkg^{-1}
৩৮।	তাপ ধারকত্ব (thermal capacity)	শোষিত তাপশক্তি ÷ তাপমাত্রা বৃদ্ধি	$[MKL^2T^{-2}\theta^{-1}]$	JK^{-1}
৩৯।	তাপ পরিবাহিতাঙ্ক (thermal conductivity)	তাপশক্তি × বেধ ÷ ক্ষেত্রফল × তাপমাত্রার পার্থক্য × সময়	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$	$Wm^{-1}K^{-1}$
৪০।	তাপমাত্রার নতিমাত্রা (temperature gradient)	তাপমাত্রার পরিবর্তন ÷ দূরত্ব	$[\theta L^{-1}]$	$m^{-1}K$
৪১।	এনট্রপি (entropy)	তাপ ÷ উষ্ণতা	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$	JK^{-1}
৪২।	মোলার গ্যাস ধ্রুবক (molar gas constant)	কাজ বা শক্তি ÷ মোল সংখ্যা × উষ্ণতা	$[ML^2T^2]$	$Jmole^{-1}K^{-1}$
৪৩।	টর্ক (torque)	বল × বাহুর দৈর্ঘ্য	$[ML^2T^{-2}]$	Nm
৪৪।	বোলজম্যান ধ্রুবক (Boltzmann's constant)	শক্তি ÷ উষ্ণতা	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$	JK^{-1}
৪৫।	তড়িৎ আধান (electric charge)	তড়িৎ প্রবাহমাত্রা × সময়	$[IT]$	কুলম্ব (C)
৪৬।	তড়িৎ প্রবাহমাত্রা (electric current)	—	$[I]$	অ্যাম্পিয়ার (A)
৪৭।	তড়িৎ বিভব (electric potential)	কাজ ÷ আধান	$[ML^2T^{-3}I^{-1}]$	JC^{-1}
৪৮।	তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য (electric field intensity)	বল ÷ আধান	$[MLT^{-3}I^{-1}]$	NC^{-1} বা Vm^{-1}
৪৯।	প্রবাহ ঘনত্ব (current density)	প্রবাহমাত্রা ÷ প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল	$[IL^{-2}]$	Am^{-2}

ক্রমিক নম্বর	প্রাকৃতিক রাশি	সম্পর্ক	মাত্রা	এস. আই. একক
৫০।	তড়িৎ রোধ (electric resistance)	$\frac{\text{ক্ষমতা}}{(\text{প্রবাহমাত্রা})^2}$	$[ML^2T^{-3}I^{-2}]$	ohm (Ω)
৫১।	তড়িৎ রোধাঙ্ক (electrical resistivity)	$\frac{\text{তড়িৎ রোধ} \times \text{প্রস্থচ্ছেদ}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$	$[ML^3T^{-3}I^{-2}]$	ohm-m
৫২।	তড়িৎ দ্বিমেরু ভ্রামক (electric dipole moment)	আধান × দূরত্ব	[ITL]	C-m
৫৩।	ধারকত্ব (capacitance)	$\frac{\text{আধান}}{\text{বিভব পার্থক্য}}$	$[M^{-1}L^{-2}T^4I^2]$	Farad (F)
৫৪।	স্টিফান ধ্রুবক (Stefan's constant)	$\frac{\text{বিকীর্ণ তাপ}}{\text{ক্ষেত্রফল} \times \text{সময়} \times (\text{উষ্ণতা})^4}$	$MLT^{-3}\theta^{-4}$	$Wm^{-2}K^{-4}$
৫৫।	চৌম্বক মেরুশক্তি (magnetic pole strength)	$\frac{\text{চৌম্বক ভ্রামক}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$	$[IL^{-1}]$	A-m
৫৬।	স্বাবেশাঙ্ক (self inductance)	$\frac{\text{বিভব পার্থক্য}}{\text{প্রবাহমাত্রা পরিবর্তনের হার}}$	$[ML^2T^{-2}I^{-2}]$	henry (H)
৫৭।	চৌম্বক দ্বিমেরু ভ্রামক (magnetic dipole moment)	$\frac{\text{প্রবাহমাত্রা} \times \text{ক্ষেত্রফল}}{\text{চৌম্বক দৈর্ঘ্য} \times \text{মেরু শক্তি}}$	$[IL^2]$	$A\text{-}m^2$
৫৮।	চৌম্বক প্রবাহ ঘনত্ব (magnetic flux density)	$\frac{\text{বল}}{\text{প্রবাহমাত্রা} \times \text{দৈর্ঘ্য}}$	$[MT^2I^{-1}]$	Wbm^{-2} (Tesla)
৫৯।	চৌম্বক ফ্লাক্স (magnetic flux)	চৌম্বক প্রবাহ ঘনত্ব × ক্ষেত্রফল	$[ML^2T^{-2}I^{-1}]$	Wb
৬০।	কৌণিক বেগ (angular velocity)	ω	$[T^{-1}]$	rad s^{-1}
৬১।	কৌণিক ত্বরণ (angular acceleration)	α	$[T^{-2}]$	$rads^{-2}$
৬২।	পৃষ্ঠ শক্তি (surface energy)	E	$[MT^{-2}]$	Jm^{-2} বা Nm^{-1}
৬৩।	তরঙ্গের তীব্রতা (intensity of wave)	শক্তি ঘনত্ব × তরঙ্গ বেগ	$[MLT^{-3}]$	$Jm^{-2}s^{-1}$ বা Wm^{-2}

গাণিতিক উদাহরণ ১.৪

১। নিউটনের সূত্র অনুসারে গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v = \sqrt{\frac{P}{D}}$, এখানে P = গ্যাসীয় চাপ, এবং D = ঘনত্ব। মাত্রা বিবেচনায় সমীকরণটি সঠিক কি না—যাচাই কর।

বামপক্ষ, $v = [LT^{-1}]$

ডানপক্ষ, $\sqrt{\frac{P}{D}} = \left[\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$= [LT^{-1}]$

সুতরাং, মাত্রা বিবেচনায় সমীকরণটি সঠিক।

২। মাত্রা বিবেচনায় দেখাও যে, নিচের সমীকরণটি সঠিক।

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

বামপক্ষ, $Fs = [MLT^{-2}] \times [L] = [ML^2T^{-2}]$

ডানপক্ষ, $\frac{1}{2}mv^2 = [M]\,[LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$

$\frac{1}{2}mu^2 = [M]\,[LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$

সুতরাং, মাত্রা বিবেচনায় সমীকরণটি সঠিক।

১.১০ পরিমাপের মূলনীতি
Basic principle of measurements

আমরা জানি কোনো কিছুর মাপ-জোখের নাম পরিমাপ। পরিমাপ ছাড়া কোনো রাশি সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান লাভ করা সম্ভব নয়। প্রকৃত প্রস্তাবে পদার্থবিজ্ঞানের মূল ভিত্তি হলো বিভিন্ন রাশির পরিমাপ গ্রহণ। এজন্য পদার্থবিজ্ঞানকে **পরিমাপবিজ্ঞান** বলে।

কোনো রাশি সম্বন্ধে আমরা দুভাবে জ্ঞান লাভ করতে পারি—একটি **গুণগত** ও অন্যটি **পরিমাণগত**। বস্তু ও শক্তির বৈশিষ্ট্যকে আমরা ইন্দ্রিয়াদির সাহায্যে অনুভব করতে পারি ও ভাষায় প্রকাশ করতে পারি। বস্তু ও শক্তি সম্বন্ধে এটাই আমাদের গুণগত জ্ঞান। কিন্তু এদের সম্বন্ধে পরিমাণগত জ্ঞান লাভ করতে হলেই পরিমাপের একান্ত প্রয়োজন এবং এই পরিমাপের জন্য মাপকাঠির আবশ্যক।

কোনো একটি প্রাকৃতিক রাশি পরিমাপ করতে হলে তার একটি নির্দিষ্ট ও সুবিধাজনক অংশ বা খণ্ডকে আদর্শ (Standard) হিসেবে ধরে নিয়ে সেই রাশির পরিমাপ করা হয় এবং সর্বত্র ওই নির্দিষ্ট অংশেরই প্রচলন করা হয়। পরিমাপের এই আদর্শকে ওই রাশির একক বা মাপকাঠি বলে। যদি বলা হয় একটি কামরা 20 মিটার লম্বা, তবে আমরা বুঝি যে **মিটার** নামক একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে আদর্শ হিসেবে ধরে নেয়া হয়েছে, যার তুলনায় কামরাটি 20 গুণ লম্বা। আবার যদি বলা হয় একটি বস্তুর ভর 10 কিলোগ্রাম, তবে বুঝতে হবে যে, **কিলোগ্রাম** নামক একটি নির্দিষ্ট ভরকে আদর্শ হিসেবে ধরে নেয়া হয়েছে যার তুলনায় বস্তুর মোট ভর 10 গুণ। সুতরাং **একটি রাশির মধ্যে তার একক যতবার থাকবে সেই সংখ্যাই হবে ওই রাশির মাপ নির্দেশক এবং যেকোনো রাশির পরিমাপ নিতে হলে দুটি জিনিসের প্রয়োজন। একটি হলো সংখ্যা, অপরটি হলো একক।** একটি ছাড়া অপরটি অর্থহীন। যেমন রেশন ব্যাগে 10 কিলোগ্রাম চাউল আছে। এখানে ভর একটি রাশি, '10' একটি সংখ্যা এবং 'কিলোগ্রাম' একক। কিন্তু যদি বলা যায় রেশন ব্যাগে চাউলের ভর 10, তবে তার কোনো অর্থ হয় না। শুধু সংখ্যা দ্বারা রাশি প্রকাশ করা যায় না, এককও বলতে হয়। সুতরাং

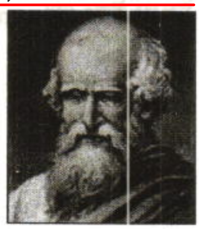
রাশির মাপ = সংখ্যা × একক। এটিই হলো পরিমাপের মূলনীতি।

১.১১ পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষণের ক্রমবিকাশ এবং গুরুত্ব
Successive development of observations and experiments and their importance

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির যে সমৃদ্ধি আজ আমরা প্রত্যক্ষ করছি তা যুগে যুগে বিজ্ঞানীদের বিভিন্ন ক্ষেত্রে অবদানের ফসল। প্রাচীনকালে ভৌত বিজ্ঞানের বিকাশে গ্রিকদের একচ্ছত্র আধিপত্য ছিল। থেলেস (Thales খ্রি. পূ. 622–569) সূর্যগ্রহণ সম্পর্কে ভবিষ্যদ্বাণীর জন্য বিখ্যাত। বিভিন্ন পর্যবেক্ষণে, উদ্ভাবনে এবং বিজ্ঞানের ক্রমবিকাশের অগ্রযাত্রায় যাদের অবদান চিরস্মরণীয় এমন কয়েকজন বরেণ্য বিজ্ঞানীদের অবদান সম্বন্ধে আলোচনা করা হলো।

পিথাগোরাস (খ্রি. পূ. 560–480) : পিথাগোরাস জ্যোতির্বিদ্যা, গণিত, শব্দবিজ্ঞান বিষয়ে অবদানের জন্য বিখ্যাত। তিনি এবং তাঁর অনুসারীরা বিশ্বাস করতেন যে, গাণিতিক সূত্রের সাহায্যে সবকিছুই প্রকাশ করা যেতে পারে। খ্রি. পূ. চতুর্থ শতকে **ইউক্লিড** (Euclid) জ্যামিতি ও আলোকবিজ্ঞানের অনেক মূল্যবান গবেষণালব্ধ তথ্য প্রদান করেন।

আর্কিমিডিস (খ্রি. পূ. 287–212) : খ্রি. পূ. তৃতীয় শতকে **আর্কিমিডিস (Archimedes) লিভারের নীতি ও উদস্থিতিবিদ্যার সূত্র আবিষ্কার করেন। তিনি ধাতুর ভেজাল নির্ণয়, গোলকীয় দর্পণের সাহায্যে সূর্য রশ্মি কেন্দ্রীভূত করে আগুন ধরানোর কৌশল উদ্ভাবন করেন।** লিভারের নীতিসহ কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল ঊর্ধ্বমুখী বলের সূত্রও তিনি আবিষ্কার করেন।



বিজ্ঞানের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে, আর্কিমিডিসের পরে কয়েক শতাব্দী বিজ্ঞানের তেমন কোনো উল্লেখযোগ্য উন্নতি হয়নি। এ সময়ে বিজ্ঞান চর্চায় এক ধরনের স্থবিরতা লক্ষ করা যায়।

আধুনিক বিজ্ঞানের ক্রমবিকাশের ধারা শুরু
Beginning of successive development of modern science

গ্যালিলিও (Galileo 1564—1642) : 1589 খ্রিস্টাব্দে ইতালির গণিতবিদ ও পদার্থ বিজ্ঞানী গ্যালিলিও (Galileo) **মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর বিভিন্ন তথ্য-উপাত্ত সংগ্রহ করে তিনটি সূত্র আবিষ্কার করেন।** এগুলোকে পড়ন্ত বস্তুর সূত্র বলা হয়। তিনি স্থিতিবিদ্যা ও গতিবিদ্যার ওপর যথেষ্ট অবদান রাখেন। **তাঁর হাত ধরেই আধুনিক বিজ্ঞানের সূচনা হয়।**

1610 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী গ্যালিলিও যৌগিক অণুবীক্ষণ যন্ত্র আবিষ্কার করেন। এই যন্ত্রের সাহায্যে অতি ক্ষুদ্র বস্তুকে বহুগুণে বিবর্ধিত করে দেখা যায়। এটি সরল অণুবীক্ষণ যন্ত্র অপেক্ষা অধিক বিবর্ধন ক্ষমতার অধিকারী। **গ্যালিলিও দূরবীক্ষণ যন্ত্রও আবিষ্কার করেন।** 1610 খ্রিস্টাব্দে তিনি নব আবিষ্কৃত দূরবীক্ষণ যন্ত্র (Telescope) ব্যবহার করে বৃহস্পতি গ্রহের ৪টি উপগ্রহ আবিষ্কার করেন। **তিনি পানি উত্তোলনের যন্ত্র, উদস্থিতি নিক্তি, বায়ু থার্মোস্কোপ আবিষ্কার করেন।** সর্বকালের শ্রেষ্ঠ বিজ্ঞানী আইনস্টাইন গ্যালিলিওকে আধুনিক বিজ্ঞানের চমক হিসেবে আখ্যায়িত করেছেন। তিনি সরণ, গতি, ত্বরণ, সময়ের সংজ্ঞা প্রদানসহ পড়ন্ত বস্তুর সূত্র আবিষ্কার করেন। **তিনি পড়ন্ত বস্তুর সূত্র প্রদান করেন** এবং দেখান যে পড়ন্ত বস্তুর দ্রুতি এর ভরের ওপর নির্ভরশীল নয়। তিনি সৃতিবিদ্যার (Kinematics) ভিত্তি স্থাপন করেন।

নিউটন (Newton, 1642—1727) : বস্তু কেন মাটিতে পড়ে ? মহাবিশ্বে সূর্য, চন্দ্র, গ্রহ, নক্ষত্র ইত্যাদির গতিবিধি সম্পর্কেও প্রাচীনকাল থেকেই মানুষের কৌতূহল ছিল। সপ্তদশ শতাব্দী পর্যন্ত মানুষের ধারণা ছিল যে বস্তুর মাটিতে পতিত হওয়া বস্তুর স্বাভাবিক ঘটনা। তিনি স্বর্গীয় বস্তুসমূহের গতিবিধি সম্পর্কে প্রথমে মতবাদ ব্যক্ত করেন। দ্বিতীয় শতাব্দীর দিকে গ্রিক জ্যোতির্বিদ টলেমি ভূ-কেন্দ্রিক তত্ত্ব উপস্থাপন করেন। এই তত্ত্ব অনুসারে স্থির পৃথিবীকে কেন্দ্র করে সূর্য, চন্দ্র, গ্রহ, নক্ষত্র আবর্তনরত। পঞ্চদশ শতাব্দীতে

[MAT: 18-19] **জ্যোতির্বিদ কোপারনিকাস 'সূর্যকেন্দ্রিক' তত্ত্ব দেন।** এই তত্ত্বে সূর্যকে মহাজগতের কেন্দ্রে স্থির বিবেচনা করা হয়েছে এবং অন্যান্য গ্রহ সূর্যকে কেন্দ্র করে আবর্তন করে। কোপারনিকাসের ধারণা ছিল গ্রহগুলোকে সূর্যের চারদিকে ঘুরতে বাধ্য করে চৌম্বক বল। পঞ্চদশ শতাব্দীতে **কেপলার গ্রহ-নক্ষত্রের গতিপথের** বিভিন্ন উপাত্ত বিশ্লেষণ করে স্থির সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, গ্রহগুলোর গতিপথ বৃত্তাকার নয়, উপবৃত্তাকার। 1658 খ্রিস্টাব্দে নিউটন বল সম্পর্কে ধারণা লাভের জন্য তার বিখ্যাত পরীক্ষাটি করেন। তিনি বাতাসের অনুকূলে ও প্রতিকূলে লাফ দিয়ে দূরত্বের পার্থক্য পর্যবেক্ষণ করেন। **1665 সালে ক্যামব্রিজে পড়ার সময় তিনি মহাকর্ষ বলের তত্ত্ব, ক্যালকুলাস ও আলোর বর্ণালি এই তিনটি সূত্র আবিষ্কার করেন।**

গ্রহপুঞ্জের গতির মধ্যে কেপলার কিছু নিয়মনীতি খুঁজে পান এবং এই নিয়মনীতিগুলোকে তিনটি সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করেন। এগুলো **কেপলারের সূত্র** নামে পরিচিত। কিন্তু কোপারনিকাসের চৌম্বক বলের ধারণার সঙ্গে কেপলার কোনোভাবেই উপবৃত্তাকার প্রকল্প মিলাতে পারছিলেন না। সূর্যকে কেন্দ্র করে গ্রহগুলোর আবর্তন করার সন্তোষজনক কোনো কারণ তিনি দিতে পারেননি। তা ছাড়া একটি বস্তু কেন মাটিতে পতিত হয় তার ব্যাখ্যাও কেপলারের সূত্র থেকে পাওয়া যায় না। এসব প্রশ্নের ব্যাখ্যা পাওয়া যায় 1687 **খ্রিস্টাব্দে স্যার আইজ্যাক নিউটনের 'ফিলোসোফিয়া ন্যাচারালিস প্রিন্সিপিয়া ম্যাথমেটিকস'** *(Philosophiae Naturalis Principia Mathematics)* **গ্রন্থটি প্রকাশিত হওয়ার পর।** তিনি এই বইয়ে বস্তুপিণ্ডগুলো কী করে চলাচল করে, গাণিতিক বিশ্লেষণসহ তার তত্ত্ব প্রকাশ করেন। এ ছাড়াও তিনি মহাকর্ষীয় বিধি উপস্থাপন করেন। তিনি দেখান যে উপবৃত্তাকার কক্ষে চন্দ্রের পৃথিবী প্রদক্ষিণ করার এবং সূর্যের চারদিকে গ্রহগুলোর উপবৃত্তাকার পথে ভ্রমণের কারণও এই মহাকর্ষ।

আলোকবিদ্যা ও গণিতেও নিউটনের অবদান অপরিসীম। তিনি বলবিদ্যার এবং লেন্সের সূত্রের প্রবর্তক এবং প্রতিফলক টেলিস্কোপেরও আবিষ্কারক।

তিনি আলোর কণিকা তত্ত্বের প্রবক্তা। এই তত্ত্ব অনুযায়ী যেকোনো দীপ্ত বস্তু (Luminous body) হতে অনবরত অসংখ্য ক্ষুদ্র কণিকা ঝাঁকে ঝাঁকে নির্গত হয়। এই কণিকা তত্ত্বের সাহায্যে তিনি আলোর বিভিন্ন গুণাগুণ সম্পর্কীয় বিভিন্ন ঘটনা ব্যাখ্যা করতে সক্ষম হন। আলোর সরলপথে গমন, আলোর প্রতিফলন, প্রতিসরণ গুণাবলি এই তত্ত্বের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়। তাঁর অবদান এত সুদূরপ্রসারী যে **সনাতনী পদার্থবিজ্ঞানকে নিউটনীয় পদার্থবিজ্ঞান বলা হয়।**

টমাস ইয়ং (Thomas Young, 1773—1829) : টমাস ইয়ং একজন ব্রিটিশ চিকিৎসক ও পদার্থবিজ্ঞানী। নিউটনের

কণিকা তত্ত্ব আলোর অনেক ঘটনা ব্যাখ্যা করতে পারে। তবে আলোর ব্যতিচার, অপবর্তন, সমবর্তন ইত্যাদির কোনো সন্তোষজনক ব্যাখ্যা কণিকা তত্ত্বে পাওয়া যায় না। **স্যার আইজাক নিউটনের সমসাময়িক ডাচ বিজ্ঞানী হাইগেন্স (Huygens) 1678 খ্রিস্টাব্দে আলোর তরঙ্গ তত্ত্ব প্রদান করেন। পরে টমাস ইয়ং, ফ্রেনেলসহ আরও অনেকে এই তত্ত্বকে প্রতিষ্ঠিত করেন।**

টমাস ইয়ং বহুমুখী প্রতিভার অধিকারী ছিলেন। তিনি পেশায় একজন চিকিৎসক হওয়া সত্ত্বেও পদার্থবিজ্ঞানে তাঁর অবদান অপরিসীম। তাঁর সবচেয়ে বেশি আগ্রহ ছিল আলোকবিজ্ঞানে।

1801 খ্রিস্টাব্দে তিনি আলোকের ব্যতিচার আবিষ্কার করেন। দুটি উৎস হতে সমান কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের দুটি আলোক তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে কখনো কখনো আলো খুব উজ্জ্বল এবং কখনো কখনো অন্ধকার দেখায়। আলোকের এ ঘটনাকে ব্যতিচার বলে। 1807 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী ইয়ং আলোকের ব্যতিচার প্রদর্শনের নিমিত্তে একটি পরীক্ষা সম্পাদন করেন। তাঁর নামানুসারে এই পরীক্ষাকে ইয়ং-এর পরীক্ষা বলে। এই পরীক্ষার ফলে আলোকের তরঙ্গ তত্ত্ব সুদৃঢ় হয়। পদার্থের স্থিতিস্থাপকতার ওপরও তিনি একটি সূত্র প্রদান করেন। স্থিতিস্থাপকতার দৈর্ঘ্য গুণাঙ্ক ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নামে পরিচিত। মানব চোখে বিভিন্ন আলোর সংবেদনশীলতা সম্বন্ধে তিনি সর্বপ্রথম ব্যাখ্যা প্রদান করেন।

মাইকেল ফ্যারাডে (Michael Faraday, 1791–1867) : মাইকেল ফ্যারাডে একজন পদার্থবিদ ও রসায়নবিদ ছিলেন। তিনি ইংল্যান্ডের রয়েল ইনস্টিটিউটের রসায়নবিদ্যার অধ্যাপক ছিলেন। 1845 খ্রিস্টাব্দে তিনি আবিষ্কার করেন যে একটি প্রবল চৌম্বক ক্ষেত্রের প্রভাবে সমবর্তন তল ঘুরে যায়। এই ঘটনা ফ্যারাডে ক্রিয়া নামে পরিচিত। এই ক্রিয়া আবিষ্কারের পর বিজ্ঞানীরা ধারণা করলেন যে আলোকের সঙ্গে চুম্বকত্বের একটি গভীর সম্পর্ক রয়েছে। পরবর্তীকালে তিনি তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব আবিষ্কার করেন। ফ্যারাডে তড়িৎ চুম্বকীয় আবেশ এবং আপেক্ষিক আবেশিক ধারকত্ব আবিষ্কারের জন্য অমর হয়ে আছেন। 1831 খ্রিস্টাব্দে তিনি আবিষ্কার করেন যে চৌম্বক ক্ষেত্র দ্বারা তড়িৎ প্রবাহ সৃষ্টি করা যায়। এর নামই তড়িৎচৌম্বক আবেশ। এই তড়িৎ চৌম্বক আবেশের ওপর ভিত্তি করে জেনারেটর, ট্রান্সফরমার ও অন্যান্য বৈদ্যুতিক যন্ত্রপাতি আবিষ্কৃত হয়েছে। আধুনিক সভ্যতা বিকাশে এ সমস্ত আবিষ্কার নিঃসন্দেহে যুগান্তকারী। এ ছাড়াও মাইকেল ফ্যারাডে তড়িৎ বিশ্লেষণ ও তড়িৎ বিশ্লেষণের সূত্র আবিষ্কার করেন। তড়িৎ প্রলেপন, তড়িৎ মুদ্রণ, ধাতু নিষ্কাশন, ধাতু বিশুদ্ধিকরণ ইত্যাদিতে তড়িৎ বিশ্লেষণ প্রক্রিয়া ব্যবহার করা হয়।

লর্ড রাদারফোর্ড (Lord Rutherford) : উনবিংশ শতাব্দী পর্যন্ত বিজ্ঞানীদের ধারণা ছিল যে, প্রতিটি পরমাণু ধনাত্মক আধানের বস্তু দ্বারা গঠিত এবং এই ধনাত্মক আধানযুক্ত বস্তুর মাঝে ইতস্ততভাবে ঋণাত্মক আধানযুক্ত ইলেকট্রন ছড়িয়ে রয়েছে। প্রতিটি পরমাণুর মোট ধন আধান ও ঋণ আধানের পরিমাণ সমান।

1911 সালে রাদারফোর্ড বিখ্যাত আলফা বিক্ষেপণ পরীক্ষার ফলাফল হতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, পরমাণুর সমস্ত ধন আধান এবং ভর এর কেন্দ্রে অতি অল্প পরিসর স্থানে কেন্দ্রীভূত রয়েছে। রাদারফোর্ড একে নিউক্লিয়াস নামে অভিহিত করেন। এই নিউক্লিয়াসের চারদিকে কিছুসংখ্যক ইলেকট্রন বৃত্তাকার কক্ষপথে ঘুরছে। ইলেকট্রনগুলোর ঘূর্ণনজনিত বল ও নিউক্লিয়াস এবং ইলেকট্রনগুলোর মধ্যে ক্রিয়াশীল কুলম্বীয় বল সমান ও বিপরীতমুখী হওয়ায় ইলেকট্রন সুস্থিরভাবে নির্দিষ্ট দূরত্বে নিউক্লিয়াসকে প্রদক্ষিণ করে। পরমাণুর এই মডেলকে সৌর জগতের সাথে তুলনা করা যায়। রাদারফোর্ডের পরমাণুর এই মডেল অন্যান্য মডেলের চেয়ে অধিকতর যুক্তিসঙ্গত হলেও এর সীমাবদ্ধতা ছিল যা পরবর্তীতে নীলস বোর দূর করেন।

আলবার্ট আইনস্টাইন (Albert Einstein 1879—1955) : আজ যদি বিশ্বের যেকোনো দেশের বিজ্ঞানমনস্ক কোনো ব্যক্তিকে জিজ্ঞেস করা হয়, "বিংশ শতাব্দীর সবচেয়ে বিখ্যাত বিজ্ঞানী কে?" স্বাভাবিক উত্তর পাওয়া যাবে, "আলবার্ট আইনস্টাইন।" খুব কম সংখ্যক বিজ্ঞানীই আইনস্টাইনের মতো তাঁর মৌলিক কাজের সংখ্যা, বৈচিত্র্য এবং অপরিসীম গুরুত্ব বিবেচনায় এত বিখ্যাত হতে পেরেছেন। আইনস্টাইন তাঁর বহু বৈচিত্র্যময় বৈজ্ঞানিক আবিষ্কারের মধ্যে সবচেয়ে বেশি পরিচিত তাঁর আপেক্ষিক তত্ত্বের জন্য। আপেক্ষিক তত্ত্বের মধ্যে আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্বের জন্য তিনি সমধিক পরিচিত। তিনি ব্রাউনীয় গতি, আলোক তড়িৎ ক্রিয়া, আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব এবং শক্তি ও জড়তার সূত্র ইত্যাদি জগৎ বিখ্যাত সূত্রের আবিষ্কারক। জার্মানিতে জন্ম হওয়া সত্ত্বেও তিনি 1901 সালে সুইজারল্যান্ডের নাগরিকত্ব গ্রহণ করেন। শেষ জীবনে আইনস্টাইন আমেরিকাতে বসবাস করেন।

1905 সালে যখন তাঁর বয়স মাত্র 23 বছর তখন তিনি আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব প্রকাশ করেন। আমাদের মৌলিক চিন্তা-চেতনা বা বিশ্বাসের অনেক কিছুরই পরিবর্তন সাধন করেছে এই আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব। পারমাণবিক বিজ্ঞানের ক্রমবিকাশের ক্ষেত্রে আপেক্ষিক তত্ত্বের ভূমিকা অপরিসীম। আইনস্টাইনের মতে স্থান, কাল, দৈর্ঘ্য, কোনোটিই পরম রাশি বা নিরপেক্ষ নয়। এগুলো পরিবর্তনশীল। চিরায়ত বলবিজ্ঞানে ভর এবং শক্তি স্বাধীন হলেও আপেক্ষিকতার বিশেষ তত্ত্ব অনুসারে এরা সমতুল্য (Equivalent)। এই তত্ত্ব অনুসারে আমরা জানতে পারি যে ভরসম্পন্ন কোনো বস্তুই আলোর বেগ বা তার বেশি বেগে ছুটতে পারে না, তা যত বলই বস্তুর ওপর প্রয়োগ করা হোক না কেন। আপেক্ষিকতার ভর-শক্তির সমতা সূত্র, $E = mc^2$ তাঁর আবিষ্কার। 1915 সালে তিনি আপেক্ষিকতার সার্বিক তত্ত্ব প্রদান করেন। তাঁর আপেক্ষিকতার তত্ত্ব পদার্থবিজ্ঞানে দ্বিতীয় বৃহত্তম তত্ত্ব হিসেবে পরিচিত।

আইনস্টাইনের আরেকটি অমর সৃষ্টি হচ্ছে আলোক তড়িৎ ক্রিয়ার ব্যাখ্যা প্রদান। কোনো ধাতব পদার্থের ওপর উপযুক্ত কম্পাঙ্ক বা তরঙ্গদৈর্ঘ্যের আলোক আপতিত হলে ওই পদার্থ হতে ইলেকট্রন নির্গত হয়। এই ক্রিয়াকে আলোক

তড়িৎ ক্রিয়া বলে। তিনি 1921 সালে আলোক তড়িৎ ক্রিয়া আবিষ্কারের জন্য নোবেল পুরস্কার পান। 1905 খ্রিস্টাব্দে আলোক তড়িৎ ক্রিয়া ব্যাখ্যার জন্য আইনস্টাইন প্ল্যাঙ্কের কোয়ান্টাম তত্ত্ব প্রয়োগ করেন। কোয়ান্টাম তত্ত্ব অনুসারে যে কোনো বিকিরণ অসংখ্য ফোটনের সমষ্টি অর্থাৎ বিকিরণ ফোটনের একটি ঝাঁক বা ঝরনা। **প্রতিটি ফোটনের শক্তি হচ্ছে $h\upsilon$। এখানে h হলো প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক এবং υ হচ্ছে ফোটনের কম্পাঙ্ক।** এখন একটি ফোটন কোনো ধাতব পাতের পরমাণুর ওপর আপতিত হলে ফোটনের সাথে পরমাণুর সংঘাত হবে এবং এই সংঘাত স্থিতিস্থাপক সংঘাত। এই সংঘাতের ফলে পরমাণুস্থ একটি ইলেকট্রন ফোটনের সমুদয় শক্তি গ্রহণ করবে এবং কোনো শক্তি স্থানান্তরিত হবে না। এখন ইলেকট্রনটি পরমাণুর নিউক্লিয়াসের সঙ্গে আবদ্ধ থাকায় এই শক্তির কিছু অংশ ইলেকট্রনকে নিউক্লিয়াসের আকর্ষণ হতে মুক্ত করতে ব্যয় হবে এবং অবশিষ্ট শক্তি নিয়ে ইলেকট্রন নির্গত হবে। এটিই আলোক তড়িৎ ক্রিয়ার ব্যাখ্যা। **আইনস্টাইনের ভবিষ্যদ্বাণীর ওপর ভিত্তি করে এক শ' বছর পর 2016 সালে 11ই ফেব্রুয়ারি একদল বিজ্ঞানী (LSC) মহাকর্ষীয় তরঙ্গ সরাসরি শনাক্ত করতে সক্ষম হন।**

ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক (Max Planck, 1858—1947) : বিজ্ঞানী প্ল্যাঙ্ক ছিলেন জার্মানির প্রখ্যাত পদার্থবিদ। 1900 খ্রিস্টাব্দে তিনি তেজকণাবাদ (Quantum theory) আবিষ্কার করেন। এই আবিষ্কারের মাধ্যমে পদার্থবিজ্ঞানে বিপ্লব সূচিত হয়।

বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন এবং সমকালীন বিজ্ঞানীরা বিশ্বাস করতেন যে আলো কণা প্রকৃতির। এই তত্ত্ব অনুযায়ী যেকোনো দীপ্ত বস্তু (Luminous body) হতে অনবরত অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণিকা ঝাঁকে ঝাঁকে নির্গত হয়। 1802 সালে আলোকের ব্যতিচারের ক্ষেত্রে ইয়ং-এর দ্বিচিড় পরীক্ষা প্রমাণ করে যে আলো তরঙ্গ প্রকৃতির। আলোর বিভিন্ন ঘটনা বিশ্লেষণে ও ব্যাখ্যার সাফল্য এই তত্ত্বকে প্রতিষ্ঠিত করে। **ইয়ং-এর পরীক্ষার প্রায় এক শ' বছর পরে ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ ব্যাখ্যায় আলোকের কণাতত্ত্ব পুনর্জীবিত করেন।** এই প্রবন্ধ এবং অন্যান্য বিজ্ঞানীদের পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে এ ধারণা সৃষ্টি হয় **যে আলো এবং সকল ধরনের তড়িৎ চৌম্বকীয় তরঙ্গাই অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র শক্তিগুচ্ছের সমন্বয়ে গঠিত।**

প্ল্যাঙ্কের অভিমত অনুসারে কোনো বস্তু হতে শক্তির বিকিরণ বা বিভিন্ন ধাতুর মধ্যে শক্তির বিনিময় নিরবচ্ছিন্নভাবে ঘটে না। এই প্রক্রিয়ায় কোনো ধারাবাহিকতা নেই। শক্তির নিঃসরণ বা শোষণ বিচ্ছিন্নভাবে খণ্ড খণ্ড আকারে বা এক একটি গুচ্ছ বা প্যাকেটে নির্গত বা শোষিত হয়। প্রতিটি শক্তিকণা বা শক্তিগুচ্ছ এক একটি অবিভাজ্য একক। **তিনি শক্তির এ ক্ষুদ্র গুচ্ছের নাম দেন কোয়ান্টা (Quanta)। প্রতিটি কোয়ান্টার শক্তি বিকিরণ কম্পাঙ্কের সমানুপাতিক। এই শক্তি কোয়ান্টা পরবর্তীতে ফোটন হিসেবে পরিচিতি লাভ করে।** ফোটন বিদ্যুৎ নিরপেক্ষ এবং এর কোনো ভর নেই। **কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ ব্যাখ্যায় তাঁর আবিষ্কৃত কোয়ান্টাম তত্ত্ব সঠিকভাবে বর্ণনা করতে সক্ষম।**

[MAT: 21-22]

১.১২ পরিমাপে ভুল বা ত্রুটি
Errors in measurements

কোনো ভৌত রাশির নির্ভুল পরিমাপ পেতে রাশির সাথে সম্পর্কযুক্ত যে সূত্র থাকে তার অন্তর্গত সকল রাশির মাপ নির্ভুল হওয়া প্রয়োজন। এর ব্যত্যয় ঘটলে পরিমাপ সঠিক হবে না। একে ভুল বা ত্রুটি বলে।

যেকোনো ভৌত রাশি পরিমাপে প্রকৃত শুদ্ধ মান পাওয়া যায় না। কিছু না কিছু ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। এই ত্রুটির উৎস পরীক্ষণ কাজে ব্যবহৃত যন্ত্রপাতির সূক্ষ্মভাবে রাশি পরিমাপের সীমাবদ্ধতা এবং যিনি পরিমাপ করছেন পাঠ গ্রহণে তার ত্রুটির কারণ। এর অর্থ হলো যেকোনো পরিমাপ্য রাশির পরিমাপে একটি অনিশ্চয়তা বিদ্যমান থাকে।

পরিমাপের ত্রুটিগুলোকে উৎপন্নের ধরন অনুযায়ী কয়েকটি ভাগে ভাগ করা যায়; যথা—

(১) যান্ত্রিক ত্রুটি (Instrumental error)
(২) পর্যবেক্ষণমূলক বা ব্যক্তিগত ত্রুটি (Observational or personal error)
(৩) এলোমেলো বা অনিয়মিত ত্রুটি (Random error)
(৪) পুনরাবৃত্তিক বা নিয়মিত ত্রুটি (Systematic error)
(৫) লঘিষ্ঠ গণন ত্রুটি (Least count error)

১. যান্ত্রিক ত্রুটি (Instrumental error) :

ভৌত রাশি পরিমাপে যে সমস্ত যন্ত্র ব্যবহার করা হয়, সেগুলো সঠিক এবং সুবেদী না হলে পরিমাপে ত্রুটি দেখা দেয়। একে যান্ত্রিক ত্রুটি বলে। বিভিন্ন ধরনের যান্ত্রিক ত্রুটিগুলোর মধ্যে উল্লেখযোগ্য হলো— (i) শূন্য ত্রুটি (zero error), (ii) পিছট ত্রুটি (backlash error) ও (iii) লেভেল ত্রুটি (level error)। [MAT: 21-22]

(i) শূন্য ত্রুটি (zero error) : **সাধারণত ভার্নিয়ার স্কেল, স্ক্রুগজ, স্লাইড ক্যালিপার্স, স্ফেরোমিটার ইত্যাদির** প্রধান স্কেলের '0' দাগ ভার্নিয়ার বা বৃত্তাকার স্কেলের '0' দাগের সাথে না মিলে যদি আগে বা পিছনে থাকে, তবে একে শূন্য ত্রুটি বলে।

(ii) পিছট ত্রুটি (backlash error) : নাট-স্ক্রু নীতির উপর ভিত্তি করে যেসব যন্ত্র তৈরি সেসব যন্ত্রে এই ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। নতুন যন্ত্রের তুলনায় পুরাতন যন্ত্রে এই ত্রুটি বেশি দেখা যায়। কারণ অনেকদিন ব্যবহারের ফলে নাটের গর্ত বড় হয়ে যেতে পারে বা স্ক্রু ক্ষয় হয়ে আলগা হয়ে যায়; ফলে স্ক্রুকে উভয় দিকে ঘুরালে সমান সরণ হয় না। এ ধরনের ত্রুটিকে পিছট ত্রুটি বলে। পাঠ নেওয়ার সময় যন্ত্রকে একই দিকে ঘুরালে এ ত্রুটি দূর হয়।

(iii) লেভেল ত্রুটি (level error) : কতগুলো পরীক্ষণের ক্ষেত্রে যন্ত্রকে ভালোভাবে লেভেলিং করে না নিলে সঠিক পাঠ পাওয়া যায় না। যেমন নিক্তি, বিক্ষেপ চৌম্বকমান যন্ত্র, ট্যানজেন্ট গ্যালভানোমিটার ইত্যাদি। লেভেলিং স্ক্রু এবং স্পিরিট লেভেলের সাহায্যে লেভেলিং করে নিতে হয়। এসব যন্ত্রে লেভেল ত্রুটি দেখা যায়।

২. পর্যবেক্ষণমূলক বা ব্যক্তিগত ত্রুটি (Observational or personal error) :

পর্যবেক্ষকের পর্যবেক্ষণে ভুল এবং সঠিক মূল্যায়নের অভাবে এ ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। একে পর্যবেক্ষণমূলক ত্রুটি বা ব্যক্তিগত ত্রুটি বলে। পর্যবেক্ষণ ত্রুটি বিভিন্নভাবে হতে পারে। যেমন—

(i) ব্যক্তিগত ত্রুটি,
(ii) প্রান্ত দাগ ত্রুটি
(iii) লম্বন ত্রুটি
(iv) সূচক ত্রুটি
(v) পরিবেশগত ত্রুটি।

দৃষ্টিভ্রম (Parallax error) এ ধরনের একটি ত্রুটি।

RMDAC

প্রতিকার (Remedy) : পর্যবেক্ষণ সতর্কতার সাথে করে এবং একাধিকবার পাঠ নিয়ে এ ত্রুটি দূর করা যায়।

৩. এলোমেলো বা অনিয়মিত ত্রুটি (Random error) :

ত্রুটির বিভিন্ন বিষয়ে উপযুক্ত সাবধানতা অবলম্বন করা সত্ত্বেও কোনো একটি রাশির পাঠ বারবার ভিন্ন হতে দেখা যায়। পরিমাপে এ ধরনের ভিন্নতা বা পার্থক্য দুই ভাবে হতে পারে। যথা—

(১) পর্যবেক্ষকের পর্যবেক্ষণের ত্রুটির জন্য হতে পারে কিংবা

(২) পরীক্ষাকালে যন্ত্রের অবস্থার পরিবর্তনের জন্য হতে পারে।

উদাহরণস্বরূপ, মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ পরিমাপের ক্ষেত্রে T পরিমাপ করার জন্য স্টপ ওয়াচ (stop watch) এবং l মাপার জন্য স্কেল সূচক ব্যবহার করা হয়। T পরিমাপের জন্য যদি ঘড়িটি ঠিকমতো চালানো এবং থামানো না হয় তবে T-এর পরিমাপে ভুল হবে। l পরিমাপের সময় সূচক যদি স্কেলের একটি নির্দিষ্ট দাগের সাথে না মিলে দুটি সন্নিহিত দাগের মধ্যে থাকে, তবে পর্যবেক্ষকের পক্ষে সূচকের অবস্থানের নির্ভুল মান স্কেল থেকে নেয়া সম্ভব হয় না। এ ধরনের ভুলগুলোকে অনিয়মিত বা এলোমেলো ত্রুটি বলে। এলোমেলো ত্রুটির ফলে চূড়ান্ত ফলাফল হয়তো অত্যন্ত বেশি অথবা খুব কম হতে পারে।

প্রতিকার (Remedy) : অনিয়মিত ত্রুটি পরিবর্তনশীল। প্রাপ্ত পাঠ প্রকৃত পাঠ অপেক্ষা বেশি হলে ধনাত্মক এবং কম হলে ঋণাত্মক হবে। এই ত্রুটি এড়াতে হলে সতর্কতার সাথে পাঠ নিতে হয়, এই ত্রুটি কমাতে হলে পরিমাপটি বার বার করতে হয়। অর্থাৎ এই ত্রুটি দূর করতে হলে অধিক সংখ্যক পাঠ গ্রহণ করে তাদের গড় পাঠ বের করতে হবে।

৪. পুনরাবৃত্তিক বা নিয়মিত ত্রুটি (Systematic error) :

পরীক্ষাকালে কোনো কোনো ত্রুটির ফলে পরীক্ষাধীন রাশির পরীক্ষালব্ধ মান সর্বদাই এবং নিয়মিতভাবে রাশিটির প্রকৃত মান অপেক্ষা কম বা বেশি হতে পারে। এ ধরনের ত্রুটিকে নিয়মিত বা পুনরাবৃত্তিক ত্রুটি বলে। মিটার ব্রিজের প্রান্তিক ত্রুটি, পোটেনশিওমিটারের প্রান্তিক ত্রুটি, স্ক্রুগজের শূন্য ত্রুটি এই ত্রুটির অন্তর্গত। অবশ্য পুনরাবৃত্তিক ত্রুটি নির্ণয় করার কোনো যুক্তিযুক্ত বা প্রামাণ্য উপায় নেই।

প্রতিকার (Remedy) : এই ত্রুটি সংশোধনের জন্য বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন অবস্থায় পরীক্ষাকার্যটি পুনরাবৃত্তি করা হয়।

পরম ত্রুটি (Absolute error) : কোনো একটি রাশির প্রকৃত মান ও পরিমাপকৃত মানের পার্থক্যকে পরম ত্রুটি বলে। পরম ত্রুটির পরিবর্তে আমরা কখনো কখনো আপেক্ষিক ত্রুটি বা শতকরা ত্রুটি ব্যবহার করে থাকি।

অতএব, পরম ত্রুটি = প্রকৃত মান – পরিমাপ্য মান

$$\text{শতকরা ত্রুটি} : \frac{\text{প্রকৃত মান} \sim \text{পরীক্ষালব্ধ মান}}{\text{প্রকৃত মান}} \times 100\%$$

সামগ্রিক বা মোট ত্রুটি (Gross error) : পর্যবেক্ষকের অসতর্কতা বা অমনোযোগিতার কারণে এ ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। সতর্কতার সঙ্গে পরীক্ষণ কর্ম সম্পাদন করে এ ত্রুটি দূর করা যায়।

৫. লঘিষ্ঠ গণন ত্রুটি (Least count error) :

ন্যূনতম যে পরিমাপ কোনো যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করা সম্ভব তাকে ওই যন্ত্রের লঘিষ্ঠ গুণন বলে। যেমন একটি মিটার স্কেলের সাহায্যে 1 mm বা 0·1 cm সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করা যায়। সুতরাং মিটার স্কেলের লঘিষ্ঠ গুণন 1 mm বা 0·1 cm । অনুরূপভাবে স্লাইড ক্যালিপার্সের ক্ষেত্রে লঘিষ্ঠ গুণন 0·01 mm, 0·001 cm। সূক্ষ্ম বা উন্নত মানের যন্ত্র ব্যবহার করে লঘিষ্ঠ গুণন ত্রুটি কমানো যায়। তবে একই পরিমাপ্য রাশির অধিক সংখ্যক পাঠ নিয়ে এবং ওই পাঠসমূহের গড় মান নির্ণয় করে পরিমেয় রাশির সঠিক মানের কাছাকাছি মান পাওয়া যায়। এলোমেলো বা অনিয়মিত এবং পুনরাবৃত্তি বা নিয়মিত ত্রুটির ক্ষেত্রে লঘিষ্ঠ গুণন ত্রুটি লক্ষ করা যায়।

সঠিকতা ও সূক্ষ্মতা (Accuracy and Precision) :

বিভিন্ন ভৌত রাশি পরিমাপের জন্য আমরা বিভিন্ন ধরনের যন্ত্রপাতি ব্যবহার করি। যন্ত্রগুলো ব্যবহারের পূর্বে তাদের সঠিকতা ও সূক্ষ্মতা সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা থাকা উচিত। এখন আমরা সঠিকতা ও সূক্ষ্মতা বলতে কী বুঝি তা আলোচনা করব।

সঠিকতা (Accuracy) : কোনো যন্ত্রের সঠিকতা বলতে বোঝায় যে ওই যন্ত্র সংশ্লিষ্ট রাশিটির প্রকৃত মানের কত কাছাকাছি পরিমাপ করতে সক্ষম। রাশিটির প্রকৃত মান ও যন্ত্রটি দ্বারা পরিমাপ্য মান যত কাছাকাছি হয় যন্ত্রের সঠিকতা তত বেশি হয়।

ধরা যাক, একটি তুলাযন্ত্র (balance) দ্বারা 50 g ভরের একটি বস্তু পরিমাপ করে 45 g পাওয়া গেল। সুতরাং বলা যায় যে তুলা যন্ত্রটির সঠিকতা ভালো নয়। আবার, অন্য একটি তুলা যন্ত্র দ্বারা ওই বস্তুটি মেপে 49·5 g পাওয়া গেল। অতএব, দ্বিতীয় যন্ত্রটির সঠিকতা অনেক উন্নত মানের।

সূক্ষ্মতা (Precision) : কোনো যন্ত্রের সূক্ষ্মতা বলতে বোঝায় যে ওই যন্ত্র দ্বারা সংশ্লিষ্ট রাশিটি পরিমাপ করতে পরপর (repeatedly) পরিমাপে প্রাপ্ত পাঠগুলো পরস্পরের কত কাছাকাছি হয়। পরপর পাঠগুলোর পার্থক্য যত কম হবে যন্ত্রটির সূক্ষ্মতা তত বেশি হবে। উদাহরণ—ধরা যাক একটি বস্তুর ভর 50 g। এটি তুলা যন্ত্রে ছয়বার পাঠ নিয়ে ভর পাওয়া গেল 48 g, 49·2 g, 49 g, 49·2 g, 49·6 g, 49·5 g। এক্ষেত্রে পরপর পাঠগুলোর পার্থক্য কম। তাই যন্ত্রটির সূক্ষ্মতা ভালো।

ত্রুটি গণনা
Calculation of errors

কোনো পরিমাপই সম্পূর্ণ ত্রুটিহীন করা সম্ভব নয়। একটি ভৌত রাশিকে একই পদ্ধতিতে কয়েকবার পরিমাপ করলেও প্রত্যেকবার একই মান পাওয়া যায় না।

সঠিক মান (Actual or true value) : ধরা যাক, একটি ভৌত রাশি একই পদ্ধতিতে n সংখ্যকবার পরিমাপ করে মানগুলো পাওয়া গেল $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$। এই মানগুলোর গড় মান হলো ওই ভৌত রাশির সঠিক মান। সুতরাং,

$$\text{সঠিক মান, } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$

ত্রুটি (Error) : কোনো ভৌত রাশির সঠিক মানকে চূড়ান্ত মান হিসেবে লেখা যথেষ্ট নয়। সঠিক মানে কতটুকু ত্রুটি আছে তা উল্লেখ করা একান্ত প্রয়োজন।

সুতরাং, কোনো ভৌত রাশির চূড়ান্ত মান,

$$x = \bar{x} \pm e$$

এখানে e ত্রুটির পরিমাণ প্রকাশ করে। নিম্নোক্ত উপায়ে ত্রুটির পরিমাণ নির্ণয় করা যায় :

$$e = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

এখানে $|x_1 - \bar{x}|$, $|x_2 - \bar{x}|$ ... $|x_n - \bar{x}|$ হলো যথাক্রমে প্রথম পরিমাপের, দ্বিতীয় পরিমাপের ... n তম পরিমাপের ত্রুটির মান। এগুলোকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, ... n তম চরম ত্রুটি (absolute error) বলা হয়। e-কে গড় চরম ত্রুটি (mean absolute error)-ও বলা হয়।

ভগ্নাংশ ত্রুটি বা আপেক্ষিক ত্রুটি (Fractional error or relative error) : গড় চরম ত্রুটি ও সঠিক মানের অনুপাতকে ভগ্নাংশ বা আপেক্ষিক ত্রুটি বলা হয়। অর্থাৎ ভগ্নাংশ ত্রুটি বা আপেক্ষিক ত্রুটি $= \frac{e}{\bar{x}}$।

শতকরা ত্রুটি (Percentage of error) : ভগ্নাংশ ত্রুটি বা আপেক্ষিক ত্রুটিকে 100 দ্বারা গুণ করে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় করা হয়। অর্থাৎ শতকরা ত্রুটি $= \frac{e}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{\text{প্রকৃত মান} \sim \text{প্রাপ্ত মান}}{\text{প্রকৃত মান}} \times 100\%$

ত্রুটির সমবায়
Combination of errors

১। যোগের ক্ষেত্রে (In case of addition) : মনে করি $A + B = Z$, তা হলে পরম ত্রুটি, $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$, অর্থাৎ যখন দুটি ভৌত রাশি যোগ করা হয় তখন যোগফলের সর্বাধিক পরম ত্রুটি ডানদিকের রাশিগুলোর পরম ত্রুটির সমষ্টি।

২। বিয়োগের ক্ষেত্রে : যদি $Z = A - B$ হয় তা হলে সর্বোচ্চ পরম ত্রুটি, $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$, অর্থাৎ এক্ষেত্রে ত্রুটিগুলো যোগ করতে হবে।

৩। গুণের ক্ষেত্রে : মনে করি $Z = A \times B$

উভয়পক্ষে $\log_e$ নিলে আমরা পাই, $\log_e Z = \log_e A + \log_e B$

এখন, অবকলন করে পাই, $\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$

সুতরাং, Z-এর সর্বোচ্চ আপেক্ষিক ত্রুটি = A পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি + B পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি

আবার, $\frac{\Delta Z}{Z} \times 100 = \frac{\Delta A}{A} \times 100 + \frac{\Delta B}{B} \times 100$

অর্থাৎ Z পরিমাপে সর্বোচ্চ শতকরা ত্রুটি = A পরিমাপে সর্বোচ্চ শতকরা ত্রুটি + B পরিমাপে সর্বোচ্চ শতকরা ত্রুটি।

৪। ভাগের ক্ষেত্রে : মনে করি $Z = \frac{A}{B}$

সুতরাং, Z পরিমাপে সর্বোচ্চ আপেক্ষিক ত্রুটি $\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$

এবং Z পরিমাপে সর্বোচ্চ শতকরা ত্রুটি, $\frac{\Delta Z}{Z} \times 100 = \frac{\Delta A}{A} \times 100 + \frac{\Delta B}{B} \times 100$

৫। সূচকীয় সম্পর্কের ক্ষেত্রে : (i) মনে করি $Z = A^n$, তা হলে $\frac{\Delta Z}{Z} = n \cdot \frac{\Delta A}{A}$। সুতরাং A^n-এর আপেক্ষিক ত্রুটি A পরিমাপের আপেক্ষিক ত্রুটির n গুণ।

(ii) সাধারণভাবে, মনে করি $Z = \frac{A^x B^y}{C^n}$, তা হলে Z পরিমাপে সর্বোচ্চ ত্রুটি, $\frac{\Delta Z}{Z} = x \cdot \frac{\Delta A}{A} + y \frac{\Delta B}{B} + n \frac{\Delta C}{C}$

সুতরাং শতকরা ত্রুটি = $\frac{\Delta Z}{Z} \times 100 = x \frac{\Delta A}{A} \times 100 + y \frac{\Delta B}{B} \times 100 + n \frac{\Delta C}{C} \times 100$

গাণিতিক উদাহরণ ১.৫

১। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $l = (32.0 \pm 0.2)$ cm এবং প্রস্থ, $b = (12.0 \pm 0.1)$ cm। ক্ষেত্রফল পরিমাপে শতকরা ত্রুটি এবং পরম ত্রুটি কত?

এখানে দৈর্ঘ্য, $l = 32.0 \pm 0.2 = 32.0 \pm 0.62\%$

এবং প্রস্থ, $b = 12 \pm 0.1 = 12 \pm 0.83\%$

সুতরাং, ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $(32 \pm 0.62\%)(12 \pm 0.83\%)$

∴ ক্ষেত্রফল $= 384 \pm 1.45\%$, গুণফলের ক্ষেত্রে শতকরা ত্রুটিগুলো যোগ করা হয়।
$= 384 \pm 5.6$

∴ শতকরা ত্রুটি = 1.45% এবং পরম ত্রুটি = 5.6

২। $A = \frac{a^2 b^3}{\sqrt{cd}}$, a, b, c ও d রাশির পরিমাপে শতকরা ত্রুটি 1%, 2%, 4% এবং 2% হলে A রাশিটির শতকরা ত্রুটি কত?

এখানে, $A = \frac{a^2 b^3}{\sqrt{cd}}$

বা, $\frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{c} + \frac{1}{2}\frac{\Delta d}{d}$

$$\therefore \frac{\Delta A}{A} \times 100\% = 2 \times 1\% + 3 \times 2\% + \frac{1}{2} \times 4\% + \frac{1}{2} \times 2\%$$
$$= 2\% + 6\% + 2\% + 1\% = 11\%$$

৩। একটি দোলকের দৈর্ঘ্য (0·6 ± 0·01) m এবং পর্যায়কাল (2·2 ± 0·10) sec হলে অভিকর্ষজ ত্বরণ পরিমাপে শতকরা ত্রুটি কত ?

আমরা জানি সরল দোলকের পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\therefore \; g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি,

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T} = \frac{0·01}{0·6} + \frac{0·10}{2·2}$$

$\therefore$ শতকরা ত্রুটি $= \frac{\Delta g}{g} \times 100 \quad = \frac{0·01}{0·6} \times 100 + \frac{0·10}{2·2} \times 100$

$= 1·667 + 4·545 = 6·21\%$

৪। পরীক্ষাগারে একজন ছাত্র কাচের প্রতিসরাঙ্ক নির্ণয়ের পরীক্ষায় নিম্নলিখিত মানগুলো লিপিবদ্ধ করে : 1·54, 1·55, 1·52, 1·51, 1·48, 1·46 এবং 1·50। কাচের (i) গড় প্রতিসরাঙ্ক, (ii) প্রত্যেকটা পরিমাপে পরম ত্রুটি, (iii) পরম ত্রুটির গড়, (iv) আপেক্ষিক ত্রুটি ও (v) শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। পরম ত্রুটি ও শতকরা ত্রুটি সাপেক্ষে প্রতিসরাঙ্কের মান প্রকাশ কর।

(i) প্রতিসরাঙ্কের গড় মান, $\bar{\mu} = \frac{1·54 + 1·55 + 1·52 + 1·51 + 1·48 + 1·46 + 1·50}{7}$

$= 1·508 \simeq 1·51$

(ii) গড় মানকে প্রকৃত মান বিবেচনা করলে প্রতিটি পরিমাপে পরম ত্রুটি হলো :

$1·51 - 1·54 = -0·03;$
$1·51 - 1·55 = -0·04;$
$1·51 - 1·52 = -1·01;$
$1·51 - 1·51 = 0·00$
$1·51 - 1·48 = 0·03;$
$1·51 - 1·46 = 0·05;$
$1·51 - 1·50 = 0·01$

(iii) পরম ত্রুটির গড়, $\Delta\bar{\mu} = \frac{0·03 + 0·04 + 0·01 + 0·00 + 0·03 + 0·05 + 0·01}{7} = \frac{0·17}{7} = 0·024$

(iv) আপেক্ষিক ত্রুটি, $\delta\mu = \frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{0·024}{1·51} = 0·02644 \simeq 0·03$

(v) শতকরা ত্রুটি = আপেক্ষিক ত্রুটি × 100% = 0·03 × 100%= 3%

পরম ত্রুটি সাপেক্ষে প্রতিসরাঙ্ক, $\mu = 1·51 \pm 0·024$

শতকরা ত্রুটি সাপেক্ষে প্রতিসরাঙ্ক, $\mu = 1·51 \pm 3\%$

১.১৩ পরিমাপ্য রাশির ভুল নির্ধারণ
Determination of error of the measurable quantity

কোনো পরিমাপ্য রাশির আনুপাতিক ভুল নির্ধারণ :

ধরা যাক, x একটি পরিমাপ্য ভৌত রাশি এবং এটি y ও z রাশি দুইটির সাথে নিম্নোক্ত সমীকরণের দ্বারা সম্পর্কযুক্ত,

$$x = y^m z^n \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.4)$$

এখন y, z রাশি দুইটিকে পরিমাপ করতে ভুল হলে x-এর পরিমাপে তা প্রতিফলিত হবে।

সমীকরণ (1.4)-কে লগারিদমিক অবকলন (Logarithmic differentiation) করে পাই,

$$\delta x = m\delta y + n\delta z$$

y, z রাশিগুলোকে পরিমাপ করার সময় সর্বোচ্চ সম্ভাব্য ভুল যথাক্রমে $\pm\,\delta y$ এবং $\pm\,\delta z$; ফলে x-এর সর্বোচ্চ সম্ভাব্য ভুল হবে $\pm\delta x$।

সুতরাং সর্বোচ্চ সম্ভাব্য আনুপাতিক ভুল,

$$\left(\frac{\delta x}{x}\right)_{max} = m\left(\frac{\delta y}{y}\right) + n\left(\frac{\delta z}{z}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.5)$$

পরিমাপ্য ভৌত রাশি x-এর সাথে যেসব রাশি জড়িত থাকে (এক্ষেত্রে y ও z) তাদের প্রত্যেকের আনুপাতিক ভুল পৃথকভাবে নির্ণয় করে ওই নির্ণিত ভুলগুলোর পরিমাণকে তাদের সংশ্লিষ্ট রাশিগুলোর শক্তি সংখ্যা (Power number) দ্বারা গুণ করে, গুণফলগুলো যোগ করলে ওই যোগফলই হবে পরিমাপ্য ভৌত রাশির (এক্ষেত্রে x) আনুপাতিক ভুলের সর্বোচ্চ মান। অতএব, যে রাশির শক্তি সংখ্যা বেশি সেটি খুব সতর্কতার সঙ্গে পরিমাপ করলে পরিমাপ্য রাশির আনুপাতিক ভুল কম হবে। যেমন,

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

ওপরে আলোচিত বিষয় অনুসারে g এর সর্বোচ্চ আনুপাতিক ভুল,

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta T}{T} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1.6)$$ [শক্তির চিহ্ন বিবেচনা না করে]

সমীকরণ (1.6) হতে দেখা যাচ্ছে যে T পরিমাপে সামান্য ভুল হলেও তা দ্বিগুণ বৃদ্ধি পেয়ে সমীকরণে অন্তর্ভুক্ত হয়।

হাতে কলমে কাজ : একটি সরল দোলকের দোলনকাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ মাত্রা সঙ্গতিপূর্ণ কি না ?

সমাধান : বামপক্ষ, $T = [T]$

ডানপক্ষ, $\sqrt{\frac{l}{g}} = \left[\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{LT^{-2}}}\right] = [\sqrt{T^2}] = [T]$

সুতরাং বামপক্ষের মাত্রা = ডানপক্ষের মাত্রা। অর্থাৎ সরল দোলকের দোলনকালের মাত্রা সঙ্গতিপূর্ণ।

পরীক্ষালব্ধ ফলে তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যার হিসাব
Calculation of significant figure in experimental result

পরিমাপ্য রাশির সূক্ষ্মতা ওই রাশির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট অন্যান্য রাশিগুলোর পরিমাপের সূক্ষ্মতার উপর নির্ভর করে। কিন্তু আমরা যখন ক্যালকুলেটরের সাহায্যে হিসাব করি, তখন অনেক ডিজিট পাওয়া যায়। দশমিকের পরের সব ডিজিট ফলাফলে লিপিবদ্ধ করা অর্থহীন। দশমিকের পরে কতগুলো সংখ্যা রাখতে হবে তা পর্যবেক্ষণ সূক্ষ্মতার উপর নির্ভর করে। কাজেই পরীক্ষালব্ধ ফলে অপ্রয়োজনীয় সংখ্যা বাদ দিয়ে যেসব সংখ্যার পরিমাপ বিশ্বাসযোগ্য তাই রাখতে হবে। যেমন মিটার স্কেল দিয়ে কোনো দৈর্ঘ্য মাপলে এক মিলিমিটারের কম দৈর্ঘ্য সূক্ষ্মভাবে মাপা যায় না। সুতরাং দৈর্ঘ্য পরিমাপের সূক্ষ্মতার পরিমাপ হবে ± 1 mm।

গড় ভুল (Mean error) : বিভিন্ন সতর্কতা অবলম্বন করে পরিমাপ্য কোনো রাশির প্রকৃত মানের কাছাকাছি মান আমরা পেতে পারি, তবে প্রকৃত মান পরিমাপ করতে পারি না। কোনো রাশি অনেকবার পরিমাপের পাঠগুলোর গড় মানকে ওই ভৌত রাশির সঠিক মান বলা সঙ্গত নয়। ওই পরিমাপে ত্রুটি উল্লেখ করা প্রয়োজন। পরিমাপে যে মান পাওয়া যায় তা উভয় পাশে নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে সামান্য পরিমাণ ভুল থাকার সম্ভাবনা আছে, যা ± শতকরা মান দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(i) গড় ভুল বা গড় বিচ্যুতি নির্ণয় (Determination of mean error or mean deviation): ধরা যাক, পরিমাপ্য একটি রাশির কেবল অনিয়মিত ভুল অন্তর্ভুক্ত হচ্ছে। রাশিটি যদি n সংখ্যক বার মাপ নেওয়া হয়ে থাকে এবং এর মান যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ পাওয়া যায়, তবে রাশিগুলোর গড় হবে,

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n}{n}$$

এই পরিমাপে কেবল অনিয়মিত ভুলই অন্তর্ভুক্ত থাকায় পরিমাপে প্রাপ্ত গড় মান A প্রকৃত মানের কাছাকাছি হবে। রাশিটির প্রত্যেকটি মাপ এই গড় সংখ্যা A হতে সামান্য বিচ্যুত থাকে বলে ওই মাপের ভুল ধরা যায়। সুতরাং, রাশিটির বিভিন্ন পরিমাপে যে বিচ্যুতি থাকবে তা যথাক্রমে,

$$d_1 = x_1 - A,\ d_2 = x_2 - A,\ d_3 = x_3 - A,\ \ldots\ \ldots\ d_n = x_n - A$$

এখন বিচ্যুতির চিহ্ন বাদ দিয়ে এগুলোর গড় নিলেই গড় বিচ্যুতি বা গড় ভুল পাওয়া যায়।

অতএব, গড় বিচ্যুতি বা গড় ভুল, $d = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots + d_n}{n}$। সুতরাং পরিমাপ্য রাশিটির প্রকৃত মাপ, $x = (A \pm d)$

(ii) প্রমাণ বিচ্যুতি (Standard deviation) : অনেক সময় এই বিচ্যুতিগুলোর গড় নির্ণয়ের পরিবর্তে তাদের বর্গের গড় বের করে তার বর্গমূল নির্ণয় করা হয়। **এই বর্গমূলের পরিমাণকে প্রমাণ বিচ্যুতি বলে।**

সুতরাং, প্রমাণ বিচ্যুতি, $D = \sqrt{\dfrac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \ldots\ldots\ldots + d_n^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\Sigma d^2}{n}}$

অতএব, রাশিটির প্রকৃত মাপ হবে, $x = (A \pm D)$

এবার পরিমাপ্য রাশিটির আন্তর্জাতিক স্বীকৃত মান প্রাকৃতিক ধ্রুবক তালিকা (Physical constant table) থেকে সংগ্রহ করে রাশিটির শুদ্ধতার শতকরা হিসাব নিম্নোক্তভাবে নির্ণয় করতে পারি।

$$\text{পরিমাপ্য রাশির শুদ্ধ মান} = \frac{\text{রাশিটির সঠিক মান} \sim \text{প্রাপ্ত মান}}{\text{সঠিক মান}} \times 100\%;$$ ইহাই ভুলের শতকরা হার।

নিজে কর : পদার্থবিজ্ঞানের ল্যাবরেটরিতে তুমি সরল দোলকের সাহায্যে g-এর মান নির্ণয় করে পেয়েছ $9{\cdot}89\ ms^{-2}$। g-এর প্রকৃত মান $9{\cdot}81\ ms^{-2}$ ধরে তোমার প্রাপ্ত মানের শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

এখানে পরিমাপ্য রাশির শুদ্ধ মান $= \dfrac{9{\cdot}89 - 9{\cdot}81}{9{\cdot}81} \times 100\%$

$= \dfrac{0{\cdot}08}{9{\cdot}81} \times 100\% = 0{\cdot}815\%$

অতএব, নির্ণেয় পরীক্ষায় প্রাপ্ত মানের শতকরা ত্রুটি হলো $0{\cdot}815\%$

গাণিতিক উদাহরণ ১.৬

১। **একটি গোলকের পরিমাপ্য ব্যাসার্ধ, $R = 5{\cdot}3 \pm 0{\cdot}1$ হলে আয়তনে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর** [চ. বো. ২০১৫; Admission Test : RU-C 2020-21 (মান ভিন্ন); RU-C1 2017-18 (মান ভিন্ন)]

এখানে, $R = 5{\cdot}3$

$\therefore$ পরম ত্রুটি, $\Delta R = 0{\cdot}1$

এখন, গোলকের আয়তন, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

$\therefore$ আয়তনে আপেক্ষিক বা আনুপাতিক ত্রুটি, $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{3\Delta R}{R}$

$\therefore \dfrac{\Delta V}{V} = 3 \times \dfrac{0{\cdot}1}{5{\cdot}3} = \dfrac{0{\cdot}3}{5{\cdot}3}$

অতএব, আয়তনে শতকরা ত্রুটি, $\dfrac{\Delta V}{V} \times 100\% = \dfrac{0{\cdot}3 \times 100\%}{5{\cdot}3} = 5{\cdot}7\%$

২। একজন ছাত্র পরীক্ষাগারে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $9{\cdot}81\ ms^{-2}$ নির্ণয় করল। অপরদিকে যখন সে $0{\cdot}01$ kg ভরের কোনো বাটখারাকে স্প্রিং নিক্তিতে ঝুলিয়ে দিল তখন দেখল $0{\cdot}0980$ N বল দেখাচ্ছে। তার পরীক্ষালব্ধ অভিকর্ষজ ত্বরণের শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

এখানে,
পরিমাপ্য মান, $y = 9{\cdot}81\ ms^{-2}$
নিক্তিতে চাপানো ভর, $m = 0{\cdot}01$ kg
প্রাপ্ত বল, $F = 0{\cdot}0980$ N

আমরা জানি, $F = mg$

$\therefore g = \dfrac{F}{m} = \dfrac{0{\cdot}0980}{0{\cdot}01} = 9{\cdot}80\ ms^{-2}$

$\therefore$ প্রকৃত মান, $x = 9{\cdot}80\ ms^{-2}$

আমরা জানি, ত্রুটির শতকরা হার $= \dfrac{x \sim y}{x} \times 100\%$

$= \dfrac{9{\cdot}81 - 9{\cdot}80}{9{\cdot}80} \times 100\%$

$= -0{\cdot}102\%$

৩। কোনো একটি পরীক্ষায় বর্তনীতে তড়িৎ প্রবাহের জন্য 7টি স্বতন্ত্র পাঠ নেয়া যাক। পাঠগুলো নিম্নরূপ :

$I_1 = 5{\cdot}6$ mA, $I_2 = 5{\cdot}8$ mA, $I_3 = 5{\cdot}2$ mA, $I_4 = 5{\cdot}3$ mA, $I_5 = 5{\cdot}5$ mA, $I_6 = 5{\cdot}1$ mA, $I_7 = 5{\cdot}7$ mA

(i) তড়িৎ প্রবাহের গাণিতিক গড়, (ii) গড় মান হতে বিচ্যুতি (iii) গড় বিচ্যুতি এবং (iv) প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

(i) গাণিতিক গড় মান, $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_7}{7}$

বা, $\bar{x} = \dfrac{5{\cdot}6 + 5{\cdot}8 + 5{\cdot}2 + 5{\cdot}3 + 5{\cdot}5 + 5{\cdot}1 + 5{\cdot}7}{7}$ mA

$= \dfrac{38{\cdot}2}{7} = 5{\cdot}46$ mA

(ii) গড় মান হতে বিচ্যুতি,

$\delta_1 = x_1 - \bar{x} = 5{\cdot}6 - 5{\cdot}46 = +0{\cdot}14$ mA

$\delta_2 = x_2 - \bar{x} = 5{\cdot}8 - 5{\cdot}46 = +0{\cdot}34$ mA

$\delta_3 = x_3 - \bar{x} = 5{\cdot}2 - 5{\cdot}46 = -0{\cdot}26$ mA

$\delta_4 = x_4 - \bar{x} = 5{\cdot}3 - 5{\cdot}46 = -0{\cdot}16$ mA

$\delta_5 = x_5 - \bar{x} = 5{\cdot}5 - 5{\cdot}46 = +0{\cdot}04$ mA

$\delta_6 = x_6 - \bar{x} = 5{\cdot}1 - 5{\cdot}46 = -0{\cdot}36$ mA

$\delta_7 = x_7 - \bar{x} = 5{\cdot}7 - 5{\cdot}46 = +0{\cdot}24$ mA

(iii) গড় বিচ্যুতি,

$$\bar{\delta} = \frac{|\delta_1| + |\delta_2| + |\delta_3| + |\delta_4| + |\delta_5| + |\delta_6| + |\delta_7|}{7}$$

$$= \frac{0{\cdot}14 + 0{\cdot}34 + 0{\cdot}26 + 0{\cdot}16 + 0{\cdot}04 + 0{\cdot}36 + 0{\cdot}24}{7} = \frac{1{\cdot}54}{7} = 0{\cdot}22 \text{ mA}$$

(iv) প্রমাণ বিচ্যুতি, $\text{S. D.} = \sqrt{\dfrac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + \delta_5^2 + \delta_6^2 + \delta_7^2}{7}}$

$$= \sqrt{\frac{(0{\cdot}14)^2 + (0{\cdot}34)^2 + (-0{\cdot}26)^2 + (-0{\cdot}16)^2 + (0{\cdot}04)^2 + (-0{\cdot}36)^2 + (0{\cdot}24)^2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{(0{\cdot}0196 + 0{\cdot}1156 + 0{\cdot}0676 + 0{\cdot}0256 + 0{\cdot}0016 + 0{\cdot}1296 + 0{\cdot}0576)}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{\cdot}4172}{7}} = \sqrt{0{\cdot}0596} \text{ mA} = 0{\cdot}244 \text{ mA}$$

হিসাব : একটি বস্তুর ভর 100 ± 2 kg এবং আয়তন $= 100 \pm 3\ m^3$ হলে, ওই বস্তুর ঘনত্বে (i) শতকরা ত্রুটি (ii) পরম ত্রুটি নির্ণয় কর।

এখানে, $M = 100 \pm 2$ kg, $V = 100 \pm 3\ m^3$

এখন, ঘনত্বে (i) শতকরা ত্রুটি $= \left(\dfrac{\Delta M}{M} + \dfrac{\Delta V}{V}\right) \times 100\% = \left(\dfrac{2}{100} + \dfrac{3}{100}\right) \times 100\%$

$= \left(\dfrac{5}{100}\right) \times 100\% = 5\%$

(ii) ঘনত্ব, $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{100}{100} = 1\ \text{kgm}^{-3}$

পরম ত্রুটি $= \rho\left(\dfrac{\Delta M}{M} + \dfrac{\Delta V}{V}\right) = 1 \times \left(\dfrac{2}{100} + \dfrac{3}{100}\right)$

$= 1 \times (0{\cdot}02 + 0{\cdot}03) = 1 \times 0{\cdot}05 = 0{\cdot}05\ \text{kgm}^{-3}$

তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা
Significant figures

একটি ভৌত রাশিকে পরিমাপ করে প্রাপ্ত মানে যতগুলো অঙ্কসংখ্যা পর্যন্ত সম্পূর্ণরূপে নিশ্চিত হওয়া যায় তার পরবর্তী অঙ্ক পর্যন্ত অঙ্কগুলোকে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা বলে। তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা বোঝার জন্য নিম্নে একটি উদাহরণ দেওয়া হলো।

মনে করি একটি মিটার স্কেল দিয়ে একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা হলো। দেখা গেল যে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য 26·5 cm অপেক্ষা বেশি, কিন্তু 26·6 cm অপেক্ষা কম। যদি পাঠটি 26·5 cm-এর কাছাকাছি হয় তবে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য ধরা হয় 26·5 cm। লক্ষণীয় যে এই পাঠের শেষ অঙ্কটির পরিমাপে অনিশ্চয়তা (uncertainty) রয়েছে। সুতরাং পরিমাপে প্রাপ্ত পাঠে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক সংখ্যা = 3।

তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা নির্ণয়ের নিয়ম

তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা নির্ণয়ের নিয়মগুলো নিম্নে দেখানো হলো :

(i) শূন্য নয় এমন সকল অঙ্কই তাৎপর্যপূর্ণ। যেমন 1657 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা হলো চারটি।

(ii) অশূন্য (non-zero) দুটি অঙ্কের মাঝখানে অবস্থিত শূন্যগুলো তাৎপর্যপর্ণ। যেমন 38075 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা হলো পাঁচটি।

(iii) দশমিক বিন্দুর বামদিকে অবস্থিত শূন্যগুলো এবং অশূন্য অঙ্কের বামদিকে শূন্যগুলো তাৎপর্যপূর্ণ নয়। যেমন: 0·000385 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা তিনটি। এই সংখ্যার দশমিক বিন্দুর বামদিকের শূন্য তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক নয়। আবার 3-এর বামদিকে অবস্থিত শূন্য তিনটিও তাৎপর্যপূর্ণ নয়।

(iv) কোনো সংখ্যার বামদিকের প্রথম অশূন্য অঙ্ক থেকে শুরু করে ডানদিকের শেষ অঙ্ক পর্যন্ত সকল অঙ্কই তাৎপর্যপূর্ণ। যেমন 29·570 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা হলো পাঁচটি।

(v) যদি কোনো সংখ্যার দশমিক বিন্দুর পর প্রথম অশূন্য অঙ্কের পূর্বে কিছু শূন্য থাকে তবে ওই শূন্যগুলো তাৎপর্যহীন। যেমন 0·00569 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা হলো তিনটি।

(vi) দশমিক বিন্দুর পরের শূন্য অঙ্কগুলো তাৎপর্যপূর্ণ হয় যদি ওই শূন্যগুলোর পূর্বে কোনো অশূন্য অঙ্ক থাকে। যেমন: 2789·00 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা ছয়টি।

(vii) যদি কোনো পাঠকে এক একক থেকে অন্য এককে রূপান্তরিত করার সময় দশমিক বিন্দুকে সরিয়ে অতিরিক্ত শূন্য বসানো হয় তবে অতিরিক্ত শূন্য অঙ্কগুলো তাপৎপর্যপূর্ণ হয় না। যেমন 408·0 m কে যদি 40800 cm বা 0·4080 km এককে রূপান্তরিত করা হয় তবে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা চারই থাকে।

(viii) যোগ ও বিয়োগের ক্ষেত্রে যে সংখ্যাটির দশমিক চিহ্নের পরের অঙ্কগুলোর সংখ্যা ন্যূনতম, ফলাফলে দশমিকের পরে অঙ্কসংখ্যা তার সমান রাখতে হয়। যেমন 1·256 + 2·7 = 3·956। যোগফলটির তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা হবে 3·9।

(ix) গুণ ও ভাগের ক্ষেত্রে উত্তরফলের তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা হবে সবচেয়ে কম তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যাযুক্ত রাশির সমান। যেমন: $\frac{2{\cdot}312 \times 1{\cdot}5}{1{\cdot}32} = 2{\cdot}627$। এক্ষেত্রে 1·5 এর তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা দুই। অতএব, উত্তরফলের তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা হবে 2·6।

(x) Round off প্রক্রিয়ার মাধ্যমে কোনো রাশিকে নিম্নোক্ত উপায়ে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কবিশিষ্ট রাশিতে প্রকাশ করা হয়।

(ক) নির্দিষ্ট অঙ্কসংখ্যার পরে কোনো অঙ্ক 5-এর বেশি হলে, এর পূর্ববর্তী অঙ্কের সাথে 1 যোগ করে প্রকাশ করা হয়। যেমন: 3·78 = 3·8 আবার, 2·23 = 2·2।

(খ) যে অঙ্কটিকে রাউন্ডিং করা হবে সেটি 5 হলে এবং এর পূর্ববর্তী সংখ্যা অযুগ্ম সংখ্যা হলে পূর্ববর্তী অঙ্কের সাথে 1 যোগ করতে হয়। যুগ্ম সংখ্যা হলে অপরিবর্তিত থাকবে। যেমন: 2·75 = 2·8, কিন্তু 3·45 = 3·4 হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ১.৭

১। 25·65 Ω একটি রোধের মধ্য দিয়ে 2·38 A কারেন্ট প্রবাহিত হচ্ছে। রোধের দুই প্রান্তের বিভব পার্থক্য তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কে নির্ণয় কর।

আমরা জানি বিভব পার্থক্য, V = IR

∴ V = 2·38 × 25·65
= 61·047 volt

এখানে,
I = 2·38 A
R = 25·65 Ω

যেহেতু, 2·38 সংখ্যাটিতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক সংখ্যা তিন। তাই গুণফলে তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা তিন অপেক্ষা বেশি হবে না।

২। একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5·22 m, 3·65 m ও 3·92 m। ঘরটির ক্ষেত্রফল, আয়তন তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যায় প্রকাশ কর।

এখানে,
দৈর্ঘ্য, $l = 5{\cdot}22$ m
প্রস্থ, $b = 3{\cdot}65$ m
উচ্চতা, $h = 3{\cdot}92$ m

আমরা জানি,

ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ
$= 5{\cdot}22 \times 3{\cdot}65 = 19{\cdot}053\ \text{m}^2$

আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা
$= 5{\cdot}22 \times 3{\cdot}65 \times 3{\cdot}92\ \text{m}^3$
$= 74{\cdot}687760\ \text{m}^3$

যেহেতু প্রদত্ত রাশি সব কয়টির তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা 3, সুতরাং ক্ষেত্রফলের সঠিক তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক সংখ্যা হবে 19·1 এবং আয়তনের সঠিক তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা হবে 74·7 m^3।

৩। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6·36 × 10^6 m এবং এর ভর, M = 5·983 × 10^{24} kg। তাৎপর্যপূর্ণ সংখ্যা বিবেচনা করে পৃথিবীর গড় ঘনত্ব নির্ণয় কর।

এখানে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}36 \times 10^6$ m এবং পৃথিবীর ভর, $M = 5{\cdot}983 \times 10^{24}$ kg

আমরা জানি গড় ঘনত্ব, $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{5{\cdot}983 \times 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

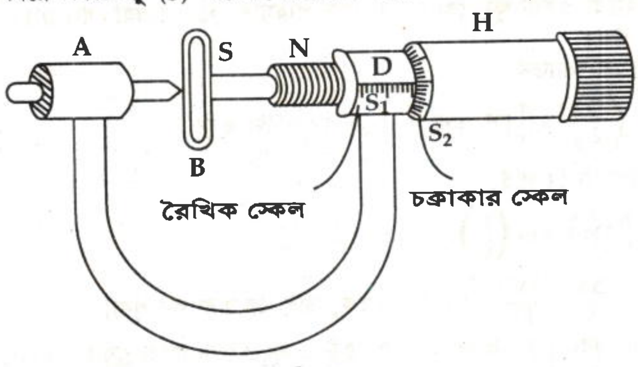
$$\therefore\ \rho = \frac{5{\cdot}983 \times 10^{24}}{\frac{4}{3} \times 3{\cdot}14 \times (6{\cdot}36 \times 10^6)^3} = 0{\cdot}005555 \times 10^6$$
$$= 5{\cdot}55 \times 10^3\ \text{kgm}^{-3}$$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : স্ক্রু গেজের বৃত্তাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা বৃদ্ধি করে আরও অধিক সূক্ষ্ম পরিমাপ করা সম্ভব কি ? যুক্তিসহ বিশ্লেষণ কর।

স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক (Least count)-এর মান যত কম হবে তত সূক্ষ্ম পাঠ নেওয়া সম্ভব। বৃত্তাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা বাড়িয়ে লঘিষ্ঠ ধ্রুবকের মান কমানো যায়। তবে ঘরগুলো এত সূক্ষ্ম হয় যে তা আর খালি চোখে দেখা যায় না। তাই বৃত্তাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা একটি নির্দিষ্ট সীমার বাইরে বৃদ্ধি করা সম্ভব নয়। নিম্নে স্ক্রু গেজ সম্পর্কে আলোচনা করা হলো।

স্ক্রু গেজ
Screw gauge

স্ক্রু গেজ একটি খুব ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য—যেমন: কোনো তারের ব্যাস, পাতলা পাতের বেধ ইত্যাদি পরিমাপের জন্য এটি একটি সূক্ষ্ম পরিমাপ যন্ত্র। স্ক্রু গেজে একটি U-আকৃতির মোটা ধাতব নিরেট দণ্ড থাকে। এর বাম বাহুর ওপরের অংশের ভেতর দিকে একটি ছোট দণ্ড A দৃঢ়ভাবে আটকানো থাকে [চিত্র ১·৩] এবং অন্য বাহুটিতে একটি ফাঁপা চোং H আটকানো থাকে যার মধ্য দিয়ে একটি স্ক্রু (S) সহজেই যাতায়াত করতে পারে। স্ক্রু S-এর B পৃষ্ঠটি সমতল। চোং H-এর



চিত্র ১·৩

ওপরের পৃষ্ঠে একটি নির্দেশক রেখা (reference line) D থাকে। ওই রেখার ঠিক লম্বভাবে একটি রৈখিক মিলিমিটারের স্কেল (S_1) অংশাঙ্কিত থাকে। স্ক্রু-এর মাথায় একটি চোঙাকার ঢাকনা D আটকানো থাকে। D ঢাকনার বামদিকের প্রান্তে একটি সুষম চক্রাকার স্কেল (S_2) থাকে। এই স্কেলে 100টি বা 50টি সমদূরবর্তী দাগ কাটা থাকে। স্ক্রুটি এমনভাবে তৈরি

করা হয় যেন এর একটি পূর্ণ আবর্তনে এটি রৈখিক স্কেল বরাবর 1 mm সরে যায়। একেই স্ক্রু পিচ (screw pitch) বলা হয়।

সুতরাং স্ক্রু পিচ, $P = 1\text{ mm} = 0{\cdot}1\text{ cm}$

ধরা যাক, চক্রাকার স্কেলের মোট দাগ সংখ্যা, $N = 100$

অতএব, স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, $(L.C.) = \frac{P}{N} = \frac{0{\cdot}1}{100}\text{ cm} = 0{\cdot}001\text{ cm}$

সুতরাং স্ক্রু গেজের সাহায্যে 0·001 cm পর্যন্ত ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য সঠিকভাবে পরিমাপ করা যায়।

পরিমাপের পদ্ধতি (Method of measurement) : প্রথমেই খেয়াল করতে হবে যে যন্ত্রটি ত্রুটিমুক্ত কি না। A ও B তলদ্বয় স্পর্শ করলে যদি রৈখিক এবং চক্রাকার উভয় স্কেলের পাঠ শূন্য হয় তবে যন্ত্রটিকে ত্রুটিহীন বলা হয়। যদি যন্ত্রটি ত্রুটিযুক্ত হয় তবে ওই ত্রুটির পরিমাণ নির্ণয় করে পরিমাপের সাথে হিসাব করতে হয়। এবার যে তারের ব্যাস বা ব্যাসার্ধ কিংবা যে পাতের বেধ মাপা হবে সেটিকে স্ক্রু গেজের A ও B-এর মাঝে এমনভাবে স্থাপন করা হয় যাতে A ও B প্রান্ত দুটি তার বা পাতটির পৃষ্ঠ স্পর্শ করে থাকে। এই অবস্থায় দুটি পাঠ নিতে হয়; যথা—

(i) রৈখিক স্কেলের পাঠ (a)

(ii) চক্রাকার স্কেলের পাঠ (b)

এখানে তারের ব্যাস বা পাতের বেধ,

$$d = \text{রৈখিক স্কেলের পাঠ } (a) + \text{চক্রাকার স্কেলের পাঠ } (b) \times \text{লঘিষ্ঠ ধ্রুবক } (c)$$

অর্থাৎ, $d = a + b \times c$

উদাহরণ : ধরি স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, $c = 0{\cdot}001$ cm, রৈখিক স্কেলের পাঠ, $a = 1{\cdot}1$ cm এবং চক্রাকার স্কেলের পাঠ, $b = 32$ ঘর [চিত্র ১·৩]।

$\therefore$ তারটির ব্যাস, $d = a + b \times c$

$= 1{\cdot}1 + 32 \times 0{\cdot}001$

$= 1{\cdot}1 + 0{\cdot}032 = 1{\cdot}132$ cm

গাণিতিক উদাহরণ ১.৮

১। একটি স্ক্রু গেজের চক্রাকার স্কেলটি 100টি সমানভাগে বিভক্ত। এর স্ক্রু পিচ 1 mm। দেখা গেল স্ক্রু গেজটির যান্ত্রিক ত্রুটি −0·02 mm। যন্ত্রটির সাহায্যে একটি তারের ব্যাস পরিমাপের সময় দেখা গেল, মূল স্কেলের পাঠ = 2 mm এবং চক্রাকার স্কেলের পাঠ = 28। তারটির সঠিক ব্যাস কত ?

স্ক্রু গেজটির লঘিষ্ঠ ধ্রুবক $= \dfrac{\text{স্ক্রু পিচ}}{\text{মোট দাগ সংখ্যা}}$

$= \frac{1\text{mm}}{100} = 0{\cdot}01\text{ mm} = 0{\cdot}001\text{ cm}$

তারের ব্যাস, $d' = a + b \times c = 2\text{ mm} + 28 \times 0{\cdot}01 = 2{\cdot}28\text{ mm} = 0{\cdot}228\text{ cm}$

স্ক্রু গেজটির যান্ত্রিক ত্রুটি − 0·02 mm। এই ত্রুটি মোট পাঠের সাথে যোগ করতে হবে। অতএব, তারটির প্রকৃত ব্যাস $d = d' + 0{\cdot}02\text{ mm} = 2{\cdot}28 + 0{\cdot}02 = 2{\cdot}30\text{ mm} = 0{\cdot}230\text{ cm}$

২। স্ক্রু গেজের সাহায্যে একটি ক্ষুদ্র গোলকের ব্যাস পরিমাপ করে পাওয়া গেল 0·11 cm। গোলকটির আয়তন নির্ণয়ে সর্বোচ্চ ত্রুটি নির্ণয় কর।

আমরা জানি গোলকের আয়তন,

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}D^3 \quad \text{এখানে, } D = \text{ গোলকের ব্যাস}$$

উভয় পক্ষের লগারিদম নিয়ে পাই,

$$\ln V = \ln\left(\frac{\pi}{6}D^3\right) = \ln\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3\ln D$$

অবকলন করে পাই, $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta D}{D}$ $\left[\because \frac{\pi}{6} = \text{ধ্রুবক, তাই এর অবকলন শূন্য}\right]$

এখন, $D = 0{\cdot}11$ cm এবং ΔD = ব্যাস পরিমাপে ত্রুটি = স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক = 0·001 cm

$\therefore$ গোলকটির আয়তন পরিমাপে আনুপাতিক ত্রুটি হলো,

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \times \frac{0{\cdot}001}{0{\cdot}11} = 0{\cdot}027$$

$\therefore$ গোলকটির আয়তন নির্ণয়ে সর্বোচ্চ ত্রুটির পরিমাণ $= 0{\cdot}027 \times 100\% = 2{\cdot}7\%$

৩। একটি বস্তুর ভর পরিমাপ করে পাওয়া গেল (90 ± 0·001) g এবং আয়তন পরিমাপ করে পাওয়া গেল (9 ± 0·1) cm³। বস্তুটির ঘনত্ব কত ? বস্তুটির ঘনত্ব নির্ণয়ে পরম ত্রুটির পরিমাণ কত ? ঘনত্ব নির্ণয়ে আনুপাতিক ও শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

আমরা জানি বস্তুর ঘনত্ব,

$$\rho = \frac{\text{ভর (M)}}{\text{আয়তন (V)}} = \frac{90}{9}\,\text{gcm}^{-3} = 10\,\text{gcm}^{-3}$$

উভয় পক্ষের লগারিদম নিয়ে অবকলন করে পাই,

$$\text{আনুপাতিক ত্রুটি} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dM}{M} + \frac{dV}{V}$$

$$\therefore \quad d\rho = \rho\left(\frac{dM}{M} + \frac{dV}{V}\right)$$

$$= 10\left(\frac{0·001}{90} + \frac{0·1}{9}\right)\text{gcm}^{-3}$$

$$= 10\,(0·000011 + 0·011)$$

$$= 10 \times 0·011011 = 0·11011\ \text{gcm}^{-3}$$

$\therefore$ বস্তুটির ঘনত্ব নির্ণয়ে পরম ত্রুটি = $0·11011\ \text{gcm}^{-3}$

$$\text{আনুপাতিক ত্রুটি} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dM}{M} + \frac{dV}{V} = \frac{0·001}{90} + \frac{0·1}{9} = 0·011011$$

$$\text{ঘনত্ব নির্ণয়ে শতকরা ত্রুটি} = \frac{d\rho}{\rho} \times 100\% = 0·011011 \times 100\% = 1·1011\%$$

১·১৪ ব্যবহারিক
Experimental

স্ফেরোমিটারের ব্যবহার (Use of spherometer)

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২.৫	স্ফেরোমিটারের সাহায্যে গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় Determination of the radius of curvature of a spherical surface by a spherometer

স্ফেরোমিটার বিশেষভাবে তৈরি একটি যন্ত্র। এর সাহায্যে কোনো গোলীয় তলের ব্যাসার্ধ বা কোনো সরু কাচের প্লেটের বেধ পরিমাপ করা যায়। চিত্র ১·৪–এ যন্ত্রটা দেখানো হয়েছে।

মূলতত্ত্ব (Theory) : কোনো বক্রতল যে গোলকের অংশবিশেষ, ওই গোলকের ব্যাসার্ধকে বক্রতলের বক্রতার ব্যাসার্ধ বলা হয়। একে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \quad \text{বক্রতার ব্যাসার্ধ, } R = \left(\frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}\right)$$

এখানে, d = স্ফেরোমিটারের তিন পায়ের গড় দূরত্ব

এবং h = তিনটি পায়ের তল হতে বক্রতলের উচ্চতা কিংবা নিম্নতা।

স্ফেরোমিটারের পাঠ = প্রধান স্কেলের পাঠ + বৃত্তাকার স্কেলের পাঠ × লঘিষ্ঠ মান

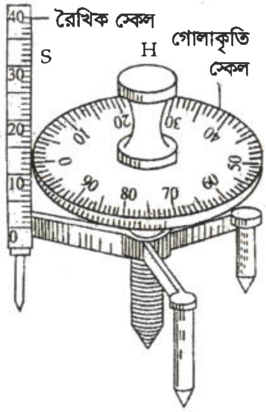
যন্ত্রপাতি (Apparatus): (১) স্ফেরোমিটার, (২) সমতল প্লেট, (৩) বক্রতল, (৪) মিটার স্কেল ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি বা কাজের ধারা (Working procedure) :

(১) স্ফেরোমিটারের ক্ষুদ্রতম ভাগের মান ও গোলাকৃতি স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা জেনে যন্ত্রের পিচ ও লঘিষ্ঠ ধ্রুবক বের করা হয়।

(২) যন্ত্রের ত্রুটি আছে কি না তাও বের করা হয়।

(৩) স্ফেরোমিটারটি সমতল পাতের ওপর স্থাপন করা হয়। স্ক্রুর মাথা এমনভাবে ঘুরানো হয় যেন তার অগ্রভাগ সমতল পাত স্পর্শ করে।



চিত্র ১·৪

(৪) রৈখিক ও গোলাকৃতি স্কেলের পাঠ নেয়া হয়। গোলাকৃতি স্কেলের পাঠকে লঘিষ্ঠ ধ্রুবক দ্বারা গুণ করে খণ্ড অংশ বা ভগ্নাংশ বের করা হয়। রৈখিক স্কেলের পাঠের সাথে ভগ্নাংশ যোগ করে মোট পাঠ বের করা হয়।

(৫) উপরিউক্ত প্রক্রিয়ায় কয়েকবার পাঠ নিয়ে তার গড় মান বের করা হয়।

(৬) এখন স্ফেরোমিটারটি বক্রতলের উপর স্থাপন করা হয়। স্ক্রুর মাথা আস্তে আস্তে উপরে উঠান হয় এবং এমনভাবে স্থাপন করা হয় যেন তার অগ্রভাগ বক্রতলের সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন বিন্দু স্পর্শ করে। উপরের নিয়ম অনুযায়ী রৈখিক স্কেল ও গোলাকৃতি স্কেলের পাঠ নিয়ে মোট পাঠ বের করা হয়। কয়েকবার পাঠ নিয়ে গড় মান নির্ণয় করা হয়। এই দুই পাঠের (অর্থাৎ ৫নং ও ৬নং পাঠ) অন্তরফলই হলো h।

(৭) মিটার স্কেলের সাহায্যে তিনটি পায়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব মেপে তাদের গড় মান বের করা হয়। এটাই হলো d-এর মান।

(৮) এখন h এবং d-এর মান তালিকাভুক্ত করে R-এর মান বের করা হয়।

লঘিষ্ঠ ধ্রুবক নির্ণয় :

রৈখিক স্কেলের ক্ষুদ্রতম ভাগের মান = x মিমি

পিচ = x মিমি

গোলাকৃতি স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা = y

$$\text{লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, K} = \frac{\text{পিচ}}{\text{গোলাকৃতি স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা}}$$

$$= \frac{x}{y} \text{ মিমি} = \ldots \text{ মিমি}$$

স্ফেরোমিটারের পা তিনটির মধ্যবর্তী দূরত্ব = d = ... মিমি।

পর্যবেক্ষণ ও সন্নিবেশন (Observation and manipulation) :

ছক ১ : সমতল কাচ প্লেটে পাঠ

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	রৈখিক স্কেল পাঠ = M মিমি	গোলাকার স্কেল পাঠ = C	লঘিষ্ঠ ধ্রুবক = K মিমি	খণ্ড অংশ বা ভগ্নাংশ F = C×K মিমি	মোট পাঠ = M + F মিমি	গড় পাঠ X মিমি	যান্ত্রিক ত্রুটি = ± x মিমি	শুদ্ধ পাঠ X′ = X −(± x) মিমি
1								
2								
3								

ছক ২ : বক্রতলে পাঠ

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	রৈখিক স্কেল পাঠ = M মিমি	গোলাকার স্কেল পাঠ = C	লঘিষ্ঠ ধ্রুবক = K মিমি	খণ্ড অংশ বা ভগ্নাংশ F = C×K মিমি	মোট পাঠ = M + F মিমি	গড় পাঠ X মিমি	যান্ত্রিক ত্রুটি = ± x মিমি	শুদ্ধ পাঠ X′ = X −(± x) মিমি
1								
2								
3								

হিসাব বা গণনা (Calculation) :

$R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}$; এখানে $d = \ldots$ মিমি

এবং $h = (Y' - X') = \ldots$ মিমি

$\therefore$ R $= \ldots$ সেমি $= \ldots$ মিটার (m)

ফলাফল (Result) : নির্ণেয় বক্রতার ব্যাসার্ধ, R = ... সেমি = ... m

সতর্কতা (Precautions) : (১) পিছট ত্রুটি দূর করার জন্য স্ক্রুর মাথা সর্বদা একই দিকে ঘুরানো উচিত।

(২) সমতল কাচ পাতের ওপর ও পরীক্ষণীয় কাচ পাতের ওপর স্ক্রুর মিলন তার ছায়া দ্বারা নির্ণয় করা হয়।

(৩) স্ক্রুর প্রান্ত বক্রতল ও কাচ পাতের গায়ে আলতোভাবে স্পর্শ করেছে কি না তা সতর্কতার সাথে নির্ণয় করতে হবে।

আলোচনা (Discussion) : বক্রতল সুষম না হওয়ায় নির্ণেয় বক্রতার ব্যাসার্ধে ত্রুটি দৃষ্ট হয়।

উদাহরণ : একটি স্ফেরোমিটারের গোলাকার স্কেল 100টি দাগে সমানভাবে চিহ্নিত করা রয়েছে এবং গোলাকার স্কেলের একবার পূর্ণ আবর্তনে রৈখিক স্কেল 0·01 cm এগিয়ে যায়। স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক নির্ণয় কর।

এখানে রৈখিক স্কেলের ক্ষুদ্রতম ভাগের মান = 0·01 cm

গোলাকার স্কেলের মোট পাঠ সংখ্যা = 100

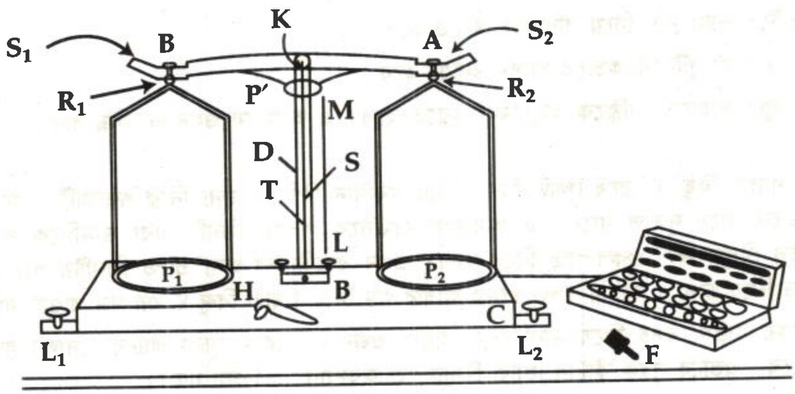
$\therefore$ লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, $K = \frac{0.01}{100}\text{ cm} = 1 \times 10^{-4}\text{ cm}$

পরীক্ষণের নাম : **পিরিয়ড : ২.৫**	**নিক্তির সাহায্যে দোলন পদ্ধতিতে বস্তুর ভর নির্ণয়** **Determination of mass of a body by the method of oscillation using a balance**

পরীক্ষাগারে সাধারণত যে নিক্তি ব্যবহার করা হয় তা নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো।

নিক্তির বিবরণ (Description of the balance) :

নিক্তির ভিত্তি হিসেবে একটি কাঠের পাটাতন B থাকে। পাটাতনের নিম্নাংশে লেবেল স্ক্রু L_1, L_2 যুক্ত থাকে। স্ক্রু দুটি ঘুরিয়ে নিক্তি স্তম্ভকে উল্লম্ব করা যায়। T হচ্ছে কাঠ ফলকের উপর লম্বভাবে দণ্ডায়মান ধাতু নির্মিত একটি ফাঁপা স্তম্ভ। একে নিক্তির পিলার (pillar) বলে। এর সাথে একটি ধাতব ফ্রেম যুক্ত থাকে। একটি হাতল H-এর সাহায্যে একটি ধাতব নির্মিত দৃঢ় শলাকা D-কে এই স্তম্ভের মাধ্যমে খাড়াভাবে উঠানো-নামানো যায়। নিক্তি দণ্ড D-এর উপর



চিত্র ১·৫

একটি এগেট পাথরের প্লেট (P′) আটকানো থাকে। নিক্তি দণ্ড AB একটি দৃঢ় ধাতব দণ্ড। এই দণ্ডের ভারকেন্দ্র বরাবর একটি এগেট পাথরের ত্রিশিরা টুকরা (K) যুক্ত থাকে। নিক্তি শলাকা D-কে ওপরে উঠালে নিক্তি দণ্ড নিক্তি স্তম্ভের ফ্রেম

থেকে মুক্ত হয়। এ অবস্থায় দণ্ডের ধারাল এগেট খণ্ডটি একটি সমতল এগেট খণ্ডের ওপরে অবস্থান করে। এর ফলে নিক্তি দণ্ড বাধাহীনভাবে দুলতে থাকে। নিক্তি দণ্ডের ভারকেন্দ্রের ঠিক ওপরে একটি লম্বা সরু কাঁটা লাগানো থাকে। একে নিক্তির সূচক কাঁটা বলে। এই কাঁটাটি নিক্তি স্তম্ভ T-এর পাদদেশে সংযুক্ত একটি স্কেল S-এর ওপরে মুক্তভাবে চলাচল করতে পারে।

P_1, P_2 দুটি পাল্লা নিক্তি দণ্ডের দুই প্রান্তে সংযুক্ত ধারাল ইস্পাত খণ্ডের ওপরে বসানো স্টিরাপ R_1, R_2 হতে হুকের সাহায্যে ঝুলানো থাকে। নিক্তি দণ্ডের দুই প্রান্তে দুটি স্ক্রু S_1, S_2 রয়েছে। এই স্ক্রু দুটিকে ঘুরিয়ে নিক্তি দণ্ডের ভারকেন্দ্রকে এগেট খণ্ডের ওপর রাখা হয়। নিক্তি স্তম্ভ উল্লম্ব আছে কি না দেখার জন্য একটি ওলন সুতা ML লাগানো থাকে।

সঠিক ওজন নির্ণয় করতে যাতে অসুবিধা না হয় সেজন্য পাল্লাযুক্ত একটি কাচের বাক্সের মধ্যে নিক্তিটি স্থাপন করা হয়। পাল্লা ইচ্ছেমতো খোলা বা বন্ধ করা যায়।

তত্ত্ব (Theory) : নিক্তি দ্বারা ওজন নেবার সময় নিক্তি শলাকাটি ওপরে উঠালে সূচক কাঁটা ডানে-বামে দুলতে থাকে। ধীরে ধীরে দোলনের বিস্তার কমতে থাকে এবং এক সময় এটি স্থিতি অবস্থায় আসে।

মনে করা যাক, উভয় পাল্লায় বাটখারা শূন্য অবস্থায় সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দু X। যে বস্তুটির ওজন নেয়া হবে সেটি বাম পাল্লায় এবং প্রয়োজনীয় বাটখারা ডান পাল্লায় স্থাপন করা হয়। বাম পাল্লায় বস্তু স্থাপন এবং ডান পাল্লায় বাটখারা (W_1 + 10 মিলিগ্রাম) থাকা অবস্থায় সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দু Y। এবার বাম পাল্লায় পূর্বোক্ত বস্তু এবং ডান পাল্লায় বাটখারা (W_1 + 20 মিলিগ্রাম) থাকা অবস্থায় স্থিতি বিন্দু Z হলে, অতিরিক্ত 10 মিলিগ্রাম ওজনের জন্য সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দুর অবস্থানের পরিবর্তন হয় Z — Y ঘর বা ভাগ সংখ্যা (divisions)।

সুতরাং, স্থিতি বিন্দুর এক ভাগ সংখ্যা পরিবর্তনের জন্য ওজনের পরিবর্তন হবে,

$$\frac{10}{Z-Y} \text{ মিলিগ্রাম} = \frac{10}{Z-Y} \times \frac{1}{1000} \text{ গ্রাম} = \frac{1}{(Z-Y)\times 100} \text{ গ্রাম}$$

∴ স্থিতি বিন্দুর (Z — X) ভাগ সংখ্যা পরিবর্তনের জন্য ওজনের পরিবর্তন হবে,

$$\frac{1}{(Z-Y)\times 100}(Z-X) = \frac{(Z-X)}{(Z-Y)\times 100}$$

অতএব, বস্তুটির প্রকৃত ওজন,

$$W = \left[W_1 + \frac{(Z-X)}{(Z-Y)\times 100}\right] \text{ গ্রাম} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

যন্ত্রপাতি (Apparatus) : সাধারণ নিক্তি, ওজন বাক্স, ওজন নির্ণীতব্য বস্তু ইত্যাদি।

কার্যপ্রণালি (Working procedure) :

(১) পাল্লা দুটিকে নরম ব্রাশ দিয়ে পরিষ্কার করতে হবে।

(২) স্টিরাপ ও পাল্লা দুটি সঠিকভাবে স্থাপন করতে হবে।

(৩) লেবেল স্ক্রুর সাহায্যে নিক্তিকে অনুভূমিক করতে হবে। এ অবস্থায় ওলন m_1 নিম্ন প্রান্ত m_2 এর মাথা বরাবর অবস্থান করবে।

(৪) কোনো পাল্লায় কিছু না রেখে স্থিতি বিন্দু X-এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য নিক্তি শলাকাটি ওপরে উঠাতে হবে। এতে সূচক কাঁটা ডানে-বামে দুলতে থাকে। এ অবস্থায় বামদিকে পরপর তিনটি এবং ডানদিকে পরপর দুটি সূচক কাঁটার দিক পরিবর্তন বিন্দুর জন্য স্কেল পাঠ নিতে হবে। এখন বামদিকের জন্য প্রাপ্ত তিনটির গড় এবং ডানদিকের জন্য প্রাপ্ত দুটির গড় নিয়ে ডান ও বামের প্রাপ্ত গড়ের আবার গড় নিয়ে স্থিতি বিন্দু X এর গড় পাওয়া যাবে।

(৫) বামদিকের পাল্লায় বস্তু নিয়ে ডানদিকের পাল্লায় ওজন W_1 রেখে সূচক কাঁটার দোলন লক্ষ করে ওপরের নিয়মে পাঠ নিতে হবে। এভাবে সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দুর গড় অবস্থান Y পাওয়া যাবে।

(৬) বামদিকের পাল্লায় বস্তুটিকে না সরিয়ে এবার ডানদিকের পাল্লায় ওজনের সাথে আরও 10 মিলিগ্রাম ওজন দিয়ে ওপরের পদ্ধতি অনুসরণ করে সূচক কাঁটার স্থিতি বিন্দুর গড় অবস্থান Z নির্ণয় করতে হবে।

(৭) সমীকরণ (i) ব্যবহার করে বস্তুটির নির্ণেয় ওজন বের করতে হবে।

পরীক্ষালব্ধ ছক–১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	বাম পাল্লায় ভর (g)	ডান পাল্লায় ভর (g)	প্রত্যাবর্তন বিন্দুর (Turning Point) অবস্থান				স্থিতি বিন্দু $=\frac{1}{2}(x+y)$
			বাম	গড় (x)	ডান	গড় (y)	
1 2 3	0	0	....		....		X =
1 2 3	বস্তু	$W_1 = ...(g)$	....		....		Y =
1 2 3	বস্তু	$W_1 + 0.01 = ...(g)$	....		....		Z =

হিসাব : বস্তুর প্রকৃত ওজন, $W_1 = \left[W_1 + \frac{(Z-X)}{(Z-Y)\times 100}\right]$ গ্রাম

ফলাফল : নির্ণেয় বস্তুর প্রকৃত ভর, W = ... গ্রাম

সতর্কতা (Precautions) :

(১) পাটাতনের স্ক্রুগুলোকে যথাযথ দিকে ঘুরিয়ে নিক্তি স্তম্ভকে উল্লম্ব করতে হবে।
(২) স্টিরাপকে আবদ্ধ না করে পাল্লায় ওজন রাখা বা ওজন সরানো উচিত নয়।
(৩) নিক্তি শলাকাকে ওপরে উঠাবার পূর্বে কাচবাক্সের ঢাকনা বন্ধ করা উচিত।
(৪) পাল্লাসহ পুরা নিক্তি ধুলাবালিমুক্ত তথা পরিষ্কার রাখতে হবে।
(৫) লম্বন ত্রুটি পরিহার করে পাঠ নিতে হবে।
(৬) নিক্তি দণ্ড ও সূচকের মুক্ত দোলন তথা অবাধ চলাচল নিশ্চিত করতে হবে।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

পরম ত্রুটি = প্রকৃত মান – পরিমাপ্য মান ... ... (1)

শতকরা ত্রুটি = $\frac{\text{প্রকৃত মান} \sim \text{পরীক্ষালব্ধ মান}}{\text{প্রকৃত মান}} \times 100\%$ = ভুলের হার ... ... (2)

প্রমাণ বিচ্যুতি, $D = \frac{\sqrt{\sum d^2}}{n}$ ... ... (3)

বক্রতার ব্যাসার্ধ, $R = \left(\frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}\right)$ ... ... (4)

লঘিষ্ঠ ধ্রুবক, $k = \frac{S}{n} = \frac{\text{যন্ত্রের পিচ}}{\text{বৃত্তাকার স্কেলের ভাগ সংখ্যা}}$ ... ... (5)

$E = m_0c^2$ ... ... (6)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ... ... (7)

গোলকের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ ... ... (8)

গোলকের আয়তন, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ... ... (9)

সিলিন্ডারের আয়তন, $V = \pi r^2 l$ ... ... (10)

প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ ... ... (11)

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। একটি পরীক্ষায় কিছু মৌলিক কণার ভর 10 amu পাওয়া গেল। উক্ত ভর কয়টি ইলেকট্রনের ভরের সমান হবে ? উক্ত সংখ্যক ইলেকট্রন মৌলিক কণায় থাকতে পারে কি ?

আমরা জানি, 1 amu বা 1 u = 1.66×10^{-27} kg ও 1টি ইলেকট্রনের ভর = 9.1×10^{-31} kg

ধরি, nটি ইলেকট্রন ভরের সমান হবে 10 amu

$\therefore$ 10 amu = $n \times$ 1টি ইলেকট্রনের ভর

বা, $10 \times 1.66 \times 10^{-27}$ kg $= n \times 9.1 \times 10^{-31}$ kg

$$\therefore \quad n = \frac{10 \times 1.66 \times 10^{-27}}{9.1 \times 10^{-31}} = 1.82 \times 10^4 \text{ টি।}$$

উক্ত সংখ্যক ইলেকট্রন মৌলিক কণায় থাকা সম্ভব।

২। আনিস স্ফেরোমিটারের সাহায্যে একটি উত্তল লেন্সের উচ্চতা পরিমাপ করে গড় উচ্চতা 5.21 cm এবং সমতল কাচ প্লেটের উচ্চতা 0.25 cm পেল। স্ফেরোমিটারের তিন পায়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব যথাক্রমে 6.3 cm, 6.5 cm ও 6.4 cm।

(ক) উত্তল লেন্সটির বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। লেন্সের গভীরতা ও কাচ প্লেটের উচ্চতা একই।

(খ) লেন্সটি উত্তল না হয়ে অবতল লেন্স হলে বক্রতার ব্যাসার্ধের কোনো পরিবর্তন পরিলক্ষিত হতো কি ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) মনে করি লেন্সটির বক্রতার ব্যাসার্ধ R। এখানে স্ফেরোমিটারের পা-গুলোর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d_1 = 6.3$ cm, $d_2 = 6.5$ cm, $d_3 = 6.4$ cm।

সুতরাং, স্ফেরোমিটারের পা-গুলোর মধ্যবর্তী গড় দূরত্ব,

$$d = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3} = \frac{6.3 + 6.5 + 6.4}{3} = 6.4 \text{ cm}$$

তলের উচ্চতা, $h = 5.21 \text{ cm} - 0.25 \text{ cm} = 4.96 \text{ cm}$

আমরা জানি,

$$R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2} = \frac{(6.4)^2}{6 \times 4.96} + \frac{4.96}{2} = 3.86 \text{ cm}$$

$\therefore \quad R = 3.86$ cm

(খ) লেন্সটি উত্তল না হয়ে অবতল হলেও বক্রতার ব্যাসার্ধের কোনো পরিবর্তন হবে না। এর সপক্ষে মতামত নিম্নরূপ :

এখানে, স্ফেরোমিটারের পা-গুলোর মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$$d = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3} = \frac{6.3 + 6.5 + 6.4}{3} = 6.4 \text{ cm}$$

অবতল লেন্সের গভীরতা = 5.21 cm

কাচ প্লেটের উচ্চতা = 0.25 cm

$\therefore$ বক্রতলের উচ্চতা, $h = 0.25 \text{ cm} - 5.21 \text{ cm} = -4.96 \text{ cm}$

ঋণাত্মক চিহ্ন অবতল লেন্সের নিচের দিকে সরণ নির্দেশ করে।

আমরা জানি,

$$R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2} = \frac{(6.4)^2}{6 \times 4.96} + \frac{4.96}{2} = 3.86 \text{ cm}$$

$\therefore \quad R = 3.86$ cm

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে বক্রতার ব্যাসার্ধ উভয় ক্ষেত্রে একই। অর্থাৎ লেন্স উত্তল বা অবতল যাই হোক না কেন বক্রতার ব্যাসার্ধের কোনো পরিবর্তন হবে না।

৩। একটি স্ফেরোমিটারের পরিধি 100টি সমান দাগে চিহ্নিত করা হয়েছে এবং গোলাকৃতি স্কেলের একটি পূর্ণ আবর্তনে প্রধান স্কেল 1 mm এগিয়ে যায়।

(ক) স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক নির্ণয় কর।

(খ) এই স্ফেরোমিটারের সূক্ষ্মতা বাড়াতে গিয়ে গোলাকৃতি স্কেলের ঘরসংখ্যা ইচ্ছেমতো বাড়ানো সম্ভব কী? যুক্তি দাও।

(ক) এখানে $P = 1\text{ mm} = 0{\cdot}1\text{ cm}$ এবং $N = 100$

$\therefore$ লঘিষ্ঠ ধ্রুবক $= \frac{P}{N} = \frac{0{\cdot}1}{100}\text{ cm} = 0{\cdot}001\text{ cm}$ বা $1 \times 10^{-3}\text{ cm}$

(খ) আমরা জানি, স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক যত কম হবে এর সূক্ষ্মতা তত বাড়বে। চক্রাকার স্কেলের ঘর-সংখ্যা বৃদ্ধি করে এই লঘিষ্ঠ ধ্রুবক কমানো যায়; কিন্তু এর ফলে ঘরগুলোকে খালি চোখে আলাদা করা সম্ভব হয় না; তাই ঘরসংখ্যা ইচ্ছেমতো বৃদ্ধি করা সম্ভব নয়।

৪। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য $(0{\cdot}6 \pm 0{\cdot}01)$ m এবং পর্যায়কাল $(2{\cdot}4 \pm 0{\cdot}12)$ sec।

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত সরল দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণ পরিমাপে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

(খ) একজন ছাত্র আইনস্টাইনের বিখ্যাত ভরের আপেক্ষিকতা সমীকরণটি লিখতে ভুলক্রমে $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$ লিখে ফেলে। এখানে সে সমীকরণে আলোর বেগ রাশি c লিখতে ভুলে যায়। সমমাত্রিক নীতির সাহায্যে দেখাও যে ছাত্রটি সমীকরণে কোথায় c লিখতে ভুল করেছিল।

(ক) আমরা জানি সরল দোলকের পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\therefore \quad g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি,

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2 \times \Delta T}{T} = \frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}6} + 2 \times \frac{0{\cdot}12}{2{\cdot}4}$$
$$= \frac{0{\cdot}04 + 0{\cdot}24}{2{\cdot}4} = \frac{0{\cdot}28}{2{\cdot}4}$$

$\therefore$ শতকরা ত্রুটি, $\frac{\Delta g}{g} \times 100 = \frac{0{\cdot}28}{2{\cdot}4} \times 100 = 11{\cdot}67\%$

(খ) সমমাত্রিক নীতি অনুসারে সঠিক সম্পর্ক বা সমীকরণের উভয় দিকের মাত্রা সব সময় অভিন্ন হবে। তাই সমীকরণ,

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$ –এ সমমাত্রিক নীতি অনুসারে $(1-v)^{\frac{1}{2}}$–এর মাত্রা থাকবে না। সুতরাং, v^2-কে c^2 দ্বারা ভাগ করতে হবে।

সুতরাং সঠিক সমীকরণটি হলো, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

৫। কাচের প্রতিসরাঙ্ক নির্ণয়ের একটি পরীক্ষায় বিভিন্ন পরিমেয় মানগুলো হলো 1·53, 1·55, 1·56, 1·54, 1·48, 1·49, 1·51।

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত কাচের প্রতিসরাঙ্কের আপেক্ষিক ত্রুটি ও শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর।

(খ) কোনো গ্যাসীয় মাধ্যম শব্দের বেগ (v), মাধ্যমের ঘনত্ব (ρ) এবং স্থিতিস্থাপকতা (E)-এর ওপর নির্ভর করে। গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগের সমীকরণ গাণিতিকভাবে প্রতিষ্ঠা কর।

(ক) প্রতিসরাঙ্কের গড় মান, $\bar{\mu} = \frac{1{\cdot}53 + 1{\cdot}55 + 1{\cdot}56 + 1{\cdot}54 + 1{\cdot}48 + 1{\cdot}49 + 1{\cdot}51}{7}$

$$= \frac{10{\cdot}66}{7} = 1{\cdot}54$$

গড় মানকে প্রকৃত মান ধরলে পরিমাপে পরম ত্রুটিসমূহ—

(i) $1{\cdot}54 - 1{\cdot}53 = 0{\cdot}01$, (ii) $1{\cdot}54 - 1{\cdot}55 = -0{\cdot}01$ (iii) $1{\cdot}54 - 1{\cdot}56 = -0{\cdot}02$

(iv) $1{\cdot}54 - 1{\cdot}54 = 0{\cdot}00$ (v) $1{\cdot}54 - 1{\cdot}48 = 0{\cdot}06$ (vi) $1{\cdot}54 - 1{\cdot}49 = 0{\cdot}05$

(vii) $1{\cdot}54 - 1{\cdot}51 = 0{\cdot}03$

পরম ত্রুটির গড়, $\Delta\bar{\mu} = \dfrac{0.01 + 0.01 + 0.02 + 0.00 + 0.06 + 0.05 + 0.03}{7}$

$\Delta\bar{\mu} = 0.0257$

প্রতিসরাঙ্ক μ পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি, $\delta\mu = \dfrac{\Delta\bar{\mu}}{\mu} = \dfrac{0.0257}{1.54} = 0.017$

(খ) ধরা যাক, $v \propto \rho^x$ এবং $v \propto E^y$

$\therefore \quad v \propto \rho^x E^y = K\rho^x E^y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$

[এখানে K হলো একটি মাত্রাহীন ধ্রুবক]

এখন, v, ρ ও E এর মাত্রা হলো,

v-এর মাত্রা $= [LT^{-1}]$

ρ-এর মাত্রা $= [ML^{-3}]$

E-এর মাত্রা $= [ML^{-1}T^{-2}]$

সমীকরণ (i)-এর উভয় পক্ষের রাশিগুলোর মাত্রা বসিয়ে পাই,

$$[LT^{-1}] = [ML^{-3}]^x\,[ML^{-1}T^{-2}]^y$$

$$= M^{x+y}\,L^{-3x-y}\,T^{-2y} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

এখন সমীকরণ (ii)-এর উভয় পক্ষের M, L, T-এর ঘাত সমান করে পাই,

$x + y = 0, \quad -3x - y = 1$ এবং $-2y = -1$

$\therefore \quad y = \dfrac{1}{2}$ এবং $x = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad v = K\rho^{-\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}} = K\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

পরীক্ষা থেকে পাওয়া যায় $K = 1$

$\therefore$ বায়ু মাধ্যমে বা অন্য কোনো গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

৬। (ক) $C = (3.0 \pm 0.1)\,\mu F$ ধারকত্বের কোনো ধারককে $V = (30 \pm 0.3)$ volt বিভবে আহিত করা হলে ধারকটিতে সঞ্চিত আধান ত্রুটিসহ নির্ণয় কর।

(খ) একটি r ব্যাসার্ধের গোলক η সান্দ্রতাঙ্কের তরলের মধ্য দিয়ে সীমান্ত বেগ v-এ পতনশীল। গোলকটির ওপর সান্দ্রতাজনিত ঊর্ধ্বমুখী বল F ক্রিয়াশীল। F বলটি r, η এবং v-এর ওপর নির্ভর করে। মাত্রা সমীকরণের সাহায্যে বল F-এর সমীকরণ বের কর।

(ক) ধারকে সঞ্চিত আধান, $Q = CV = 3.0 \times 10^{-6} \times 30$ কুলম্ব $= 9.0 \times 10^{-5}$ কুলম্ব

এখন, আধান Q-এর আপেক্ষিক ত্রুটি, $\dfrac{\Delta Q}{Q} = \dfrac{\Delta C}{C} + \dfrac{\Delta V}{V}$

সুতরাং শতকরা ত্রুটি, $\dfrac{\Delta Q}{Q} \times 100\% = \dfrac{\Delta C}{C} \times 100\% + \dfrac{\Delta V}{V} \times 100\%$

$$= \left(\frac{0.1}{3} + \frac{0.3}{30}\right) \times 100\% = 4.33\%$$

$\therefore$ নির্ণেয় আধান, $Q = 9.0 \times 10^{-5} \pm 4.33\%$ কুলম্ব

$= (9.0 \pm 0.39) \times 10^{-5}$ কুলম্ব

(খ) ধরা যাক, $F = Kr^x \eta^y v^z$ ... ... (1)

এখন, F, r, η, v-এর মাত্রা সমীকরণ $F = MLT^{-2}$, $r = L$, $\eta = ML^{-1}T^{-1}$, $v = LT^{-1}$

$\therefore \quad MLT^{-2} = [L^x]\,[ML^{-1}T^{-1}]^y\,[LT^{-1}]^z$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii)-এর উভয় পার্শ্বের দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়ের মাত্রা তুলনা করে পাই,

$x - y + z = 1$ ... ... (iii)

$y = 1$ ... ... (iv)

এবং $-y - z = -2$ ... ... (v)

সমীকরণ (iii), (iv) ও (v) সমাধান করে পাই,

$x = 1, y = 1$ এবং $z = 1$

$\therefore \quad F = Kr\eta v$

সুতরাং F-এর মাত্রা সমীকরণ $F = Kr\eta v$

৭। (ক) S.I. এবং C.G.S. পদ্ধতিতে কাজের একক যথাক্রমে joule এবং erg। 1 joule কাজ কত erg কাজের সমান নির্ণয় কর।

(খ) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণটি নির্ভুল কি না মাত্রা বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও।

(ক) আমরা জানি, কাজের মাত্রা ML^2T^{-2}

ধরা যাক, C.G.S. পদ্ধতিতে ভর, দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক যথাক্রমে m_1, l_1 ও t_1 এবং S.I. পদ্ধতিতে ভর, দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক যথাক্রমে m_2, l_2 ও t_2।

ধরা যাক, 1 joule = n erg

সুতরাং, কাজের মাত্রা অনুযায়ী লেখা যায়,

$$1 \times m_2 l_2^2 t_2^{-2} = n \times m_1 l_1^2 t_1^{-2}$$

বা, $$n = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \times \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{-2}$$

$$= \frac{1\,kg}{1\,g} \times \left(\frac{1\,m}{1\,cm}\right)^2 \times \left(\frac{1\,s}{1\,s}\right)^{-2} \qquad \left[\because \begin{array}{l} m_2 = 1\,kg, l_2 = 1m, t_2 = 1s, \\ m_1 = 1\,g, l_1 = 1\,cm, t_1 = 1s \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad n = \frac{10^3\,g}{1\,g} \times \left(\frac{10^2\,cm}{1\,cm}\right)^2 \times 1 = 10^7$$

$\therefore \quad$ 1 Joule = 10^7 erg

(খ) এখানে s-এর মাত্রা [L], u-এর মাত্রা $[LT^{-1}]$ এবং a-এর মাত্রা $[LT^{-2}]$

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটির বামপক্ষের রাশির মাত্রা = [L]

এবং ডান পক্ষের প্রথম পদটি (ut)-এর মাত্রা = $[LT^{-1}]\,[T] = [L]$

দ্বিতীয় পদ (at^2)-এর মাত্রা = $[LT^{-2}]\,[T^2] = [L]$

সুতরাং, সমীকরণটির উভয় পক্ষের মাত্রা [L]। সুতরাং সমীকরণটি সঠিক।

সার-সংক্ষেপ

ভৌত জগৎ	:	যেসব জিনিসের জীবন নেই, তার নাম ভৌত জগৎ।
জীব জগৎ	:	যার জীবন আছে তা হলো জীব জগৎ।
পরিমাপ	:	কোনো কিছুর মাপজোখের নাম পরিমাপ।
রাশি	:	যেসব জিনিসের পরিমাপ করা যায়, তার নাম রাশি।
একক	:	কোনো একটি রাশিকে পরিমাপ করতে হলে তার একটি নির্দিষ্ট অংশকে আদর্শ হিসেবে ধরে নিয়ে রাশিটি পরিমাপ করা হয়। পরিমাপের এই আদর্শকে একক বলা হয়।

এককের প্রকারভেদ : একক তিন প্রকার, যথা—
(ক) মৌলিক একক
(খ) লব্ধ, প্রাপ্ত বা যৌগিক একক
(গ) ব্যবহারিক একক
মৌলিক একক তিনটি, যথা— দৈর্ঘ্যের একক, ভরের একক এবং সময়ের একক।

মৌলিক একক : যে একক অন্য কোনো এককের ওপর নির্ভর করে না এবং একেবারে স্বাধীন তাকে মৌলিক একক বলে।

লব্ধ বা যৌগিক একক : তিনটি মৌলিক একককে ভিত্তি করে যে একক গঠন করা হয় বা মৌলিক একক হতে যে একক পাওয়া যায় তাকে লব্ধ বা যৌগিক একক বলে।

ব্যবহারিক একক : কোনো কোনো মৌলিক একক খুব বড় বা ছোট হওয়ায় ব্যবহারিক কাজে তাদের উপগুণিতক (ভগ্নাংশ) বা গুণিতককে একক হিসেবে ব্যবহার করা হয়। এর নাম ব্যবহারিক একক।

মাত্রা : কোনো একটি রাশি এবং তার মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য যে সঙ্কেত ব্যবহার করা হয় তাকে উক্ত রাশির মাত্রা বলে।

মাত্রা সমীকরণ : কোনো ভৌত রাশি যদি একাধিক রাশির ওপর নির্ভর করে, তবে দুই পাশের রাশিগুলোর মান না লিখে কেবলমাত্র মাত্রা লিখলে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাকে রাশিগুলোর মাত্রা সমীকরণ বলে।

নিয়মিত ত্রুটি : পরীক্ষাকালে কোনো কোনো ত্রুটির ফলে পরীক্ষাধীন রাশির পরীক্ষালব্ধ মান সর্বদাই এবং নিয়মিতভাবে রাশিটির প্রকৃত মান অপেক্ষা কম বা বেশি হতে পারে। এ ত্রুটিকে নিয়মিত ত্রুটি বলে।

অনিয়মিত ত্রুটি : ত্রুটির বিভিন্ন বিষয়ে উপযুক্ত সাবধানতা অবলম্বন করা সত্ত্বেও কোনো একটি রাশির পাঠ বারবার ভিন্ন হতে দেখা যায়। এ ধরনের ত্রুটিকে অনিয়মিত ত্রুটি বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। যাদের জীবন নেই তা নিয়ে ভৌত জগৎ। বিজ্ঞানের প্রাচীন ও আধুনিক শাখা হলো ভৌতবিজ্ঞান। স্থান, কাল, ভর ও শক্তি এই চারটি উপাদানের সমন্বয়ে ভৌতবিজ্ঞান।

২। কম্পাঙ্ক, বেগ, বল লব্ধ একক। ভর, তাপমাত্রা, দৈর্ঘ্য, সময় মৌলিক একক। কয়েকটি মৌলিক একক মিলে লব্ধ একক হয়। পরীক্ষার মাধ্যমে ঘটনা যাচাই করাই হলো সূত্র। পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণিত অনুকল্পকে তত্ত্ব বলে।

৩। মাত্রা সমীকরণ লব্ধ একক এবং মৌলিক এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। অনুমিতির ওপর ভিত্তি করে তত্ত্ব গড়ে ওঠে। $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ সমীকরণে r এর মান পরিমাপে 2% ত্রুটি থাকলে V পরিমাপে ত্রুটি হবে 6%।

৪। 1 গ্যালন = 4.54×10^{-3} m^3, 1 মেট্রিক টন = 1000 kg, 1 মাইল = 1.61 কিমি। পারসেক > আলোকবর্ষ > মেগামিটার > অ্যাংস্ট্রম। স্ক্রু পিচকে চক্রাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে লঘিষ্ঠ ধ্রুবক পাওয়া যায়।

৫। আইনস্টাইন নোবেল পুরস্কার পান ফটোতড়িৎ ক্রিয়ার জন্য। তিনি ব্রাউনীয় গতি এবং আপেক্ষিক তত্ত্বের স্রষ্টা। প্রতিফলক টেলিস্কোপ নির্মাণ করেন নিউটন। স্থান, কাল, ভর ও শক্তি হলো ভৌত জগতের উপাদান।

৬। ফ্যারাডে তড়িৎ বিশ্লেষণের সূত্র এবং জেনারেটের আবিষ্কার করেন। 1704 সালে অপটিক্স নামে যে বইটি প্রকাশিত হয় তার লেখক ছিলেন নিউটন। তিনি ছিলেন ব্রিটেনের বিজ্ঞানী। সূর্যকেন্দ্রিক সৌরজগতের ধারণা দেন কোপারনিকাস। মৌলিক একক হলো—মিটার, কেলভিন, সেকেন্ড, অ্যাম্পিয়ার, ক্যান্ডেলা, মোল। তড়িৎ বিভব মৌলিক একক নয়।

৭। 1900 সালে প্ল্যাঙ্ক আলোর কোয়ান্টাম তত্ত্ব দেন এবং কৃষ্ণবস্তু বিকিরণ ব্যাখ্যা করেন। $\pi = \frac{22}{7}$ নির্ণয় করেন ভাস্করাচার্য। স্ফেরোমিটারের স্ক্রু পিচকে চক্রাকার স্কেলের ঘরসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে লঘিষ্ঠ ধ্রুবক পাওয়া যায়।

৮। 1610 সালে গ্যালিলিও যৌগিক অণুবীক্ষণ যন্ত্র আবিষ্কার করেন। তিনি ছিলেন আধুনিক বিজ্ঞানের জনক।

৯। তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে যন্ত্রের স্ক্রু-পিচ এবং লঘিষ্ঠ গণন নির্ণয় করতে হয়।

১০। রাশির মান = সংখ্যা × একক। এটিই হলো পরিমাপের মূলনীতি। আলোকবর্ষ হলো দূরত্বের একক।

১১। বিজ্ঞানী নিউটন মহাকর্ষ সূত্র, ক্যালকুলাস, বলবিদ্যা, লেন্সের সূত্র এবং প্রতিফলক টেলিস্কোপ আবিষ্কার করেন। ফ্যারাডে আবিষ্কার করেন তড়িৎ চৌম্বক আবেশের সূত্র।

১২। 1 গিগা $= 10^9$, 1 মেগা $= 10^6$, 1 টেরা $= 10^{12}$, 1 মাইক্রো $= 10^{-6}$, 1 ন্যানো $= 10^{-9}$, 1 পিকো $= 10^{-12}$, 1 ফেমটো $= 10^{-15}$, 1 মিলি $= 10^{-3}$।

১৩। ফলাফলে অনিশ্চয়তাকে পরিমাপের ত্রুটি বলে। স্ফেরোমিটারে পিছট (ডানে) ত্রুটি ঘটে।

১৪। বৃত্তাকার স্কেলের শূন্য দাগ রৈখিক স্কেলের অনুভূমিক দাগের ওপরে থাকলে ঋণাত্মক ত্রুটি হয়। আর নিচে থাকলে ধনাত্মক ত্রুটি হয়।

১৫। নাট-স্ক্রু নীতিভিত্তিক যন্ত্রে পিছট ত্রুটি দেখা যায়। স্ক্রু ক্ষয় হয়ে ঢিলা হয়ে গেলে এবং বিক্ষেপ চৌম্বক মাপক যন্ত্রে এই ত্রুটি ঘটে। গোলীয় তলে বক্রতার ব্যাসার্ধের সমীকরণ হলো $R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}$।

১৬। নিক্তি অনুভূমিক না থাকলে লেভেল ত্রুটি হয়। নিক্তির সাহায্যে ভর পরিমাপের ত্রুটি হলো লেভেল ত্রুটি।

১৭। **পুনরাবৃত্তি বা নিয়মিত ত্রুটি :** মিটার ব্রিজের প্রান্তিক ত্রুটি, পটেনশিওমিটারের প্রান্তিক ত্রুটি এবং স্ক্রু-গজের শূন্য ত্রুটি এই ত্রুটির অন্তর্ভুক্ত।

১৮। পর্যবেক্ষণের অসতর্কতা বা অমনোযোগিতার জন্য সামগ্রিক বা মোট ত্রুটি দেখা দেয়। পরম ত্রুটি = প্রকৃত মান ~ পরিমাপ্য মান।

১৯। শূন্য ত্রুটি, পিছট ত্রুটি, লেভেল ত্রুটি হলো যান্ত্রিক ত্রুটি। নিক্তি, চৌম্বক মাপন যন্ত্রে, গ্যালভানোমিটারে লেভেল ত্রুটি দেখা যায়।

২০। লম্বন ত্রুটি হলো পর্যবেক্ষণ ত্রুটি। পর্যবেক্ষণের জন্য পাঠে যে ত্রুটি আসে তা ব্যক্তিগত ত্রুটি।

২১। পিছট ত্রুটি যান্ত্রিক এলোমেলো ত্রুটি। 'g' নির্ণয়ে থামা ঘড়ির সাহায্যে T নির্ণয় ও স্কেলের সাহায্যে l নির্ণয়ে এই ত্রুটি দেখা দেয়। কোনো কিছু ব্যাখ্যার জন্য যে আনুষ্ঠানিক চিন্তাধারা তাকে অনুকল্প বলে।

২২। শতকরা ত্রুটি $= \frac{x \sim y}{x} \times 100\%$ বা $\frac{\text{প্রকৃত মান} \sim \text{প্রাপ্ত মান}}{\text{প্রকৃত মান}} \times 100\%$, শতকরা ত্রুটি = আপেক্ষিক ত্রুটি $\times 100\%$

২৩। দীর্ঘদিন ব্যবহারের ফলে যন্ত্রের ক্ষয়জনিত কারণে যে ত্রুটি হয় তাকে প্রান্ত দাগ ত্রুটি বলে।

২৪। দৃষ্টির দিক পরিবর্তনের সাথে সাথে কোনো লক্ষ্যবস্তুর অবস্থানের আপাত পরিবর্তনের জন্য যে ত্রুটি তাকে লম্বন ত্রুটি বলে। স্লাইড ক্যালিপার্সের ক্ষেত্র $L = M + V \times V_c$

২৫। আলোক বেঞ্চে সূচক ত্রুটি দেখা যায়। তড়িৎ বিভব মৌলিক রাশি নয়। পদার্থ পরিমাপের এসআই একক কিলোগ্রাম।

২৬। তাপমাত্রা, আর্দ্রতা, ভূপৃষ্ঠ থেকে উচ্চতা নির্ণয়ে পরিবেশগত ত্রুটি দেখা যায়। ঘরের দৈর্ঘ্য পরিমাপে যে ত্রুটি তাকে এলোমেলো ত্রুটি বলে। পরিমাপে যন্ত্রের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় প্রকার ত্রুটি হয় যন্ত্রের কারণে।

২৭। পরীক্ষণের কার্যধারা ও যন্ত্রপাতির ত্রুটিজনিত যে ত্রুটি তাকে পুনরাবৃত্তিক বা ব্যবস্থাগত ত্রুটি বলে।

২৮। কোনো কিছু সম্পর্কে সঠিক উপলব্ধি বা বোধগম্যতাকে ধারণা বলে। সাধারণভাবে কোনো নির্দিষ্ট শর্তে সব সময় কী ঘটবে তার বর্ণনাকে সূত্র বলে।

২৯। N, J, W, K এর মধ্যে K হলো মৌলিক একক। স্বীকার্য তত্ত্বের ভিত্তি প্রদান করে।

৩০। তাপমাত্রা, দীপন তীব্রতা, পদার্থের পরিমাণ মৌলিক রাশি কিন্তু তড়িৎ বিভব মৌলিক রাশি নয়।

৩১। আলো সম্পর্কিত সর্বশেষ মতবাদ হলো কোয়ান্টাম মতবাদ। কোয়ান্টাম তত্ত্বের ধারণাকে সম্প্রসারিত করেন আলবার্ট আইনস্টাইন। "ভর ও শক্তি সমতুল" এটি আইনস্টাইনের আবিষ্কার। কোয়ান্টাম তত্ত্বের ধারণা দেন ম্যাক্স প্লাঙ্ক।

৩২। তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব আবিষ্কার করেন ম্যাক্সওয়েল।

৩৩। বিজ্ঞানীরা তাঁদের পর্যবেক্ষিত ঘটনার কারণ সম্বন্ধে ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য অনেক সময় পূর্বে আবিষ্কৃত প্রাকৃতিক নিয়মের সাথে সামঞ্জস্য রেখে কিছু অনুমান করেন। এই অনুমানগুলোকে বলা হয় অনুকল্প।

৩৪। ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক প্রথম আবিষ্কার করেন যেকোনো বস্তু হতে শক্তির বিকিরণ নিরবচ্ছিন্নভাবে ঘটে না।

৩৫। আলোক বর্ষ দূরত্বের একক। এক আলোক বর্ষ $= 9{\cdot}42 \times 10^{12}$ km

৩৬। পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণিত অনুকল্পকে সূত্র বলা হয়।
৩৭। একটি গোলকের পরিমাপ্য ব্যাসার্ধ $(2{\cdot}5 \pm 0{\cdot}2)$ cm হলে এর আয়তন পরিমাপের ত্রুটি হবে $2{\cdot}4\%$।
৩৮। প্রধান স্কেল পাঠ M, ভার্নিয়ার পাঠ V এবং ভার্নিয়ার ধ্রুবক V_c হলে দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সূত্র হলো, $L = M + V \times V_c$।
৩৯। পদার্থের পরিমাপের এস.আই. একক হলো মোল।
৪০। গ্রহ-নক্ষত্রের গতিপথের উপাত্ত বিশ্লেষণ করে কেপলার সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেন যে এদের গতিপথ বৃত্তাকার নয়, উপবৃত্তাকার।
৪১। পরম ত্রুটি হলো একটি রাশির প্রকৃত মান ও পরিমাপ্য মানের পার্থক্য। শতকরা ত্রুটি = আপেক্ষিক ত্রুটি $\times 100\%$।
৪২। বিনা প্রমাণে কোনো কিছু মেনে নেওয়াকে স্বীকার্য বলে।
৪৩। ভৌত জগৎ মূলত চারটি উপাদানের সমন্বয়ে তৈরি; যথা—স্থান, কাল, ভর এবং শক্তি।
৪৪। ওজন, বিস্তৃতি, রোধ, স্থিতিস্থাপকতা ইত্যাদি পদার্থের সাধারণ ধর্ম এবং দৃঢ়তা, ভঙ্গুরতা, সান্দ্রতা, পৃষ্ঠটান ইত্যাদি পদার্থের বিশেষ ধর্ম।
৪৫। কোনো গাণিতিক মডেল বা সূত্র প্রতিষ্ঠার লক্ষ্যে যদি কিছু পূর্বশর্ত স্বীকার করে নেওয়া হয়, তবে ওই পূর্বশর্তসমূহকে বলা হয় স্বীকার্য।
৪৬। পর্যবেক্ষকের কারণে পাঠে যে ত্রুটি আসে তাকে লম্বন ত্রুটি বলে।
৪৭। 1589 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী গ্যালিলিও মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর সূত্র আবিষ্কার করেন।
৪৮। 1610 খ্রিস্টাব্দে গ্যালিলিও যৌগিক অণুবীক্ষণ যন্ত্র আবিষ্কার করেন।
৪৯। 1678 খ্রিস্টাব্দে ডাচ বিজ্ঞানী হাইগেনস আলোর তরঙ্গ তত্ত্ব দেন।
৫০। শক্তির নিঃসরণ বা শোষণ গুচ্ছ বা প্যাকেট আকারে ঘটে। ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক এই ক্ষুদ্র গুচ্ছের নাম দেন কোয়ান্টা। পরবর্তীতে এই কোয়ান্টা ফোটন নামে পরিচিতি লাভ করে।
৫১। কোনো যন্ত্রের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক $0{\cdot}001$ cm। এর অর্থ ওই যন্ত্র দ্বারা $0{\cdot}001$ cm পর্যন্ত ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য সঠিকভাবে মাপা যায়।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকার্য কী ?
ⓚ গাণিতিক যুক্তি
ⓚ কোনো ধারণা বা তত্ত্ব
ⓖ বৈজ্ঞানিক পরীক্ষায় প্রমাণিত
ⓖ পরীক্ষণের সার-সংক্ষেপ

২। তত্ত্ব কী বিষয়ের ওপর ভিত্তি করে গড়ে ওঠে ? [BRU-E Admission Test, 2017-18]
(ক) নীতি
(খ) অনুকল্প
(গ) অনুমিতি
(ঘ) পদ্ধতি

৩। নিচের কোনটি লব্ধ রাশি ? [চ. বো. ২০১৯; সি. বো. ২০১৯; ঢা. বো. ২০১৫; Admission Test : DU (প্রযুক্তি) 2020-21; DU 2016-17; ComU 2019-20]
(ক) তাপমাত্রা
(খ) ভর
(গ) সময়
(ঘ) কম্পাঙ্ক

৪। 1 মাইল ও 1 কিলোমিটার দূরত্বের পার্থক্য মিটারে কত হবে ? [Medical Admission Test, 2017-18; CU Admission Test, 2021-22]
(ক) $0{\cdot}609$ m
(খ) $6{\cdot}09$ m
(গ) $60{\cdot}9$ m
(ঘ) 609 m

৫। পরমাণুর সমস্ত ধন আধান এবং ভর এর কেন্দ্রে অবস্থিত—এই তত্ত্ব কে উপস্থাপন করেন ?
(ক) রাদারফোর্ড
(খ) গ্যালিলিও
(গ) আইনস্টাইন
(ঘ) ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক

৬। তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ তত্ত্ব আবিষ্কার করেন—
(ক) রাদারফোর্ড
(খ) নিউটন
(গ) ম্যাক্সওয়েল
(ঘ) আইনস্টাইন

৭। কোন বিজ্ঞানী ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেন ?
(ক) আইনস্টাইন
(খ) গ্যালিলিও
(গ) টমাস ইয়ং
(ঘ) নিউটন

৮। "ভর ও শক্তি সমতুল্য"—কোন বিজ্ঞানীর অভিমত?
(ক) নিউটন
(খ) গ্যালিলিও
(গ) আইনস্টাইন
(ঘ) ফ্যারাডে

৯। কোনো বস্তু হতে শক্তির বিকিরণ নিরবচ্ছিন্নভাবে ঘটে না—এই তত্ত্বের প্রবক্তা কে ? বা কোয়ান্টাম তত্ত্বের জনক কে ? [চ. বো. ২০১৯]
ⓚ লর্ড রাদারফোর্ড
ⓚ আলবার্ট আইনস্টাইন
ⓖ ম্যাক্স প্ল্যাঙ্ক
ⓖ মাইকেল ফ্যারাডে

১০। নিম্নলিখিত কোন বিজ্ঞানী কোয়ান্টাম তত্ত্বের ধারণাকে সম্প্রসারিত করেন ? [দি. বো. ২০১৬]
ⓚ মাইকেল ফ্যারাডে
ⓚ আলবার্ট আইনস্টাইন
ⓖ ম্যাক্স প্লাংক
ⓖ নিউটন

১১। আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতা তত্ত্ব অনুসারে গতিশীল কাঠামোতে
(i) দৈর্ঘ্য কমে
(ii) ভর বাড়ে
(iii) সময় বাড়ে
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i
ⓚ i ও ii
ⓖ ii ও iii
ⓖ i, ii ও iii

১২। অনিয়মিত (random) ত্রুটি কী ধরনের ত্রুটি ?
[Admission Test : JU 2019-20; BRU 2016-17]
ⓚ যান্ত্রিক ত্রুটি
ⓚ ব্যক্তিগত ত্রুটি
ⓖ (ক) ও (খ) উভয় ধরনের ত্রুটি
ⓖ ওপরের কোনোটিই নয়

১৩। পুনরাবৃত্তিক ত্রুটি কোনটি ? [ঢা. বো. ২০১৫; RU-C 2021-22]
ⓚ স্ক্রু-গজের শূন্য ত্রুটি
ⓚ দৃষ্টিভ্রম ত্রুটি
ⓖ অনিয়মিত ত্রুটি
ⓖ সামগ্রিক ত্রুটি

১৪। যদি v = দ্রুতি, r = ব্যাসার্ধ এবং g = অভিকর্ষজ ত্বরণ হয়, তা হলে নিম্নের কোন রাশিটি মাত্রাহীন?
[RU-H Admission Test, 2017-18]
ⓚ $\frac{v^2r}{g}$
ⓚ $\frac{v^2g}{r}$
ⓖ v^2rg
ⓖ $\frac{v^2}{rg}$

১৫। একটি বক্রতলের ব্যাসার্ধ নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করা হয়—
[RU-F1 Admission Test, 2017-18]
(i) স্ক্রু-গজ
(ii) স্ফেরোমিটার
(iii) স্লাইড ক্যালিপার্স
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i
ⓚ ii
ⓖ i ও iii
ⓖ i, ii ও iii

১৬। একটি গোলকের পরিমাপ্য ব্যাসার্ধ (2·5 ± 0·2) cm হলে এর আয়তন পরিমাপের শতকরা ত্রুটি কত ?
[দি. বো. ২০১৭ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০১৫; চ. বো. ২০১৫; Admission Test : RU-C1 2017-18 (মান ভিন্ন); KU 2019-20 ; DU (7 colleges) 2020-21 (মান ভিন্ন)]
ⓚ 0·08%
ⓚ 0·24%
ⓖ 8%
ⓖ 24%

১৭। একটি আদর্শ বা যুক্তিপূর্ণ আচরণ ভিত্তি যার সাপেক্ষে অন্যান্য বিষয় তুলনা, বিচার বিশ্লেষণ ও পরিমাপ করা হয় তাকে কী বলে?
[রা. বো. ২০১৬]
ⓚ সূত্র
ⓚ নীতি
ⓖ অনুকল্প
ⓖ স্বীকার্য

১৮। আলোকবর্ষ কীসের একক? [য. বো. ২০১৬]
ⓚ সময়
ⓚ দূরত্ব
ⓖ ত্বরণ
ⓖ বেগ

১৯। পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণিত অনুকল্পকে বলে—
[চ. বো. ২০১৬; JU Admission Test, 2021-22, 2019-20]
ⓚ নীতি
ⓚ স্বীকার্য
ⓖ সূত্র
ⓖ তত্ত্ব

২০। স্ফেরোমিটারের বৃত্তাকার স্কেলের মোট ভাগ সংখ্যা 50। স্কেলটিকে এক পাক ঘুরালে রৈখিক স্কেলে সরণ হয় 0·5 mm। লঘিষ্ঠ গণন কত?
[ম. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০১৬; JU Admission Test : 2021-22 (মান ভিন্ন)]
ⓚ 0·01 mm
ⓚ 0·01 cm
ⓖ 0·25 mm
ⓖ 0·50 mm

২১। কোন দুটি ভৌত জগতের উপাদান?
[ব. বো. ২০১৬; Admission Test, JU 2021-22]
ⓚ সময় ও ত্বরণ
ⓚ ভর ও স্থান
ⓖ স্থান ও বেগ
ⓖ ভর ও তাপমাত্রা

২২। পরিমাপে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় প্রকার ত্রুটি হয় কোন কারণে? [ব. বো. ২০১৬]
ⓚ যন্ত্রের
ⓚ পরিবেশগত
ⓖ তত্ত্বীয়
ⓖ ব্যক্তিগত

২৩। প্রধান স্কেল পাঠ M, ভার্নিয়ার পাঠ V এবং ভার্নিয়ার ধ্রুবক V_C হলে দৈর্ঘ্য L নির্ণয়ের সূত্র—
[সি. বো. ২০১৬]
ⓚ $L = M + V_C$
ⓚ $L = MV + V_C$
ⓖ $L = MV_C + V$
ⓖ $L = M + V \times V_C$

২৪। $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ সমীকরণে r-এর মান পরিমাপে যদি 2% ত্রুটি হয়, তবে V নির্ণয়ে ত্রুটি হবে—
[সি. বো. ২০১৬; Admission Test : DU-7 College 2015-16 (মান ভিন্ন); CU-A1 2018-19 (মান ভিন্ন)]
ⓚ 1%
ⓚ 2%
ⓖ 4%
ⓖ 6%

২৫। মৌলিক একক হলো—
[সি. বো. ২০১৬; ব. বো. ২০২১; Admission Test : DU (Technology) 2019-20; DU 2016-17]
i. মিটার ও কেলভিন
ii. সেকেন্ড ও অ্যাম্পিয়ার
iii. ক্যান্ডেলা ও মোল
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii
ⓚ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓖ i, ii ও iii

২৬। কোনটি মৌলিক রাশি নয়?
[দি. বো. ২০১৫; Admission Test : RU 2017-18; CU 2020-21; DU (প্রযুক্তি) 2021-22 (মান ভিন্ন); CU-A 2021-22, 2020-21]
ⓚ তড়িৎ বিভব
ⓚ তাপমাত্রা
ⓖ দীপন তীব্রতা
ⓖ পদার্থের পরিমাণ

২৭। এক আলোকবর্ষ হলো— [কু. বো. ২০১৫]
ⓚ 9.4×10^{12} km
ⓚ 9.4×10^{15} km
ⓖ 9.4×10^{18} km
ⓖ 9.4×10^{21} km

২৮। নিচের কোনটি 1 GHz ও 1 MHz-এর অনুপাতের সমান? [চ. বো. ২০১৫]
ⓚ 10^9
ⓚ 10^6
ⓖ 10^3
ⓖ 10^{-3}

২৯। ফোটন কণিকার শক্তি $E = h\upsilon$, যেখানে υ = কম্পাঙ্ক এবং h = প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবক। h-এর মাত্রা কোন রাশিটির মাত্রার সমান?
ⓚ রৈখিক ঘাত
ⓚ রৈখিক ভরবেগ
ⓖ ত্বরণ
ⓖ কৌণিক ভরবেগ

৩০। কোনো কিছু ব্যাখ্যার জন্য যে আনুষ্ঠানিক চিন্তা-ধারা তাকে বলে— [কু. বো. ২০১৬]
ⓚ স্বীকার্য
ⓚ তত্ত্ব
ⓖ অনুকল্প
ⓖ সূত্র

৩১। পিকো (p) কোনটি?
[দি. বো.২০১৫; সি. বো. ২০১৫; CU Admission Test, 2015-16]
ⓚ 10^{12}
ⓚ 10^9
ⓖ 10^{-9}
ⓖ 10^{-12}

৩২। কোনো গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করার জন্য কোন সমীকরণটি ব্যবহৃত হয়?
[রা. বো. ২০১৭; চ. বো. ২০১৭; য. বো. ২০১৫ IU Admission Test, 2017-18]
ⓚ $R = \frac{d}{h} + \frac{h}{2}$
ⓚ $R = \frac{d^2}{2} + \frac{h}{2}$
ⓖ $R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}$
ⓖ $R = \frac{d^2}{12} + \frac{4}{d}$

৩৩। 1 ফেমটোমিটার—
[JU Admission Test, 2019-20]
ⓚ 10^{-18} m
ⓚ 10^{-15} m
ⓖ 10^{-12} m
ⓖ 10^{-9} m

৩৪। পর্যবেক্ষকের কারণে পাঠে যে ত্রুটি আসে তাকে বলা হয়— [য. বো. ২০১৯; চ. বো. ২০১৯; দি. বো. ২০১৯; Admission Test : JU 2019-20; CU 2018-19; BRU 2016-17]
ক দৈব ত্রুটি
খ শূন্য ত্রুটি
গ যান্ত্রিক ত্রুটি
ঘ লম্বন ত্রুটি

৩৫। নিক্তির সাহায্যে ভর পরিমাপে কোন ত্রুটি পরিহার করা যায়? [ব. বো. ২০১৫]
ক পিছট ত্রুটি
খ লেভেল ত্রুটি
গ শূন্য ত্রুটি
ঘ পর্যবেক্ষণ ত্রুটি

৩৬। বিনা প্রমাণে কোনো কিছু মেনে নেওয়াকে কী বলে? [সি. বো. ২০১৫; Admission Test : RU 2016-17; BDS 2019-20]
ক তত্ত্ব
খ স্বীকার্য
গ নীতি
ঘ ধারণা

৩৭। নিচের কোন ত্রুটি শুধু স্ক্রু জাতীয় যন্ত্রে থাকে? [চ. বো. ২০১৫]
ক ব্যক্তিগত ত্রুটি
খ নিয়মিত ত্রুটি
গ পিছট ত্রুটি
ঘ লেভেল ত্রুটি

৩৮। পদার্থের পরিমাপের এস. আই. একক হলো— [ব. বো. ২০১৬; কু. বো. ২০১৫; Medical Admission Test, 2010-11]
ক অ্যাম্পিয়ার
খ ক্যান্ডেলা
গ মোল
ঘ কিলোগ্রাম

৩৯। একটি রাশির প্রকৃত মান ও পরিমাপ্য মানের পার্থক্যকে বলে— [ঢা. বো. ২০১৯; কু. বো. ২০১৫]
ক পরম ত্রুটি
খ সামগ্রিক ত্রুটি
গ আপেক্ষিক ত্রুটি
ঘ পুনরাবৃত্তিক ত্রুটি

৪০। আপেক্ষিক ত্রুটি ও শতকরা ত্রুটির মধ্যে সম্পর্ক— [চ. বো. ২০১৫]
ক শতকরা ত্রুটি = আপেক্ষিক ত্রুটি × 100
খ শতকরা ত্রুটি = আপেক্ষিক ত্রুটি × 100%
গ আপেক্ষিক ত্রুটি = শতকরা ত্রুটি × 100
ঘ আপেক্ষিক ত্রুটি = শতকরা ত্রুটি × 100%

৪১। $y = A \sin(\omega t - kx)$ সমীকরণটিতে ω-এর মাত্রা হলো— [ঢা. বো. ২০১৯]
ক M^0LT
খ $M^0L^0T^{-1}$
গ M^0L^{-1}
ঘ M^0LT^{-1}

৪২। পদার্থবিজ্ঞানের ভিত্তির সাধারণ সূত্রগুলোকে কী বলা হয়?
ক নীতি
খ ধারণা
গ অনুমিতি
ঘ স্বীকার্য

৪৩। পর্যবেক্ষণ ও পরীক্ষার মাধ্যমেই বিজ্ঞানের সব সত্য যাচাই করা উচিত — মতবাদটি কোন বিজ্ঞানীর?
ক থেলিস
খ রজার বেকন
গ গ্যালিলিও
ঘ নিউটন

৪৪। সঠিক তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক সংখ্যায় 6.75×10^4 cm এবং 4.52×10^3 cm রাশি দুটির যোগফল—
ক 7.202×10^4
খ 72.0×10^3
গ 0.72×10^5
ঘ 7.20×10^3

৪৫। একটি দণ্ডের পরিমাপকৃত দৈর্ঘ্য 10 cm এবং প্রকৃত মান 10.40 cm হলে পরিমাপের শতকরা ত্রুটি কত? [Admission Test : RU-F2 2017-18 (মান ভিন্ন); KU 2017-18 (মান ভিন্ন); JU unit-A 2019-20 (মান ভিন্ন)]
ক 4%
খ 3.84%
গ 0.398%
ঘ 0.04%

৪৬। একটি স্ক্রুগজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবকের মান 0.01 mm হলে এর দ্বারা ক্ষুদ্রতম কত বেধ মাপা যায়? [রা. বো. ২০১৯; Admission Test : RU 2014-15; BSMRSTU 2019-20]
ক 0.1 mm
খ 0.01 mm
গ 1 mm
ঘ 0.05 mm

৪৭। সাধারণভাবে কোনো নির্দিষ্ট শর্তে সব সময় কী ঘটবে তার বর্ণনাকে কী বলে?
ক নীতি
খ সূত্র
গ ধারণা
ঘ অনুকল্প

৪৮। এককের সঠিক ক্রম কোনটি ? [ঢা. বো. ২০১৫; Admission Test : CoM 2019-20; RU-G 2020-21]

ক) পারসেক > মেগামিটার > অ্যাংস্ট্রম > আলোক বছর
খ) আলোক বছর > পারসেক > মেগামিটার > অ্যাংস্ট্রম
গ) পারসেক > আলোক বছর > মেগামিটার > অ্যাংস্ট্রম
ঘ) অ্যাংস্ট্রম > পারসেক > মেগামিটার > আলোক বছর

৪৯। একটি ফোটনের শক্তি E ও কম্পাঙ্ক υ-এর মধ্যে সম্পর্ক হলো $E = h\upsilon$, h-এর মাত্রা কোনটি ?

ক) ML^2T^{-1}
খ) ML^2T^{-2}
গ) ML^2T
ঘ) ML^2T^2

৫০। যদি L, C ও R যথাক্রমে স্বকীয় আবেশাঙ্ক, ধারকত্ব ও রোধ সূচিত করে, তবে কম্পাঙ্কের মাত্রা যে রাশিটির মাত্রা দ্বারা সূচিত হবে তা হলো—

ক) RL
খ) CL
গ) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$
ঘ) RC

৫১। $X = \frac{A^2B^{1/2}}{C^{1/3}D^3}$ ভৌত রাশিটির মান নির্ণয়ে A, B, C ও D-এর পরিমাপে যথাক্রমে 1%, 2%, 2% ও 4% ত্রুটি হলে কোন রাশিটি সর্বাধিক সতর্কতার সাথে পরিমাপ করা উচিত ?

ক) A
খ) B
গ) C
ঘ) D

৫২। একটি তারের প্রবাহমাত্রা (2.5 ± 0.5) A এবং দুই প্রান্তের বিভব পার্থক্য (40 ± 1)V । তারটির রোধ—

ক) $(16 \pm 1.0)\ \Omega$
খ) $(16 \pm 3.6)\ \Omega$
গ) $(16 + 3)\ \Omega$
ঘ) $(16 + 0.5)\ \Omega$

৫৩। একটি স্লাইড ক্যালিপার্সের ভার্নিয়ার স্কেলের n ভাগ মূল স্কেলের $(n - 1)$ ভাগের সাথে মিলে যায়। মূল স্কেলে 1 ভাগের মান 1 mm। যন্ত্রের ভার্নিয়ার ধ্রুবক কত ?

ক) n mm
খ) $(n-1)$ mm
গ) $\frac{1}{n+1}$ mm
ঘ) $\frac{1}{10n}$ mm

৫৪। R রোধের মধ্য দিয়ে I প্রবাহমাত্রা t সময় ধরে প্রবাহিত হলে উৎপন্ন তাপ, $H = I^2Rt$। I, R এবং t পরিমাপে ত্রুটি যথাক্রমে 3%, 1% এবং 2% হলে উৎপন্ন তাপ পরিমাপে ত্রুটি কত ?

ক) 8%
খ) 4%
গ) 6%
ঘ) 7%

৫৫। দুটি রোধের মান, $R_1 = (8 \pm 0.5)\ \Omega$ এবং R_2 $(12 \pm 0.5)\ \Omega$। রোধগুলোকে শ্রেণি সমবায় যুক্ত করলে শতকরা ত্রুটিসহ তুল্য রোধ কত ?

ক) $20\Omega \pm 0.5\%$
খ) $20\Omega \pm 6.25\%$
গ) $20\Omega \pm 5\%$
ঘ) $20\Omega \pm 10\%$

৫৬। চাপ একটি যৌগিক রাশি। এর এস. আই. একক হচ্ছে— [রা. বো. ২০১৭]

i. প্যাসক্যাল
ii. নিউটন/মিটার^2
iii. ডাইন/সেমি.^{2}

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক) i ও ii
খ) ii ও iii
গ) i ও iii
ঘ) i, ii ও iii

৫৭। লেভেল ত্রুটি কোন যন্ত্রের পরিমাপের জন্য প্রযোজ্য? [য. বো. ২০১৭]

ক) স্ক্রু-গজ
খ) মিটার স্কেল
গ) উদস্থিতি নিক্তি
ঘ) স্ফেরোমিটার

৫৮। পরিমাপের যথার্থতা কার সাথে সম্পর্কিত ? [য. বো. ২০১৭]

i. ত্রুটির
ii. যন্ত্রের
iii. ভুলের

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক) i ও ii
খ) ii ও iii
গ) i ও iii
ঘ) i, ii ও iii

কোনো বস্তুর ভর (100 kg ± 2%) এবং আয়তন ($100\ m^3$ ± 3%)। নির্দেশনার আলোকে ৫৯ ও ৬০নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [য. বো. ২০১৭]

৫৯। ওই বস্তুর ঘনত্বের শতকরা ত্রুটি কত ? [BAU Admission Test, 2018-19 (মান ভিন্ন)]

ক) 10
খ) 5
গ) 0.5
ঘ) 0.1

৬০। ওই বস্তুটির ঘনত্বের পরম ত্রুটির সঠিক মান কোনটি ?
ⓚ $5\,kgm^{-3}$
ⓚ $5\,gm^{-3}$
ⓖ $0{\cdot}5\,kgm^{-3}$
ⓘ $0{\cdot}5\,kgf^{-3}$

৬১। মৌলিক রাশি হলো— [দি. বো. ২০১৭; Home Econ. DU Admission Test, 2020-21]
i. তড়িৎ প্রবাহমাত্রা
ii. পদার্থের পরিমাণ
iii. দীপন তীব্রতা
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i ও ii
ⓚ ii ও iii
ⓖ i ও iii
ⓘ i, ii ও iii

৬২। গ্রহগুলোর গতিপথ উপবৃত্তাকার—এই সূত্রটি কোন বিজ্ঞানীর ? [য. বো. ২০১৭; দি. বো. ২০১৫]
ⓚ টলেমি
ⓚ কেপলার
ⓖ পিথাগোরাস
ⓘ গ্যালিলিও

৬৩। পাখির উড়া পর্যবেক্ষণ করে উড়োজাহাজের মডেল তৈরি করেন কে ? [ঢা. বো. ২০১৭; JU Admission Test, 2015-16]
ⓚ রবার্ট হুক
ⓚ রজার বেকন
ⓖ লিওনার্দো দ্য ভিঞ্চি
ⓘ নিউটন

৬৪। কোনো গোলকের ব্যাসার্ধের প্রকৃত মান 3 cm এবং পরিমাপ্য মান $2{\cdot}98$ cm। গোলকটির আয়তন পরিমাপে শতকরা ত্রুটি কত ? [ব. বো. ২০১৭; DU (7 college) 2020-21 (মান ভিন্ন)]
ⓚ $0{\cdot}02\%$
ⓚ $0{\cdot}066\%$
ⓖ $0{\cdot}66\%$
ⓘ 2%

৬৫। একটি সিলিন্ডারের দৈর্ঘ্য $\frac{7}{22}$ মিটার। যদি উহার আয়তন $4\,m^3$ হয়, তা হলে উহার ব্যাস কত হবে? [Medical Admission Test, 2014–15]
ⓚ 1m
ⓚ 4m
ⓖ $\frac{22}{7}$m
ⓘ 2m

৬৬। কোন ধরনের ত্রুটি কোনোভাবেই দূর করা যায় না?
ⓚ পদ্ধতিগত
ⓚ যান্ত্রিক
ⓖ ব্যক্তিগত
ⓘ অনিয়মিত

৬৭। একটি প্রাকৃতিক রাশির ফরমুলা $Y=\frac{a^2b^3}{c\sqrt{d}}$ হলে এবং যদি a, b, c ও d-এর শতকরা ত্রুটির মান যথাক্রমে 4, 3, 2 এবং 1 হয় তবে Y পরিমাপে শতকরা ত্রুটির পরিমাণ কত ?
ⓚ $13{\cdot}5\%$
ⓚ $14{\cdot}5\%$
ⓖ $12{\cdot}5\%$
ⓘ কোনোটিই নয়

৬৮। একটি লোহার গোলককে উত্তপ্ত করলে সর্বাপেক্ষা বেশি শতকরা পরিবর্তন দেখা যাবে—
ⓚ ব্যাসার্ধে
ⓚ ক্ষেত্রফলে
ⓖ আয়তনে
ⓘ কোনোটিই নয়

৬৯। $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$ সমীকরণে a-এর মাত্রা কত ?
ⓚ $[MLT^{-2}]$
ⓚ $[ML^5T^{-2}]$
ⓖ $[ML^2T^{-1}]$
ⓘ $[ML^3T^{-2}]$

৭০। বল ও সরণ উভয়ের একক দ্বিগুণ করলে গতিশক্তির একক কতগুণ হবে ?
ⓚ $\frac{1}{2}$
ⓚ 2
ⓖ 4
ⓘ 8

৭১। একজন ছাত্রকে $1{\cdot}3\times10^{-3}$ m মাপের একটি ঘনক দেওয়া হলো। ওই ঘনকের আয়তন হবে—
ⓚ $2{\cdot}215\times10^{-9}\,m^3$
ⓚ $2{\cdot}197\times10^{-9}\,m^3$
ⓖ $2{\cdot}917\times10^{-9}\,m^3$
ⓘ $2{\cdot}125\times10^{-9}\,m^3$

৭২। কোন রাশিসমূহের মাত্রা এক নয় ?
ⓚ চাপ, ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, পীড়ন
ⓚ তড়িচ্চালক শক্তি, বিভব পার্থক্য, তড়িৎবিভব
ⓖ তাপ, কাজ, শক্তি
ⓘ দ্বিপোল ভ্রামক, তড়িৎফ্লাক্স, তড়িৎক্ষেত্র

৭৩। বৃত্তাকার স্কেলের পূর্ণ ঘূর্ণন সংখ্যা M, বৃত্তাকার স্কেলের অতিরিক্ত ভাগ সংখ্যা N এবং লঘিষ্ঠ গুণন L_c হলে স্ফেরোমিটারের সাহায্যে h নির্ণয়ের সূত্র কোনটি? [ঢা. বো. ২০১৯]

ⓚ $h = M + L_c$
ⓚ $h = M \times N + L_c$
ⓖ $h = M \times$ পিচ $+ L_c$
ⓘ $h = M \times$ পিচ $+ N \times L_c$

৭৪। C.G.S. এককে বোলজম্যান ধ্রুবকের মান S.I. এককের মান অপেক্ষা কতগুণ বেশি? [রা. বো. ২০১৯]

ⓚ 10^{-7}
ⓚ 10^{7}
ⓖ 10^{-5}
ⓘ 10^{5}

৭৫। সর্বাপেক্ষা ছোট একক কোনটি? [কু. বো. ২০১৯; JU Admission Test, 2019-20]

ⓚ অ্যাংস্ট্রম
ⓚ এক্স-রে ইউনিট
ⓖ অ্যাটো-মিটার
ⓘ মিলি মাইক্রোন

৭৬। অভিন্ন একক ও মাত্রার জোড়া হচ্ছে— [চ. বো. ২০১৯; BDS 2020-21]

i. কাজ ও পৃষ্ঠশক্তি
ii. পৃষ্ঠটান ও পৃষ্ঠশক্তি
iii. অনুভূমিক পাল্লা ও সরণ

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii
ⓚ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓘ i, ii ও iii

৭৭। একটি বৃত্তের পরিমাপ্য ব্যাসার্ধ (5±0·2%) cm হলে ক্ষেত্রফল পরিমাপে শতকরা ত্রুটি কত? [কু. বো. ২০১৯; Admissoin Test : Combined Science 2020-21 (মান ভিন্ন); GST 2021-22 (মান ভিন্ন); GST-A 2020-21 (মান ভিন্ন)]

ⓚ 0·8%
ⓚ 0·5%
ⓖ 0·4%
ⓘ 0·2%

৭৮। নিচের সম্পর্কটিতে K-এর একক কী?

$U = \frac{ky}{y^2 + a^2}$ (এখানে U = স্থিতিশক্তি, y = সরণ এবং a = বিস্তার)

ⓚ ms^{-1}
ⓚ ms
ⓖ Jm
ⓘ Js^{-1}

৭৯। Ampere-sec কোন রাশির একক?

ⓚ প্রবাহমাত্রা
ⓚ আধান
ⓖ শক্তি
ⓘ ক্ষমতা

৮০। বলের ঘাতের একক নিচের কোন রাশিটির এককের সমান?

ⓚ রৈখিক ভরবেগ
ⓚ কৌণিক ভরবেগ
ⓖ জড়তার ভ্রামক
ⓘ শক্তি

৮১। একটি স্লাইড ক্যালিপার্সের প্রধান স্কেলের 39 ভাগ ভার্নিয়ার স্কেলের 40 ভাগের সমান। প্রধান স্কেলের এক ভাগের মান 1·0 mm হলে ভার্নিয়ার ধ্রুবক কত? [KUET Admission Test, 06—07]

ⓚ 0·010 mm
ⓚ 0·020 mm
ⓖ 0·025 mm
ⓘ 0·100 mm
ⓤ 0·040 mm

৮২। বল ধ্রুবকের মাত্রা কোন রাশির মাত্রার সমান?

ⓚ সান্দ্রতাঙ্কতা
ⓚ পৃষ্ঠটান
ⓖ কম্পাঙ্ক
ⓘ বলের ঘাত

৮৩। নিচের কোনটি সবচেয়ে বড় একক?

ⓚ km
ⓚ আলোকবর্ষ
ⓖ AU
ⓘ পারসেক

৮৪। নিচের কোনটি দূরত্বের একক নয়?

ⓚ আলোকবর্ষ
ⓚ পারসেক
ⓖ লিপইয়ার
ⓘ অ্যাংস্ট্রম

৮৫। একই দৈর্ঘ্যের দুটি সরল দোলকের পিণ্ডদ্বয়ের ভর যথাক্রমে 50 g এবং 100 g। এই দুটি সরল দোলকের একই স্থানে পর্যায়কালের অনুপাত হবে–

ⓚ 1 : 2
ⓚ 2 : 1
ⓖ 1 : 1
ⓘ $1 : \sqrt{2}$

৮৬। L দৈর্ঘ্যের একটি বর্গক্ষেত্রের ওপর F বল প্রয়োগ করা হয়েছে। L-এর মাপে ত্রুটি 2% এবং F-এর পরিমাপে ত্রুটি 4% হলে চাপ-এর ক্ষেত্রে গ্রহণযোগ্য ত্রুটি হবে—

ⓚ 2%
ⓚ 4%
ⓖ 6%
ⓘ 8%

৮৭। কোনো বিজ্ঞানী একটি পরীক্ষার সময় 100 বার পাঠ নিলেন। তিনি ওই একই পরীক্ষায় ওই মাপটি 400 বার নিলে সম্ভাব্য ত্রুটি–
ⓚ একই থাকবে
ⓚ অর্ধেক হবে
ⓖ $\frac{1}{4}$ কম হবে
ⓖ 4 গুণ হবে

৮৮। স্ক্রুগজের পিচ 0·05 cm এবং বৃত্তাকার স্কেলের ভাগ সংখ্যা 50 হলে, লঘিষ্ট গুণনের মান কত? [BUET 2022-23]
ⓚ 0·01 mm
ⓚ 0·02 mm
ⓖ 0·05 mm
ⓖ 0·01 mm

৮৯। কোনটি যান্ত্রিক ত্রুটি নয়? [Medical 2021-22]
ⓚ লেভেল ত্রুটি
ⓚ পিছন ত্রুটি
ⓖ শুন্য ত্রুটি
ⓖ সূচক ত্রুটি

৯০। প্রকৃত মান ও পরিমাপ্য মানের পার্থক্যকে কোন ত্রুটি বলে? [ঢা. বো. ২০১৯]
ⓚ পরম ত্রুটি
ⓚ সামগ্রিক ত্রুটি
ⓖ আপেক্ষিক ত্রুটি
ⓖ পুনরাবৃত্তিক ত্রুটি

৯১। স্ফেরোমিটারের সাহায্যে কোনো গোলীয় তলের বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয়ের সমীকরণ কোনটি? [দি. বো. ২০২৪]
ⓚ $R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}$
ⓚ $R = \frac{d^2}{6h} + \frac{h}{2}$
ⓖ $R = \frac{d^2}{2h} + \frac{h}{6}$
ⓖ $R = \frac{d^2}{2n} + \frac{n}{6}$

৯২। নিচের কোনটি দৈর্ঘ্যের সর্বাপেক্ষা ছোট একক? [Dental 2023-24]
ⓚ অ্যাংস্ট্রম
ⓚ মিলি মাইক্রোন
ⓖ অ্যাটোমিটার
ⓖ ন্যানোমিটার

৯৩। কোনো গোলকের ভর পরিমাপে ত্রুটি 3% এবং ব্যাসার্ধ পরিমাপে ত্রুটি 1% হলে এর ঘনত্ব পরিমাপে শতকরা ত্রুটি কত?
ⓚ 2%
ⓚ 4%
ⓖ 6%
ⓖ 10%

৯৪। নিচের কোন ত্রুটি শুধু স্ক্রু জাতীয় যন্ত্রে দেখা যায়?
ⓚ ব্যক্তিগত ত্রুটি
ⓚ পিছন ত্রুটি
ⓖ নিয়মিত ত্রুটি
ⓖ লেভেল ত্রুটি

৯৫। গোলাকার বস্তুর আয়তন যদি 17% বৃদ্ধি করা হয় তাহলে পৃষ্ঠ তলের ক্ষেত্রফল কতখানি বৃদ্ধি পাবে? [BUET 2020-21]
ⓚ 10%
ⓚ 11·33%
ⓖ 15%
ⓖ 20%

৯৬। কোন গোলকের পরিমাপ্য ব্যাসার্ধ (5 ± 0·2) cm হলে এর ব্যাসার্ধ পরিমাপে ত্রুটি কত?
ⓚ 0·08%
ⓚ 0·24%
ⓖ 4%
ⓖ 24%

৯৭। কোন গোলকের পরিমাপ্য ব্যাসার্ধ (3·5 ± 0·5) cm হলে এর আয়তন পরিমাপে ত্রুটি কত?
ⓚ 14·28%
ⓚ 28·57%
ⓖ 21·43%
ⓖ 42·85%

উত্তর :

১। (খ)	২। (খ)	৩। (ঘ)	৪। (ঘ)	৫। (ক)	৬। (গ)	৭। (ঘ)	৮। (গ)	৯। (গ)	১০। (খ)
১১। (ঘ)	১২। (গ)	১৩। (ক)	১৪। (ঘ)	১৫। (খ)	১৬। (ঘ)	১৭। (খ)	১৮। (খ)	১৯। (ঘ)	২০। (ক)
২১। (খ)	২২। (ক)	২৩। (ঘ)	২৪। (ঘ)	২৫। (ঘ)	২৬। (ক)	২৭। (ক)	২৮। (গ)	২৯। (ঘ)	৩০। (গ)
৩১। (ঘ)	৩২। (গ)	৩৩। (খ)	৩৪। (ঘ)	৩৫। (খ)	৩৬। (খ)	৩৭। (গ)	৩৮। (গ)	৩৯। (ক)	৪০। (খ)
৪১। (খ)	৪২। (ক)	৪৩। (গ)	৪৪। (খ)	৪৫। (খ)	৪৬। (খ)	৪৭। (ক)	৪৮। (গ)	৪৯। (ক)	৫০। (গ)
৫১। (ঘ)	৫২। (খ)	৫৩। (ঘ)	৫৪। (ঘ)	৫৫। (ঘ)	৫৬। (ক)	৫৭। (গ)	৫৮। (ক)	৫৯। (খ)	৬০। (গ)
৬১। (ঘ)	৬২। (খ)	৬৩। (গ)	৬৪। (ঘ)	৬৫। (খ)	৬৬। (ক)	৬৭। (ক)	৬৮। (গ)	৬৯। (খ)	৭০। (গ)
৭১। (খ)	৭২। (ঘ)	৭৩। (ঘ)	৭৪। (খ)	৭৫। (গ)	৭৬। (গ)	৭৭। (গ)	৭৮। (গ)	৭৯। (খ)	৮০। (ক)
৮১। (গ)	৮২। (খ)	৮৩। (ঘ)	৮৪। (গ)	৮৫। (গ)	৮৬। (ঘ)	৮৭। (গ)	৮৮। (ক)	৮৯। (ঘ)	৯০। (ক)
৯১। (ক)	৯২। (গ)	৯৩। (গ)	৯৪। (খ)	৯৫। (খ)	৯৬। (গ)	৯৭। (ঘ)			

(খ) সৃজনশীল প্রশ্ন

১। মনন একটি তামার গোলককে সুতায় বেঁধে মাপ চোঙের তরলে স্থাপন করে 80 mL পাঠ গ্রহণ করল। সেখান থেকে গোলকটিকে উঠানোর পর পাঠ 60 mL পাওয়া গেল। আবার সে কৌতূহলবশত তামার গোলকের পরিবর্তে সমভরের সিসার গোলক ব্যবহার করল। এক্ষেত্রে পূর্ববর্তী পাঠ পরিবর্তন হয়ে গেল। এ বিষয়টি সে তার পদার্থবিজ্ঞান শিক্ষককে অবহিত করল এবং শিক্ষক বিষয়টি মননকে সুন্দরভাবে বৈজ্ঞানিক ভিত্তিতে ব্যাখ্যা করলেন।

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত তামার গোলকের ভর নির্ণয় কর।

(খ) একই ভরের তামার গোলকের পরিবর্তে সিসার গোলক ব্যবহার করায় মাপ চোঙের পূর্ববর্তী পাঠ পরিবর্তন হলো কেন তা গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে প্রকাশ কর।

২। পদার্থবিজ্ঞান ব্যবহারিক ক্লাসে শিক্ষক তোমাকে একটি ধাতব গোলকের খণ্ডাংশ দিলেন এবং স্ফেরোমিটার ব্যবহার করে এর বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে বললেন। তুমি যে স্ফেরোমিটার ব্যবহার করলে তার দুটি পায়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 cm। দোলন পদ্ধতিতে ভর নির্ণয়ের সময় ডান পাল্লায় 100 g রেখে স্থির বিন্দুর অবস্থানের পার্থক্য 30 পেলে, নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

(ক) স্ফেরোমিটারের পা তিনটির সমতল থেকে বক্রতলের উচ্চতা 1·1 cm হলে গোলকের খণ্ডাংশের বক্রতার ব্যাসার্ধ কত ?

(খ) অতিরিক্ত 10 g ভরের জন্য সূচক কাঁটার স্থিতিবিন্দুর পরিবর্তন 8 হলে বস্তুর প্রকৃত ভর নির্ণয় কর।

৩। গবেষণাগারে পরীক্ষার কাজে ব্যবহারের জন্য শিক্ষক অনিককে বিভিন্ন প্রস্থচ্ছেদের কয়েকটি তার দিলেন মান সঠিক আছে কি না যাচাই করার জন্য। অনিক স্ক্রু গেজ দিয়ে তারগুলোর প্রস্থচ্ছেদ মেপে দেখল যে তারের গায়ে লেখা মানের সঙ্গে প্রাপ্ত মান মিলছে না। সে শিক্ষককে এই তারতম্যের বিষয়টি জানালে তিনি দেখেন যে অনিক স্ক্রু গেজ ব্যবহারের সঠিক পদ্ধতি ব্যবহার না করায় এই তারতম্য পাওয়া গেছে। পিছট ত্রুটি পরিহার করে পুনরায় মেপে অনিক দেখল যে তারের গায়ে স্থিতি মান ও প্রাপ্ত মান একই।

(ক) পিছট ত্রুটি পরিহারের জন্য শিক্ষক অনিককে কী নিয়ম শিখিয়ে দিলেন ?

(খ) স্ক্রু গেজের সাহায্যে দুটি তারের প্রস্থচ্ছেদ নির্ণয়ের জন্য তুমি কী পদ্ধতি ব্যবহার করবে বর্ণনা কর।

৪। 1 mm পিচবিশিষ্ট একটি স্ফেরোমিটারের বৃত্তাকার স্কেলের ভাগ সংখ্যা 100। মারুফ স্ফেরোমিটারটির সাহায্যে একটি অবতল লেন্সের উচ্চতা পরিমাপ করে গড় উচ্চতা পেল 5·32 cm এবং একটি সমতল কাচ প্লেটের উচ্চতা পেল 0·25 cm। স্ফেরোমিটারটির তিন পায়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব যথাক্রমে 6·3 cm, 6·4 cm ও 6·2 cm।

(ক) উদ্দীপকের অবতল লেন্সটির বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(খ) মারুফ স্ফেরোমিটার দ্বারা বক্রতার ব্যাসার্ধ নির্ণয়ে কী কী সতর্কতা অবলম্বন করেছিল—আলোচনা কর।

৫। ব্যবহারিক ক্লাসে শামীমাকে একটি তারের বেধ পরিমাপের জন্য একজন শিক্ষক একটি স্লাইড ক্যালিপার্স ও একটি স্ক্রু গেজ দিলেন। স্লাইড ক্যালিপার্সের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক 0·1 mm এবং স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক 0·01 mm।

(ক) স্ক্রু গেজ দ্বারা পরিমাপ করার সময় শামীমা রৈখিক স্কেলের পাঠ 2 mm এবং চক্রাকার স্কেলের পাঠ 48 পেল। তারটির ব্যাস কত ?

(খ) একটি মাত্রাহীন ভৌত রাশির নাম লিখ। প্রমাণ কর যে, রাশিটি মাত্রাহীন।

৬। আনোয়ার মিটার ব্রিজের সাহায্যে একটি তারের রোধ পরিমাপে নিম্নোক্ত মানগুলো পেল—

101·2 Ω, 101·7 Ω, 101·3 Ω, 101·5 Ω, 101·2 Ω, 101·4 Ω, 101·3 Ω এবং 101·1 Ω

(ক) শুধুমাত্র অনিয়মিত ত্রুটি বিদ্যমান রয়েছে ধরে নিয়ে রোধের প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে গড় ত্রুটিসহ তারের রোধের মান ও সম্ভাব্য ত্রুটিসহ তারের রোধের মধ্যে প্রাপ্ত ব্যবধান গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

৭। সমমাত্রিক নীতি প্রয়োগ করে বিভিন্ন এককের মধ্যে রূপান্তর, সমীকরণের সঠিকতা যাচাই, বিভিন্ন প্রাকৃতিক রাশির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা হয়।

(ক) সমমাত্রিক নীতির সাহায্যে $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণটি সঠিক কি না—যাচাই কর।

(খ) পরিমাপের সঠিকতা (accuracy) এবং সূক্ষ্মতা (precision) উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।

৮। পদার্থবিজ্ঞান পরীক্ষাগারে এক শিক্ষক আনোয়ার এবং নাসিমকে একটি সরু তারের সম প্রস্থচ্ছেদের দুটি অংশ ব্যাসার্ধ মাপার জন্য দিলেন। নাসিম স্লাইড ক্যালিপার্স দিয়ে এবং আনোয়ার স্ক্রু গেজের সাহায্যে পরিমাপ করে তারের ব্যাসার্ধ পেল যথাক্রমে 0·25 mm এবং 0·24 mm। স্লাইড ক্যালিপার্সের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক 0·1 mm এবং স্ক্রু গেজের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক 0·01 mm।

(ক) উদ্দীপকে তারের প্রস্থচ্ছেদ নির্ণয়ে নাসিমের ও আনোয়ারের পরিমাপের সর্বোচ্চ ত্রুটি নির্ণয় কর।

(খ) নাসিম ও আনোয়ারের পরিমাপের কোন ফলাফল গ্রহণযোগ্য এবং কেন তা গাণিতিকভাবে দেখাও।

(গ) সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন

১। ভৌত জগৎ বলতে কী বোঝ?
২। মৌলিক একক কী?
৩। লব্ধ একক কাকে বলে? [চ. বো. ২০১৬; সি. বো. ২০১৬; কু. বো. ২০১৬]
৪। ব্যবহারিক একক কী?
৫। এস. আই. একক কী?
৬। আন্তর্জাতিক মিটার কাকে বলে?
৭। পরিমাপের মূলনীতি কী ?
৮। একটি ভৌত রাশি পরিমাপ করতে হলে কী কী জিনিস জানা দরকার ?
৯। পিচ কাকে বলে ? [রা. বো. ২০১৬]
১০। মৌলিক রাশি কাকে বলে ? [ব. বো. ২০১৬]
১১। কোনো রাশির মাত্রা বলতে কী বোঝ?
১২। গড় বিচ্যুতি কী?
১৩। লঘিষ্ঠ ধ্রুবক কী?
১৪। প্রমাণ বিচ্যুতি কী?
১৫। পরম ত্রুটি কাকে বলে?
১৬। নীতি বলতে কী বোঝ?
১৭। স্বীকার্য কী? [ঢা. বো. ২০১৯]
১৮। স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ঠ ধ্রুবক 0.01 mm বলতে কী বুঝ? [য. বো. ২০১৯]
১৯। কোনো রাশি পরিমাপ করতে এককের প্রয়োজন হয় কেন? [রা. বো. ২০১৮]
২০। পরিমাপের এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতির প্রয়োজন হয়েছিল কেন? [সি. বো. ২০১৯]
২১। ধারণা বলতে কী বুঝ?
২২। লব্ধ রাশি কাকে বলে?
২৩। পারসেক (PC) কাকে বলে?
২৪। আপেক্ষিক ত্রুটি কী?
২৫। শতকরা ত্রুটি কী?
২৬। আনুপাতিক ত্রুটি কাকে বলে?
২৭। অনুকল্প কাকে বলে? [কু. বো. ২০১৮; ব. বো. ২০১৮; চ. বো. ২০১৮]
২৮। সূত্র কাকে বলে?
২৯। তত্ত্ব কী?
৩০। শূন্য ত্রুটি কী?
৩১। পিছট ত্রুটি কাকে বলে?
৩২। লেভেল ত্রুটি কী?
৩৩। পরিমাপের লম্বন ত্রুটি কাকে বলে ? [দি. বো. ২০১৭]
৩৪। ব্যক্তিগত ত্রুটি কাকে বলে?
৩৫। পুনরাবৃত্তি ত্রুটি বলতে কী বোঝ?
৩৬। কোন ভৌত রাশির একক পারসেক?
৩৭। আলোকবর্ষ কী সময়ের একক ?
৩৮। আলোকবর্ষ কী প্রাথমিক একক না লব্ধ একক?
৩৯। তড়িৎ বিভব V-এর মাত্রা সমীকরণ লিখ।
৪০। ধারকত্ব C-এর মাত্রা সমীকরণ কী ?
৪১। Å একক কোন রাশিকে প্রকাশ করার জন্য ব্যবহৃত হয় ?
৪২। কোনো যন্ত্রের শূন্য দাগের ত্রুটি কোন শ্রেণির ত্রুটি ?
৪৩। প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবকের মাত্রা লিখ।
৪৪। তিনটি রাশির নাম লিখ যারা সমমাত্রিক।
৪৫। বিজ্ঞান কী ?
৪৬। ভৌত বিজ্ঞান কাকে বলে ?

৪৭। amu কী ? এটি কীসের একক ?
৪৮। প্রাথমিক এককগুলো সাপেক্ষে কাজের S. I. একক কী ?
৪৯। প্রাথমিক একক সাপেক্ষে ক্ষমতার একক কী ?
৫০। তিনটি ভৌত রাশির নাম কর যাদের একক একই। এদের একক কী ?
৫১। ক্ষুদ্র দূরত্ব পরিমাপের দুটি এককের নাম লিখ।
৫২। অনেক দূরের বৃহৎ বস্তুর দূরত্ব পরিমাপের দুটি একক লিখ।
৫৩। প্রাথমিক রাশি কয়টি এবং কী কী ?
৫৪। যেকোনো দুটি একবিহীন রাশির নাম লিখ।
৫৫। পদার্থ পরিমাপের মৌলিক একক কী ?
৫৬। প্যাসক্যাল কোন রাশির একক ?
৫৭। অণু বা পরমাণুর ভর প্রকাশে ব্যবহৃত একক কী ? এস. আই. এককে এর মান কত ?
৫৮। আপেক্ষিক তাপের S. I. একক কী ?
৫৯। ফার্মি কী ?
৬০। আলোকবর্ষ লব্ধ একক না মূল একক ?
৬১। 1 মোল পদার্থে অণুর সংখ্যা কত ? [চ. বো. ২০১৭]
৬২। প্রাথমিক এককগুলোর সাপেক্ষে বলের S. I. একক কী ?
৬৩। ভৌত রাশি কী ?
৬৪। চৌম্বক ফ্লাক্সের মাত্রা লিখ।
৬৫। পৃষ্ঠ শক্তির মাত্রা কী ?
৬৬। $ML^{-1}T^{-1}$ কোন রাশির একক ?
৬৭। ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ লিখ।
৬৮। আবেশাঙ্কের মাত্রা লিখ।
৬৯। ভৌত রাশির মাত্রা বলতে কী বোঝায় ?
৭০। ক্ষমতার সংজ্ঞা থেকে এর একক নির্ণয় কর।
৭১। কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা থেকে এর একক ও মাত্রা নির্ণয় কর।

(ঘ) কাঠামোবদ্ধ ও বর্ণনামূলক প্রশ্ন

১। ভৌত জগৎ বলতে কী বোঝ ? ভৌত জগতের উপাদান কী কী ?
২। পদার্থবিজ্ঞানের কয়েকটি উল্লেখযোগ্য ভাগের নাম লিখ।
৩। পদার্থবিজ্ঞানের কয়েকটি উল্লেখযোগ্য অবদান বর্ণনা কর।
৪। পদার্থবিজ্ঞানের সূত্র, নীতি, তত্ত্ব এবং অনুকল্প বলতে কী বুঝ ?
৫। সকল সূত্রই তত্ত্ব, তবে সকল তত্ত্ব সূত্র নয়—ব্যাখ্যা কর।
৬। সকল তত্ত্বই অনুকল্প কিন্তু সকল অনুকল্প তত্ত্ব নয়—ব্যাখ্যা কর।
৭। চিকিৎসাবিজ্ঞানে পদার্থবিজ্ঞানের অবদানের বর্ণনা দাও।
৮। দৈনন্দিন জীবনে পদার্থবিজ্ঞানের সাথে প্রযুক্তির সম্পর্ক নিবিড়ভাবে জড়িত—কথাটি বুঝিয়ে লিখ।
৯। আধুনিক বিজ্ঞানের ক্রমবিকাশে নিউটন এবং আইনস্টাইনের ভূমিকা উল্লেখ কর।
১০। স্থান, সময় ও ভরের সনাতনি এবং আধুনিক ধারণা তুলনা কর।
১১। কোনো রাশির পরিমাপ প্রকাশ করতে এককের প্রয়োজন হয় কেন ? [রা. বো. ২০১৭]
১২। মৌলিক ও লব্ধ একক কাকে বলে ? প্রত্যেকটির উদাহরণ দাও।
১৩। এস. আই. একক কী ? এম. কে. এস. এককের সঙ্গে এর সম্পর্ক কী ?
১৪। মাত্রা সমীকরণ বলতে কী বুঝায় ব্যাখ্যা কর।
১৫। মাত্রা সমীকরণের প্রয়োজনীয়তা উল্লেখ কর।
১৬। পরীক্ষণ ও পর্যবেক্ষণের প্রয়োজনীয়তা কী ?
১৭। শূন্য ত্রুটি, পিছট ত্রুটি ও লেভেল ত্রুটি ব্যাখ্যা কর।
১৮। পরম ত্রুটি ও শতকরা ত্রুটির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।
১৯। পরিমাপের ক্ষেত্রে যান্ত্রিক ত্রুটি কীভাবে পরীক্ষণকে প্রভাবিত করে ?
২০। কোনো পরিমাপ্য রাশির আনুপাতিক ভুল কীভাবে নির্ধারণ করবে ?

২১। গড় বিচ্যুতি কী ? কীভাবে এ বিচ্যুতি নির্ণয় করবে ?
২২। প্রমাণ বিচ্যুতি কী ? এ থেকে পরীক্ষণের ত্রুটির সূত্রটি লিখ।
২৩। মাত্রা সমীকরণের সীমাবদ্ধতা আলোচনা কর।
২৪। সমীকরণের নির্ভুলতা কীভাবে যাচাই করা হয়? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।
২৫। বলের একককে মৌলিক এককের মাধ্যমে প্রকাশ কর। [চ. বো. ২০১৫]
২৬। পরিমাপের সকল যন্ত্রে পিছট ত্রুটি থাকবে কি না—ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০১৭]
২৭। পরিমাপের এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতির প্রয়োজন হয়েছিল কেন ? [সি. বো. ২০১৯]
২৮। স্ফেরোমিটারের লঘিষ্ট ধ্রুবক 0·01 mm বলতে কী বুঝ ? [য. বো. ২০১৯]

(ঙ) ক্রিয়াকর্ম

একটি পোস্টার কাগজে মৌলিক একক ও লব্ধ এককের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক প্রদর্শন করে শ্রেণিতে তা উপস্থাপন কর।

(চ) কাজ (গাণিতিক সমস্যা)

১। 5 km কে ft-এ প্রকাশ কর। [উ. $1·64 \times 10^4$ ft]
২। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 4000 মাইল। এর পরিধি কত ? [উ. $40·4 \times 10^3$ km]
৩। রংপুর হতে ঢাকার দূরত্ব 402·3 km। এই দূরত্ব মাইলে প্রকাশ কর। [উ. 249·88 মাইল]
৪। লোহার ক্ষেত্রে আন্তঃআণবিক দূরত্ব $2·5 \times 10^{-10}$ m। এই দূরত্ব অ্যাংস্ট্রম একক প্রকাশ কর। [উ. 2·5 Å]
৫। চাঁদের ভর $7·33 \times 10^{22}$ kg। একে পাউন্ডে প্রকাশ কর। [উ. $16·16 \times 10^{22}$ পাউন্ড]
৬। সোডিয়াম বাতি থেকে হলুদ বর্ণের আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য 5893 Å। nm এককে এর মান কত ?
[উ. 589·3 nm]
৭। Joule এককে প্রকাশিত মানকে erg এককে প্রকাশ কর। [উ. 1 Joule = 10^7 erg]
৮। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G-এর মান S. I. পদ্ধতিতে $6·67 \times 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}। F.P.S. পদ্ধতিতে এর মান কত? [1 lb = 0·454 kg এবং 1 ft = 0·3048 m] [উ. $1·07 \times 10^{-9}$ poundal ft^2lb^{-2}]

৯। কোনো একক পদ্ধতিতে দূরত্বের একক হলো 1 *s*-এ আলোক যে দূরত্ব অতিক্রম করে তার সমান এবং সময়ের একক হলো পৃথিবী সূর্যের চারদিকে একবার ঘুরতে যে সময় লাগে তার সমান। এই পদ্ধতিতে একক বেগের মানকে SI পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। [উ. 9·506 ms^{-1}]

১০। একটি ইলেকট্রনের ভর $9·1 \times 10^{-31}$ kg। তা হলে 1 g ভরের মধ্যে কতগুলো ইলেকট্রন থাকবে ?
[উ. $1·1 \times 10^{27}$]

১১। $y = a + bt + ct^2$। এখানে y মিটারে t সেকেন্ডে প্রকাশ করলে b এর একক ও মাত্রা নির্ণয় কর।
[উ. ms^{-1}, ML^{-1}]

১২। দেখাও যে কাজ ও টর্কের মাত্রা ও একক একই।

১৩। দেখাও যে $\frac{L}{R}$ এবং CR রাশি দুটির একক সময়ের একক। এখানে L, R ও C প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

১৪। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9·8 ms^{-2}। দৈর্ঘ্যের একক কিলোমিটার এবং সময়ের একক ঘণ্টা ধরা হলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত হবে ? [উ. $1·27 \times 10^5$ km/hr^2]

১৫। একটি বল 15 kg ভরের কোনো বস্তুর ওপর 1 মিনিট ক্রিয়া করে 4·6 kms^{-1} বেগ উৎপন্ন করে। এই বলের মান নিউটনে প্রকাশ কর। [উ. $1·15 \times 10^3$ N]

১৬। একটি স্প্রিং-এর স্থিতিশক্তি W ও প্রসারণ x, এর মধ্যে সম্পর্ক হলো, $W = \frac{1}{2}Kx^2$। K-এর মাত্রা নির্ণয় কর। [উ. MT^{-2}]

১৭। গতিবেগ (v), সময় (T) এবং বল (F) মৌলিক রাশি ধরে ঘনত্বের মাত্রা নির্ণয় কর। [উ. $FV^{-4}T^{-2}$]

১৮। এক মোল বাস্তব গ্যাসের ক্ষেত্রে ভ্যান ডার ওয়ালসের সমীকরণ হলো : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$, এখানে a ও b দুটি ধ্রুবক। a ও b এর S. I. একক নির্ণয় কর। [উ. Nm^4, m^3]

১৯। একটি কণার বেগ (v), সময় (t)-এর সঙ্গে নিম্নলিখিত সমীকরণ অনুযায়ী পরিবর্তিত হয় : $v = at + \frac{b}{t^2} + c$. a, b ও c-এর মাত্রা নির্ণয় কর। উ. $[a] = [LT^{-2}], [b] = [LT], [c] = [T^2]$

২০। ঘূর্ণনশীল বস্তুর ঘূর্ণন শক্তি $E = \frac{1}{2}I\omega^2$। এই সমীকরণ থেকে জড়তার ভ্রামকের মাত্রা নির্ণয় কর। [উ. ML^2]

২১। কাচের প্রতিসরাঙ্ক μ আপতিত আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ–এর উপর নির্ভর করে। μ এবং λ-এর মধ্যে সম্পর্ক হলো, $\mu = A + \frac{B}{\lambda^2}$। যেখানে A ও B হলো ধ্রুবক। A ও B-এর মাত্রা নির্ণয় কর। [উ. মাত্রাহীন, L^2]

২২। ভ্যান ডার ওয়াল সমীকরণ, $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$-এর a ও b ধ্রুবক দুটির মাত্রা নির্ণয় কর। [উত্তর : $[a] = [ML^5T^{-2}]$ $[b] = [L^3]$]

২৩। কোনো কৃষ্ণ বস্তুর প্রতি একক ক্ষেত্রফল থেকে প্রতি সেকেন্ডে বিকিরিত তাপের পরিমাণ, $Q = \sigma T^4$; যেখানে T হলো বস্তুটির পরম তাপমাত্রা। এই সম্পর্ক থেকে σ-এর মাত্রা ও একক নির্ণয় কর। [উত্তর : $[MT^3\theta^4]$, $Wm^{-2}K^{-4}$]

২৪। একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ $0{\cdot}5$ Å। একটি হাইড্রোজেন পরমাণু এবং এক মোল হাইড্রোজেনের আয়তনের ক্রম মান (order of magnitude) নির্ণয় কর। [উত্তর : 10^{-30} m³, 10^{-7} m³]

২৫। এক "পারমাণবিক ভর একক" এর সমান ভর সম্পূর্ণরূপে শক্তিতে রূপান্তরিত হলে কী পরিমাণ শক্তি নির্গত হবে? [উ. 934·03 MeV]

২৬। নিম্নলিখিত রাশিগুলোর মাত্রা নির্ণয় কর :

(i) আপেক্ষিক তাপ, (ii) লিন তাপ, (iii) তাপ পরিবাহিতা এবং (iv) মোলার ধ্রুবক।

[উত্তর : (i) $M^0L^2T^{-2}K^{-1}$ (ii) $[M^0L^2T^{-2}]$ (iii) $[MLT^{-3}K^{-1}]$ (iv) $[ML^2T^{-2}K^{-1}]$

২৭। তাপ পরিবাহিতাঙ্ক, $K = \frac{Qd}{A(\theta_2 - \theta_1)t}$ -এর মাত্রা নির্ণয় কর। এখানে Q, d, $A_1 (\theta_2 - \theta_1)$ এবং t রাশিগুলো যথাক্রমে শক্তি, দৈর্ঘ্য, ক্ষেত্রফল, তাপমাত্রা এবং সময় নির্দেশ করে। [উ. $MLT^{-1}K^{-3}$]

২৮। যদি $A = B^nC^m$ এবং A, B ও C-এর মাত্রা যথাক্রমে LT, L^2T^{-1} এবং LT^2 হয় তবে m ও n-এর মান কত ? [উ. $\frac{3}{5}$ এবং $\frac{1}{5}$] [DU Admission Test, 2017-18]

২৯। যদি ত্বরণের একক 980 cm s^{-2} এবং গতিবেগের একক 3×10^8 ms^{-1} হয়, তা হলে সময়ের মান ও একক কী হবে ? [উ. $3{\cdot}06 \times 10^7$ s]

৩০। মাত্রা বিশ্লেষণের মাধ্যমে ভৌত রাশিগুলোর নিম্নলিখিত সম্পর্ক যাচাই কর : $V = \frac{\pi P r^4}{8\eta l}$, এখানে V হলো প্রতি একক সময়ে তরলের প্রবাহিত আয়তন, P হলো তরলের চাপ, r নলের ব্যাসার্ধ। η তরলের সান্দ্রতাঙ্ক এবং l হলো নলের দৈর্ঘ্য।

৩১। পরীক্ষার সাহায্যে দেখা যায় যে, সুরশলাকার কম্পাঙ্ক (n)-এর বাহুর দৈর্ঘ্য (l), ঘনত্ব (ρ) এবং পদার্থের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক Y-এর ওপর নির্ভর করে। সুরশলাকার কম্পাঙ্কের সাথে উক্ত রাশিগুলোর সম্পর্কযুক্ত সমীকরণ প্রতিষ্ঠা কর। [উ. $n = \frac{K}{l}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$]

৩২। মাত্রা বিশ্লেষণ পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ কর যেকোনো সান্দ্র তরলের (সান্দ্রতাঙ্ক, η) মধ্য দিয়ে স্থির বেগে (v) পতনশীল কোনো গোলকের ব্যাসার্ধের (r) ওপর সান্দ্রতাজনিত বল, $F = 6\pi\eta r v$।

৩৩। কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ v, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর উপর নির্ভরশীল। মাত্রা বিশ্লেষণের সাহায্যে ওই ভৌত রাশিগুলোর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। [উ. $v = K\sqrt{gR}$]

৩৪। ছাপার ভুলের কারণে একটি বইতে সরল দোলযুক্ত কোনো কণার সরণ y-এর দুটি সূত্র লিপিবদ্ধ আছে—

(ক) $y = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) t$; (খ) $y = a \sin vt$। মাত্রা বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও কোন সূত্রটি সঠিক ?

[উ. 'ক' সূত্রটি সঠিক, 'খ' সম্পর্কটি ত্রুটিপূর্ণ]

৩৫। মাত্রাগতভাবে দেখাও যে, $v^2 = u^2 + 2as$ সমীকরণটি নির্ভুল।

৩৬। দুটি রোধের মান যথাক্রমে $R_1 = (150 \pm 2)\ \Omega$ এবং $R_2 = (225 \pm 3)\ \Omega$। এদেরকে শ্রেণি সমবায়ে যুক্ত করলে এদের তুল্য রোধ কত হবে ? [উ. $(375 \pm 5)\ \Omega$]

৩৭। সরল দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয়ের জন্য দোলনকাল পাঁচবার পরিমাপ করে নিম্নোক্ত মানগুলো পাওয়া গেল :

2·10 সে., 2·12 সে., 2·08 সে., 2·11 সে. ও 2·09 সে.।

দোলকটির (i) গড় দোলনকাল, (ii) দোলনকাল পরিমাপে গড় পরম ত্রুটি, (iii) আপেক্ষিক ত্রুটি এবং (iv) শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। [উ. 2·10 s, 0·012 s, 0·0057, 0·57%]

৩৮। একটি গোলকের ব্যাসার্ধ পরিমাপে ত্রুটি 2·2%। ক্ষেত্রফল ও আয়তন পরিমাপে ত্রুটি কত ? [উ. 4·4%, 6·6%]

৩৯। একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 25·6 cm এবং প্রস্থ 16·7 cm। এদের পরিমাপে সূক্ষ্মতা 0·1 cm। ক্ষেত্রফল পরিমাপে শতকরা ত্রুটি কত ? [উ. 0·946%]

৪০। একটি ঘনকের ভর m এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য l পরিমাপ করে ঘনকের ঘনত্ব নির্ণয় করা যায়। ভর ও দৈর্ঘ্য পরিমাপে ত্রুটি যথাক্রমে 2% ও 3% হলে ঘনত্বের মানে শতকরা ত্রুটি কত ? [উ. 11%]

৪১। একটি গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = 3·0 \pm 0·2\%$। আয়তন ও ক্ষেত্রফল পরিমাপে শতকরা ত্রুটি, পরম ত্রুটি নির্ণয় কর। [উ. আয়তনে শতকরা ত্রুটি = 0·6% এবং পরম ত্রুটি = 0·5 cm^3, ক্ষেত্রফলে শতকরা ত্রুটি = 0·6% এবং পরম ত্রুটি = 0·5 cm^2]

৪২। কৈশিক নলের মধ্য দিয়ে তরলের প্রবাহের হার নিম্নোক্ত সমীকরণ দ্বারা নির্ণয় করা হয় : $\eta = \frac{\pi P r^4}{8\, lV}$

এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।

এক্ষেত্রে P, r, V এবং l-এর মান যথাক্রমে 75 cm Hg, 0·35 cm, 1·5 cm^3/s এবং 20·5 cm। যদি এই পরিমাপের ক্ষেত্রে ত্রুটির মান যথাক্রমে 0·1 cm Hg, 0·01 cm, 0·1 cm^3/s এবং 0·1 cm হয়ে থাকে, তবে ওই তরলের সান্দ্রতাঙ্কের (η) শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। [উত্তর : 18·7%]

[Hint : $\eta = \frac{\pi P r^4}{8\, lV}$ [π ও 8 ধ্রুবক] অতএব শতকরা ত্রুটি, $\frac{\Delta\eta}{\eta} \times 100 = \frac{\Delta P}{P} \times 100 + \frac{4\Delta r}{r} \times 100 + \frac{\Delta V}{V} \times 100 + \frac{\Delta l}{l} \times 100 = \frac{0·1}{75} \times 100 + \frac{4 \times 0·01}{0·35} \times 100 + \frac{0·1}{1·5} \times 100 + \frac{0·1}{20·5} \times 100 = 18·7\%$]

৪৩। কোনো পরিবাহীর দুই প্রান্তের বিভব পার্থক্য V = (200 ± 5) volt এবং এর মধ্য দিয়ে বিদ্যুৎ প্রবাহমাত্রা, I = (20 ± 0·4) A। রোধের ত্রুটি বের কর। [উ. 4·5%]

৪৪। 0·07340 রাশিটিতে সঠিক সংখ্যা কয়টি ? [উ. 4টি]

৪৫। একটি রোধের দুই প্রান্তে V = 50 ± 1 ভোল্ট প্রয়োগ করলে রোধে প্রবাহমাত্রা, I = 20 ± 0·2 অ্যাম্পিয়ার হলো। ভোল্টেজ V, প্রবাহমাত্রা I ও রোধ R পরিমাপে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। [উ. ±2%, ±1%, 3%]

৪৬। ভর ও দ্রুতি পরিমাপের ত্রুটি হলো যথাক্রমে 2% ও 3%। ভর ও দ্রুতি পরিমাপের সাহায্যে গতিশক্তি পরিমাপের ত্রুটি কত হবে ? [উ. 8%]

৪৭। কোনো দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য l এবং পর্যায়কাল T পরিমাপে ত্রুটি যথাক্রমে 1% ও 2%। এই দোলকটির সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণ g নির্ণয়ে ত্রুটির পরিমাণ কত ? [উ. 5%]

৪৮। একজন ছাত্র 760 mm Hg চাপে ফুটন্ত পানিতে একটি পারদ থার্মোমিটারের পারদ প্রান্ত ডুবিয়ে দেখল যে তাপমাত্রা 95·5° C। প্রাপ্ত পাঠের শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। [উ. 0·5%]

৪৯। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য l = (100·0 ± 0·5) cm এবং দোলনকাল T = (2·00 ± 0·01) mm। অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g' নির্ণয়ে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। [উ. ± 1·5%]

৫০। একটি বস্তুর ভর = 100 ± 2% kg এবং আয়তন = 10 ± 3% m^3 হলে, ওই বস্তুর ঘনত্বে (i) শতকরা ত্রুটি এবং (ii) পরম ত্রুটি নির্ণয় কর। [উ. (i) ± 5% (ii) 0·5 kg m^{-3}]

৫১। একটি ভৌত রাশি P-এর সমীকরণ, $P = \frac{a^3 b^2}{\sqrt{cd}}$; a, b, c এবং d-এর পরিমাপে যথাক্রমে 1%, 3%, 4% এবং 2% ত্রুটি পরিলক্ষিত হলো। P-এর মানে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। [উ. 6·13%]

৫২। সরল দোলগতি সম্পন্ন কোনো দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য (l) ও পর্যায়কাল (T) পরিমাপে ত্রুটি 1% ও 2%। এই দোলকটির সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণ (g) নির্ণয়ে ত্রুটির পরিমাণ কত? [উত্তর : 5%]

৫৩। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় করার ফরমুলা, $Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l}$। ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয়ের একটি পরীক্ষায় নিম্নলিখিত তথ্যগুলো পাওয়া গেল; তারের দৈর্ঘ্য, $L = 1.200$ m, ব্যাসার্ধ, $r = 0.051$ m এবং $M = 2.50$ kg ভরের জন্য দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 0.015$ m। g-এর মান $9.81\ ms^{-2}$ হলে এই পরিমাপে Y-এর শতকরা ত্রুটির পরিমাণ কত? [উত্তর : 9.11%]

৫৪। সরল দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয়ের জন্য দোলনকাল পাঁচবার পরিমাপ করা হলো। বিভিন্ন পরিমাপে দোলনকাল পাওয়া গেল যথাক্রমে 2.10 সেকেন্ড, 2.12 সেকেন্ড, 2.08 সেকেন্ড, 2.11 সেকেন্ড এবং 2.09 সেকেন্ড, (i) দোলকটির গড় দোলনকাল নির্ণয় কর। (ii) দোলনকাল পরিমাপে গড় চরম ত্রুটি, (iii) আপেক্ষিক ত্রুটি এবং (iv) শতকরা ত্রুটি নির্ণয় কর। [উত্তর : 2.10 s, 0.012 s, 0.0057, 0.57%]

৫৫। স্ক্রু গেজের সাহায্যে একটি ক্ষুদ্র গোলকের ব্যাস পরিমাপ করে পাওয়া গেল 0.1 cm। গোলকটির আয়তন নির্ণয়ে সর্বোচ্চ ত্রুটি নির্ণয় কর। [উত্তর : 3%]

৫৬। একটি উত্তল লেন্সের ফোকাস দূরত্ব নির্ণয় করার পরীক্ষায় একজন ছাত্র নিম্নোক্ত মানগুলো পেল :

16.20, 15.90, 15.98, 16.01, 16.03, 15.90, 15.93, 16.30, 16.25 এবং 16.00

ফোকাস দূরত্বের (i) গড় ত্রুটি ও (ii) প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় কর। [উ. (i) 0.12; (ii) 0.15]

৫৭। 6 জন ছাত্র কর্তৃক কোনো একটি ইলেকট্রনিক বর্তনীর পরিমাপ্য প্রবাহমাত্রার মানগুলো 12.8 μA, 12.2 μA, 12.5 μA, 12.1 μA, 12.9 μA এবং 12.4 μA। পরিমাপের গড় বিচ্যুতি ও প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

[উ. গড় বিচ্যুতি = 0.283 μA, প্রমাণ বিচ্যুতি = 0.143 μA]

৫৮। একজন ছাত্র একটি স্ক্রু গেজের সাহায্যে একটি তারের ব্যাস পরিমাপ করল। ওই স্ক্রু গেজের পাঠগুলো হলো : 0.38, 0.40, 0.39, 0.37, 0.41, 0.40, 0.38, 0.39, 0.40 এবং 0.41 mm।

নির্ণয় কর : (ক) গড় ত্রুটি ও (খ) প্রমাণ বিচ্যুতি। [উ. (ক) 0.011 (খ) 0.013]

৫৯। একটি রোধকের রোধ পরিমাপে নিম্নোক্ত মান পাওয়া গেল—

101.2 Ω, 101.7 Ω, 101.3 Ω, 101.0 Ω, 101.5 Ω, 101.3 Ω, 101.2 Ω, 101.4 Ω, 101.3 Ω এবং 101.1 Ω ধরা যাক যে শুধুমাত্র অনিয়মিত ত্রুটি বিদ্যমান রয়েছে, তা হলে রোধের (i) গাণিতিক গড় এবং (ii) প্রমাণ বিচ্যুতি নির্ণয় কর। [উ. (i) 101.3 Ω, (ii) 0.2 Ω]

৬০। একটি আয়তাকার ফলকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 4.234 m, 2.01 m এবং 1.005 m। ফলকটির ক্ষেত্রফল ও আয়তন সঠিক তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কে প্রকাশ কর। [উ. 8.51 m^2 এবং 8.55 m^3]

৬১। নিচের সংখ্যাগুলোতে তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা নির্ণয় কর :

(i) 0.05 cm^2 (ii) 2.867 J (iii) 1.65×10^5 kg (iv) 0.2870 gcm^{-3} [উ. (i) 1, (ii) 4, (iii) 3, (iv) 4]

৬২। একটি গোলকের ব্যাসার্ধ পরিমাপে 1.2% ভুল করলে, ওই গোলকের আয়তনে শতকরা কত ভুল হবে ? [উ. 3.6%]

৬৩। একটি গোলকের ব্যাসার্ধ 1.21 cm। সঠিক তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্ক সংখ্যায় গোলকটির ক্ষেত্রফল কত ? [উ. 18.39 cm^2]

৬৪। নিচের সংখ্যাগুলোর তাৎপর্যপূর্ণ অঙ্কসংখ্যা কত ?

12.35, 10.25, 3.615 এবং 2.155×10^{-4} [উ. 4]

৬৫। একটি আয়তাকার ধাতব পাতের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 3.335 m, 1.026 m ও 3.05 cm। সঠিক তাৎপর্যপূর্ণ অংক সংখ্যায় ওই ধাতব পাতের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর। [উত্তর : 7.11 m^2, 0.104 m^3]

৬৬। একটি তারের ব্যাস স্ক্রু গজ দ্বারা পরিমাপ করার সময় রৈখিক স্কেলের পাঠ 1 mm ও চক্রাকার স্কেলের পাঠ 48 পাওয়া গেল। দেওয়া আছে, স্ক্রু পিচে 1 mm এবং চক্রাকার স্কেলের মোট ঘরসংখ্যা 100। তারটির ব্যাস নির্ণয় কর। [উ. 0.148 cm]

৬৭। একটি স্ক্রু গেজের চক্রাকার স্কেলের মোট ঘর সংখ্যা 50 এবং স্ক্রু পিচ 0.1 cm। এই স্ক্রু গেজের সাহায্যে একটি পাতের বেধ মেপে মূল স্কেল ও চক্রাকার স্কেলের পাঠ পাওয়া গেল যথাক্রমে 0.2 cm ও 35 cm। পাতটির বেধ নির্ণয় কর। [উত্তর : 0.27 cm]

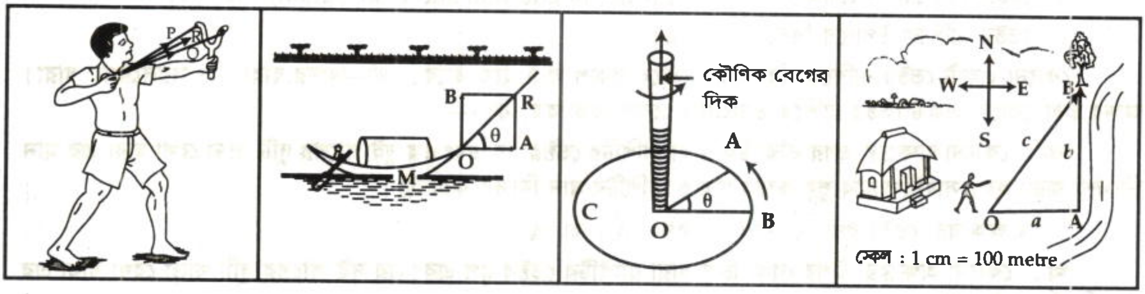
৬৮। একটি স্ক্রু গেজের চক্রাকার স্কেলের 2 বার পূর্ণ আবর্তনের ফলে চক্রাকার স্কেলটি মূল স্কেল বরাবর 1 mm দূরত্ব অতিক্রম করল। চক্রাকার স্কেলটির মোট ঘর সংখ্যা 50। দেখা গেল স্ক্রু গেজটির যান্ত্রিক ত্রুটি − 0.03 mm। যন্ত্রটির সাহায্যে একজন ছাত্র একটি সরু তারের ব্যাস পরিমাপ করার সময় পর্যবেক্ষণ করল, মূল স্কেল পাঠ = 3 mm এবং চক্রাকার স্কেলের পাঠ = 35। তারটির সঠিক ব্যাস নির্ণয় কর। [উত্তর : 3.38 mm]

৬৯। স্ফেরোমিটারের সাহায্যে একটি গোলীয় তলের বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করার সময় h ও d-এর মান পাওয়া গেল যথাক্রমে (0.140 ± 0.001) cm এবং (3.4 ± 0.1) cm। গোলীয় তলের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয়ে সর্বোচ্চ ত্রুটি কত ? [উ. 13.83 cm, 6.7%]

২

ভেক্টর
VECTOR

প্রধান শব্দ (Key Words) : ভেক্টর রাশি, স্কেলার রাশি, একক ভেক্টর, লব্ধি ও অংশক বা উপাংশ, অবস্থান ভেক্টর, নাল বা শূন্য ভেক্টর, আয়ত একক ভেক্টর, ভেক্টর রাশির বিভাজন ও উপাংশ, ত্রিভুজ সূত্র, সামান্তরিক সূত্র, স্কেলার গুণন বা ডট গুণন, ভেক্টর বা ক্রস গুণন, অপারেটর, গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স, কার্ল।



সূচনা
Introduction

বিজ্ঞানের বিভিন্ন বিষয় সুনির্দিষ্টভাবে জানতে হলে কোনো না কোনো ধরনের পরিমাপের প্রয়োজন হয়। পদার্থের যেসব ভৌত বৈশিষ্ট্য পরিমাপ করা যায় তাদের প্রত্যেককে রাশি (quantity) বলে। যেমন: দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, আয়তন, বেগ, কাজ ইত্যাদি প্রত্যেকে এক একটি রাশি। **পদার্থবিজ্ঞানের অন্তর্গত যেকোনো রাশিকে ভৌত রাশি (physical quantity) বলে।** কিছু কিছু ভৌত রাশিকে শুধুমাত্র মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার অনেক ভৌত রাশি রয়েছে যাদেরকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ই প্রয়োজন হয়। তাই ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য অনুসারে ভৌত রাশিগুলোকে আমরা দুই ভাগে বিভক্ত করতে পারি; যথা—

(ক) স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি (Scalar quantity)।

(খ) ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বা সদিক রাশি (Vector quantity)।

যেসব ভৌত রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি বলে। যেমন: দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, জনসংখ্যা, তাপমাত্রা, তাপ, বৈদ্যুতিক বিভব, দ্যুতি, কাজ ইত্যাদি স্কেলার বা অদিক রাশি। [MAT: 18-19]

যেসব ভৌত রাশির মান এবং দিক দুই-ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলে। যেমন: সরণ, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, বল, ওজন ইত্যাদি ভেক্টর বা দিক রাশি। [DAT: 22-23,20-21]

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- ভেক্টরের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন ভৌত রাশি ভেক্টররূপে প্রকাশ ও ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কতিপয় বিশেষ ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- একটি ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ক্ষেত্রে লম্বাংশে বিভাজন করতে পারবে।
- দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণের সংজ্ঞার্থ ও এদের ব্যবহার করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের ব্যবহার ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর ক্যালকুলাসের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর অপারেটর ব্যবহার করতে পারবে।

RMDAC

২·১ ভেক্টর (ধর্ম ও চিহ্ন)
Vector (Properties and symbols)

কোনো কোনো ভৌত রাশিকে বর্ণনার জন্য মানের সাথে দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয়। এসব ভৌত রাশিই ভেক্টর রাশি। যেমন: বেগ, বল, ত্বরণ, সরণ, ওজন ইত্যাদি। বস্তুজগতের এ ধরনের রাশি মান ও দিক দ্বারা প্রকাশিত না হলে তা ওই রাশির বর্ণনায় অসম্পূর্ণ থেকে যায়। ভেক্টর রাশি কতগুলো নিয়ম মেনে চলে। যথা—

~~১~~। ভেক্টর রাশির মান ও অভিমুখ আছে।

~~২~~। দুই বা ততোধিক সমজাতীয় ভেক্টরকে যোগ করা যায়। ভিন্ন প্রকৃতির ভেক্টরকে যোগ করা যায় না।

~~৩~~। দুই বা ততোধিক ভেক্টর যোগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায় তা প্রথমোক্ত ভেক্টর দুটির সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলাফলের সমান হয়।

~~৪~~। দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি হয়।

~~৫~~। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি।

~~৬~~। কোনো ভেক্টর রাশি ও তার মানের অনুপাত দ্বারা ভেক্টরটির দিক নির্দেশিত হয়।

~~৭~~। ভেক্টর রাশি যোগ সংযোজন ও বণ্টন সূত্র (rules of addition and distribution) মেনে চলে।

~~৮~~। ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করা যায়। অসংখ্য উপাংশে বিভক্ত করা যায়

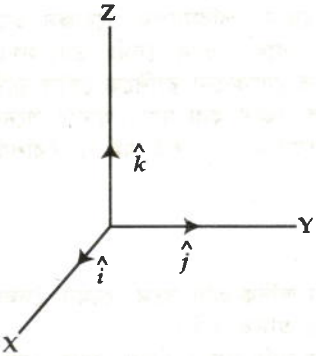
কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে চিহ্ন দ্বারা দুভাবে প্রকাশ করা হয়ে থাকে; যথা—**অক্ষর দ্বারা এবং সরলরেখা দ্বারা। অক্ষর দ্বারা কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে চারভাবে প্রকাশ করা হয়, যথা—**

ক. কোনো অক্ষরের ওপর তীর চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়। সাধারণভাবে শুধু অক্ষর দ্বারাও রাশিটির মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\vec{A}$ এবং মান রূপ $|\vec{A}|$ বা A

খ. কোনো অক্ষরের উপর রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\bar{A}$ এবং মান রূপ $|\bar{A}|$



চিত্র ২.১

গ. কোনো অক্ষরের নিচে রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\underline{A}$ এবং মান রূপ $|\underline{A}|$

ঘ. মোটা হরফের অক্ষর দিয়ে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়। যেমন A অক্ষরের ভেক্টর রূপ **A** এবং এর মান A।

ভেক্টর রাশি নির্দেশের ক্ষেত্রে ক-এ ব্যবহৃত চিহ্নই শ্রেয়। তাই এই বইতে আমরা এই পদ্ধতিই ব্যবহার করব।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ চিহ্ন দ্বারা আয়ত একক ভেক্টর দেখানো হয়েছে [চিত্র ২.১]।

কাজ : মান ও অভিমুখ আছে এমন সকল রাশিই কী ভেক্টর রাশি ? ব্যাখ্যা কর।

মান ও অভিমুখ যুক্ত সকল রাশিই ভেক্টর রাশি নয়। যেমন তড়িৎ প্রবাহ রাশিটির মান ও অভিমুখ থাকলেও দুটি নির্দিষ্ট তড়িৎ প্রবাহ ভেক্টর যোগের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। তাই এই রাশিটির মান ও অভিমুখ থাকলেও এটি ভেক্টর রাশি নয়।

২.২ ভেক্টর প্রকাশ
Vector representation

বিভিন্ন ভেক্টর রাশিকে ভেক্টররূপে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করা যায়। ফলে রাশিটির মান ও দিক স্পষ্ট হয়। নিম্নে কয়েকটি ভৌত রাশির ভেক্টর প্রকাশ দেখানো হলো।

বল
Force

যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।

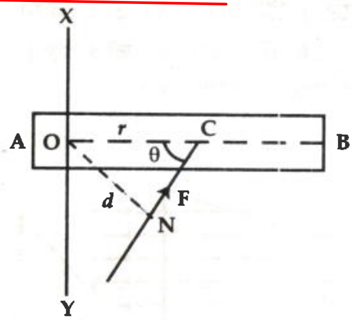
বল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক আছে। কোনো একটি গতিশীল বস্তুর ভর 'm', ত্বরণ $\vec{a}$ এবং বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ হলে, এর ভেক্টর প্রকাশ হলো,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ঘূর্ণন বল বা টর্ক
Rotational force or torque

ঘূর্ণন বল বলতে টর্ককে বুঝানো হয়। ঘূর্ণনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে বলের সমতুল্য রাশি হলো টর্ক।

কোনো অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর ওপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ওই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের গুণফলকে ঘূর্ণন বল বা টর্ক বলে।



চিত্র ২.২

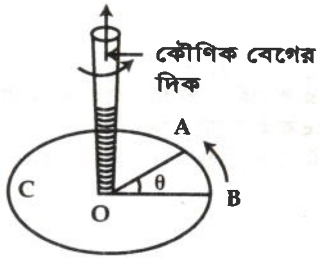
অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ হলে,

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ [চিত্র ২.২]

টর্ক একটি ভেক্টর রাশি। $\vec{r}$ এবং $\vec{F}$ যে তলে অবস্থিত τ ওই তলের অভিলম্ব বরাবর। টর্কের একক N-m

কৌণিক বেগ
Angular velocity

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ ($\vec{\omega}$) বলে। এর ভেক্টর গাণিতিক প্রকাশ হলো $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



চিত্র ২.৩

কৌণিক বেগের দিক (ভেক্টর রূপ) :

কৌণিক বেগ একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক দুই-ই আছে। একটি ডান পাকের স্ক্রুর সাহায্যে এর দিক নির্দেশ করা যায়।

একটি কণা ABC বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকলে ওই বৃত্তের কেন্দ্র O-এ একটি ডান পাকের স্ক্রুর অগ্রভাগ বৃত্ত তলের অভিলম্বভাবে স্থাপন করে কণাটির ঘূর্ণনের সাথে এবং কণাটি যে ক্রমে ঘুরছে সেই ক্রমে স্ক্রুটিকে ঘুরালে তার গতির দিকই হবে কণাটির কৌণিক বেগের দিক [চিত্র ২.৩]।

কৌণিক ভরবেগ
Angular momentum

ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

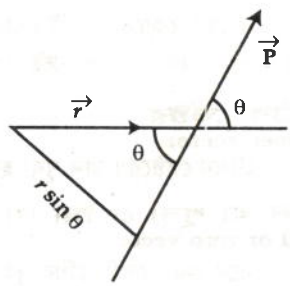
মনে করি $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর এবং $\vec{P}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ। অতএব, সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

এটি একটি ভেক্টর রাশি। এর একক kgm^2s^{-1}

মান ও দিক : কৌণিক ভরবেগের মান,

$$L = rP \sin \theta$$



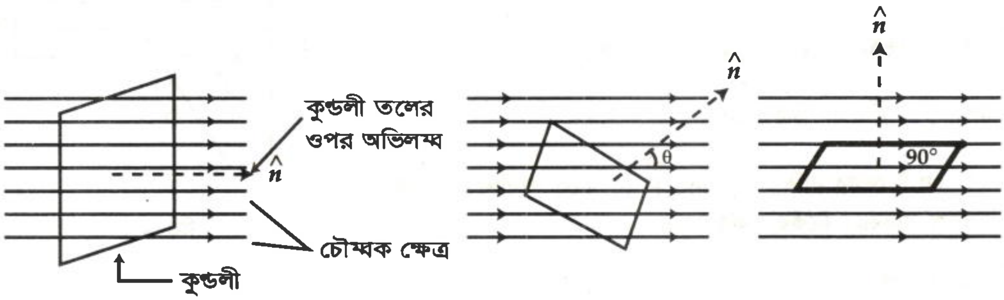
চিত্র ২.৪

এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ [চিত্র ২.৪]। ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব হচ্ছে $r \sin \theta$। অতএব, কোনো বস্তুকণার ভরবেগ ও ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল কৌণিক ভরবেগের মান নির্দেশ করে।

$\vec{r}$ ও $\vec{P}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$-এর দিক হবে ওই তলের লম্ব বরাবর। ক্রস গুণনের নিয়ম দ্বারা $\vec{L}$-এর দিক নির্ধারিত হবে।

তল
Surface

কোনো একটি পৃষ্ঠের বা সমতলের ওপর অভিলম্ব অঙ্কন করলে যে দিক নির্দেশিত হয় তা ওই তলের ভেক্টর। এক্ষেত্রে পৃষ্ঠটিই হবে তল। তবে কোনো বস্তুর তল বা পৃষ্ঠ একটি স্কেলার রাশি। যেকোনো সমতলের উপর অঙ্কিত অভিলম্বকে ওই তলের তল ভেক্টর বলে। নিচের চিত্রে ড্যাস লাইন যুক্ত তীর চিহ্ন দ্বারা তল ভেক্টর ($\hat{n}$) দেখানো হলো। চিত্রের কুণ্ডলীটি হলো তল।



(ক) (খ) (গ)

চিত্র ২.৫

২.৩ বিশেষ ভেক্টর
Special Vectors

[MAT: 24-25]

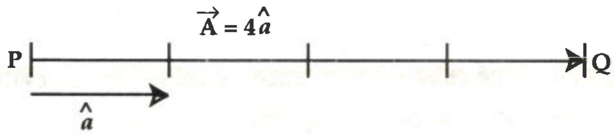
একক ভেক্টর
Unit vector

যেসব ভেক্টরের মান শূন্য নয় এরূপ একটি ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ওই ভেক্টরের দিকে বা সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যাবে। **অর্থাৎ যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।**

একক ভেক্টরকে প্রকাশ করতে সাধারণত ছোট অক্ষরের ওপর একটি টুপি চিহ্ন (^) দেয়া হয়। যেমন $\hat{i}, \hat{a}, \hat{n}$ ইত্যাদি দ্বারা একক ভেক্টর প্রকাশ করা হয়।

ধরি, $\vec{A}$ একটি ভেক্টর যার মান, $A \neq 0$

$\therefore \frac{\vec{A}}{A} = \vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $= \hat{a}$ (ধরি)।



চিত্র ২.৬

কাজেই কোনো একটি ভেক্টর $\vec{A}$-এর মান, $A = 4$ একক এবং $\vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে, $\vec{A} = 4\hat{a}$ [চিত্র ২.৬]। অর্থাৎ কোনো ভেক্টরের মানকে ওই ভেক্টরের একক ভেক্টর দ্বারা গুণ করলে ভেক্টরটি পাওয়া যায়।

সঠিক ভেক্টর
Proper vector

যেসব ভেক্টরের মান শূন্য হয় না তাদেরকে সঠিক ভেক্টর বলে।

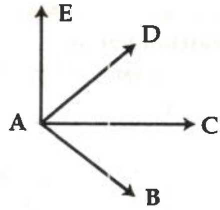
নাল বা শূন্য ভেক্টর বা অকার্যকর ভেক্টর
Null or zero vector

[DAT: 22-23,17-18]

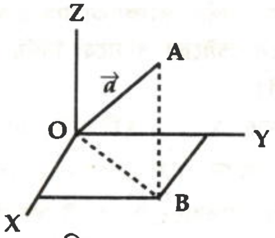
মনে কর, একটি রশির দুই প্রান্তে দুইজন লোক একসাথে একই পরিমাণ বলে টানছে। তা হলে এই টানের লব্ধি একটি শূন্য ভেক্টর হবে। অন্যভাবে বলা যায়, **যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য এবং যার কোনো নির্দিষ্ট দিক থাকে না, তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বা অকার্যকর ভেক্টর বলে।** শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দু একই। একে $\vec{0}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। একটি ভেক্টরের সাথে তার বিপরীত ভেক্টর যোগ করে বা দুটি সমান ভেক্টর বিয়োগ করে নাল ভেক্টর পাওয়া যায়। এর কোনো নির্দিষ্ট দিক নেই। দুটি সমান ও বিপরীত ভেক্টর কোনো বিন্দুতে একই সাথে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি একটি নাল ভেক্টর হয়।

সমবিন্দু ভেক্টর
Co-initial or concurrent vectors

যে সমস্ত ভেক্টরের আদি বিন্দু একই তাদেরকে সমবিন্দু ভেক্টর বলে [চিত্র ২.২৭(ক)]।



চিত্র ২.৭(ক)



চিত্র ২.৭(খ)

ত্রিমাত্রিক ভেক্টর
Three dimensional vector

ত্রিমাত্রিক দেশে অবস্থিত ভেক্টরকে ত্রিমাদিক ভেক্টর বলে [চিত্র ২.৭(খ)]।

শূন্য বা নাল ভেক্টরের গুরুত্ব
Importance of zero or null vector

পদার্থবিজ্ঞানে শূন্য ভেক্টরের নিম্নোক্ত তাৎপর্য রয়েছে :

(i) দুটি সমান ভেক্টরের বিয়োগফল বোঝাতে শূন্য ভেক্টর প্রয়োজন।

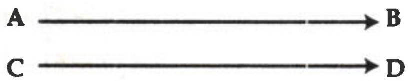
(ii) দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল প্রকাশ করার জন্য শূন্য ভেক্টর প্রয়োজন। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হবে।

(iii) সমবেগে গতিশীল কোনো বস্তুর ত্বরণ শূন্য। ত্বরণ যেহেতু একটি ভেক্টর রাশি সুতরাং, সমবেগে গতিশীল বস্তুর ত্বরণ শূন্য ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

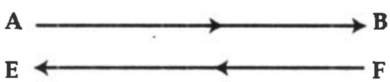
(iv) নাল ভেক্টরের আদিবিন্দু ও শেষবিন্দু একই।

সমান ভেক্টর
Equal vectors

দুটি ভেক্টরের মান ও দিক একই হলে তাদের সমান ভেক্টর বলা হয়। চিত্র ২.৮(ক)-এ $\vec{AB}$ এবং $\vec{CD}$ ভেক্টরদ্বয় সমান। দুটি সমান ভেক্টরের আদি বিন্দু আলাদা হতে পারে। সেক্ষেত্রে অন্তিম বিন্দুও আলাদা হবে। অর্থাৎ একটি ভেক্টরের মান ও দিক অপরিবর্তিত রেখে সেটিকে যে কোনো জায়গায় সরানো যায়।



চিত্র ২.৮(ক)



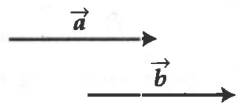
চিত্র ২.৮(খ)

বিপরীত ভেক্টর
Opposite vectors

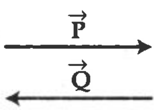
দুটি ভেক্টরের পরম মান সমান কিন্তু অভিমুখ বিপরীত হলে তাদেরকে বিপরীত ভেক্টর বলা হয়। চিত্র ২.৯-এ $\vec{AB}$ এবং $\vec{EF}$ বিপরীত ভেক্টর।

স্বাধীন ভেক্টর
Free vector

কোনো ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু যদি ইচ্ছামতো ঠিক করা যায়, তবে সেই ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলে। চিত্র ২.৯(ক)–এ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির মান ও দিক একই; কিন্তু এদের পাদবিন্দু এক স্থানে নয় অর্থাৎ পাদবিন্দু সুনির্দিষ্ট নয়। সুতরাং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটি স্বাধীন ভেক্টর।



চিত্র ২.৯(ক)



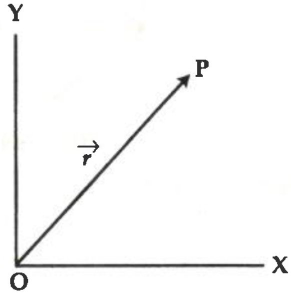
চিত্র ২.৯(খ)

বিসদৃশ ভেক্টর
Unlike vectors

সমজাতীয় দুটি ভেক্টর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে। চিত্র ২.৯(খ)–এ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ বিসদৃশ ভেক্টর।

অবস্থান ভেক্টর
Position vector

প্রসঙ্গ কাঠামোতে একটি বিন্দুর অবস্থান জানার জন্য একটি ভেক্টর রাশির প্রয়োজন হয়। এর মান ও দিকের সাহায্যে বস্তুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

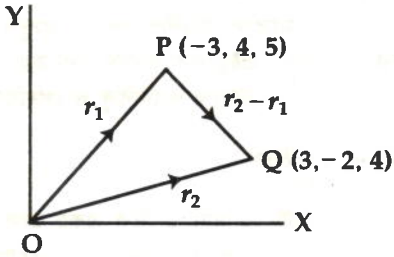


চিত্র ২.১০

মনে করি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত X ও Y দুটি অক্ষ, এদের মূল বিন্দু O। P যেকোনো একটি বিন্দু। এখানে $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করছে। সুতরাং $\overrightarrow{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর [চিত্র ২.১০]।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১

১। P এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–3, 4, 5) এবং (3, –2, 4) হলে স্থানাঙ্কের সাহায্যে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে প্রকাশ কর। এর মান কত ? [Admission Test : DU (প্রযুক্তি) 2022-23; DU (7 colleges) 2021-22 (মান ভিন্ন)]



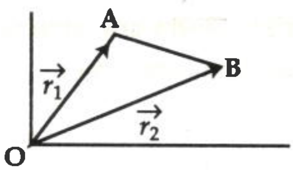
এখানে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_1} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) - (-3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$$
$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} + 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$$
$$= 6\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$$

অতএব, $\overrightarrow{PQ}$ এর মান $= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(6)^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{36 + 36 + 1} = \sqrt{73}$

২। $\vec{r_1} = \overrightarrow{OA} = 10\hat{i} - 12\hat{j} + 16\hat{k}$ এবং $\vec{r_2} = \overrightarrow{OB} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 12\hat{k}$ হলে (i) $|\vec{r_1} + \vec{r_2}|$ এবং (ii) $|\overrightarrow{AB}|$ নির্ণয় কর।



(i) $\vec{r_1} + \vec{r_2} = (10\hat{i} - 12\hat{j} + 16\hat{k}) + (4\hat{i} + 5\hat{j} - 12\hat{k})$

$= 14\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k}$

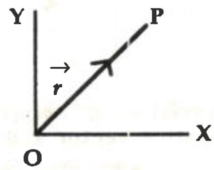
$\therefore |\vec{r_1} + \vec{r_2}| = \sqrt{(14)^2 + (-7)^2 + (4)^2} = \sqrt{261} = 16.16$ একক

(ii) এক্ষেত্রে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (4\hat{i} + 5\hat{j} - 12\hat{k}) - (10\hat{i} - 12\hat{j} + 16\hat{k})$$
$$= -6\hat{i} + 17\hat{j} - 28\hat{k}$$
$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (17)^2 + (-28)^2}$$
$$= \sqrt{36 + 289 + 784}$$
$$= \sqrt{1109} = 33.3 \text{ একক।}$$

ব্যাসার্ধ ভেক্টর
Radius vector

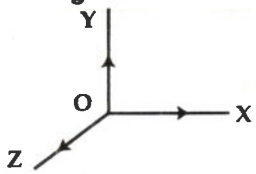
স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যে ভেক্টরের সাহায্যে মূল বিন্দর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে। অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় ব্যাসার্ধ ভেক্টর (radius vector) বলে এবং $\vec{r}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। কোনো বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) হলে, ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = \text{OP} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ এবং এর মান $r = |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



চিত্র ২·১১

সংক্ষেপে বলা যায় মূলবিন্দু হতে কোনো বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বই হলো ব্যাসার্ধ ভেক্টর। এখানে $\vec{r} = \overrightarrow{\text{OP}}$ = ব্যাসার্ধ ভেক্টর [চিত্র ২·১১]।

আয়ত একক ভেক্টর
Rectangular unit vectors



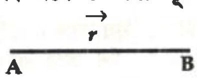
চিত্র ২·১১(ক)

ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বা আয়ত ভেক্টর বলে।

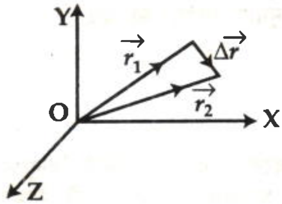
এই কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর $\hat{i}$, Y-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{j}$ এবং Z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{k}$ ধরা হয় [চিত্র ২·১১(ক)]।

সরণ ভেক্টর
Displacement vector

রৈখিক বা সরল পথে বা নির্দিষ্ট দিকে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলে। অন্য কথায় কোনো বস্তুর অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে সরণ ভেক্টর বলে। একে $\vec{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



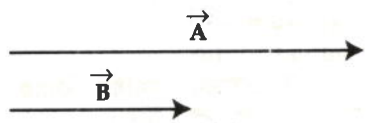
চিত্র ২·১২(ক)



চিত্র ২·১২(খ)

ব্যাখ্যা : ধরি, সরল পথে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্ব $AB = r$। অতএব $\vec{r}$ হলো সরণ ভেক্টর [চিত্র ২·১২(ক)]। অন্যভাবে বলা যায় একটি বস্তুর আদি অবস্থান $\vec{r_1}\ (x_1, y_1, z_1)$ এবং পরিবর্তিত অবস্থান $\vec{r_2}\ (x_2, y_2, z_2)$ হলে সরণ ভেক্টর $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ [চিত্র ২·১২(খ)]।

সদৃশ ভেক্টর
Like vectors

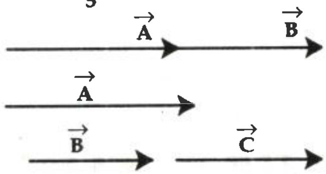


চিত্র ২·১৩

সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে [চিত্র ২·১৩]। উদাহরণ, $\vec{A} = 2\vec{B}$, এক্ষেত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সদৃশ ভেক্টর।

বিপ্রতীপ ভেক্টর
Reciprocal vectors

দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে। উদাহরণ, $\vec{A} = 5\,\hat{i}$ ও $\vec{B} = \frac{1}{5}\hat{i}$ । এখানে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বিপ্রতীপ ভেক্টর।

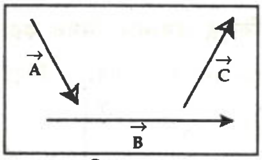


চিত্র ২·১৪

সমরেখ বা এক রেখীয় ভেক্টর
Collinear vectors

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে, তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে। $\vec{A}, \vec{B}$ বা $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ সমরেখ ভেক্টর [চিত্র ২·১৪]।

সমতলীয় বা এক তলীয় ভেক্টর
Coplanar vectors



চিত্র ২.১৫

দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ তিনটি সমতলীয় ভেক্টর [২.১৫]।

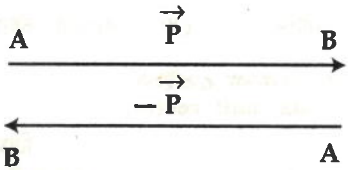
বিপরীত বা ঋণাত্মক ভেক্টর এবং সমভেক্টর
Negative vector and Equal vector

বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে একে অপরের বিপরীত বা ঋণাত্মক ভেক্টর বলে।

আর দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান ও দিক একই দিকে হলে তাদেরকে সমভেক্টর বলে।

২.১৬ চিত্রে $\vec{AB} = \vec{P}$-এর বিপরীত ভেক্টর $\vec{BA} = -\vec{P}$

এখানে $\vec{AB} = \vec{BA}$



চিত্র ২.১৬

পোলার ভেক্টর
Polar vector

বস্তুর ঘূর্ণনের সঙ্গে যুক্ত নয় এমন ভেক্টরকে তীর চিহ্নযুক্ত সরলরেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই রেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টরের মান এবং তীর চিহ্ন দিক নির্দেশ করে। এদের পোলার ভেক্টর বলে।

উদাহরণ : বল, ভরবেগ, সরণ, গতিবেগ প্রভৃতি।

অক্ষীয় ভেক্টর
Axial vector

বস্তুর ঘূর্ণনের সঙ্গে যুক্ত ভেক্টরকে অক্ষীয় ভেক্টর বলে। এই ভেক্টরগুলোকে বস্তুর ঘূর্ণন অক্ষ বরাবর রেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। রেখা ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য রাশির মান নির্দেশ করে এবং দিক স্ক্রু নিয়ম অনুযায়ী নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ : কৌণিক বেগ, কৌণিক ত্বরণ, কৌণিক ভরবেগ প্রভৃতি।

সীমাবদ্ধ ভেক্টর
Localized vector

কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু যদি নির্দিষ্ট থাকে তবে তাকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে। কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে বা নির্দিষ্ট বিন্দু হতে ক্রিয়াশীল ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর। কারণ এটি সর্বদা প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দু থেকে নিতে হয়।

লব্ধি ভেক্টর
Resultant vector

দুটি ভেক্টরের সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলাফল যে ভেক্টরের ক্রিয়ার ফলাফলের সমান হয় সেই ভেক্টরকে প্রথমোক্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর বলে।

কাজ : $|\vec{A}| \neq |\vec{B}|$ হলে $\vec{A} + \vec{B} = 0$ হওয়া সম্ভব কি না—ব্যাখ্যা কর।

$\vec{A} + \vec{B} = 0$ হলে $\vec{A} = -\vec{B}$ হবে। অর্থাৎ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ হবে সমমানের ও বিপরীতমুখী। কিন্তু এখানে $|\vec{A}| \neq |\vec{B}|$; অর্থাৎ এদের মান সমান নয়। অতএব, $\vec{A} + \vec{B} = 0$ হতে পারে না।

২.৪ ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম
Rules of geometrical addition of vectors

জ্যামিতিক পদ্ধতি
Geometrical method

একই জাতীয় দুটি ভেক্টর রাশিকে যোগ বা বিয়োগ করা যায়। যেমন সরণের সাথে কেবল সরণই যোগ বা বিয়োগ করা চলে। সরণের সাথে বেগের যোগ বা বিয়োগের প্রশ্নই ওঠে না। ভেক্টর রাশির মান ও দিক দুই-ই আছে। এই

কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ সাধারণ বীজগণিতের নিয়মানুযায়ী করা হয় না। ভেক্টর রাশির দিকই এসব ক্ষেত্রে বিঘ্ন ঘটায়।

একই অভিমুখী দুটি ভেক্টর রাশি যোগ করতে হলে রাশি দুটিকে একই দিকে নির্দেশ করতে হয়, আর বিয়োগ করতে হলে একটি ভেক্টর রাশিকে অপরটির বিপরীত দিকে নির্দেশ করতে হয়। কিন্তু দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এদের যোগফল হবে আর একটি নতুন ভেক্টর রাশি। দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগে যে একটি নতুন ভেক্টর রাশি হয় তাকে এদের লব্ধি (Resultant) বলে। অর্থাৎ লব্ধি হলো ভেক্টর রাশিগুলোর সম্মিলিত ফল।

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগের সূত্র
Laws of addition of vectors in geometrical method

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগ নিম্নলিখিত **পাঁচটি** সূত্রের সাহায্যে করা যায়; যথা—

(১) **সাধারণ সূত্র** (General law)
(২) **ত্রিভুজ সূত্র** (Law of triangle)
(৩) **বহুভুজ সূত্র** (Law of polygon)
(৪) **সামান্তরিক সূত্র** (Law of parallelogram) এবং
(৫) **উপাংশ সূত্র** (Law of components)।

এই অনুচ্ছেদে আমরা প্রথম চারটি সূত্র আলোচনা করবো।

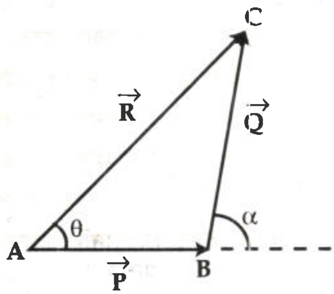
১. সাধারণ সূত্র
General law

(i) দুটি ভেক্টরের যোগ : সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের প্রথমটির শীর্ষ বা শেষ বিন্দু এবং দ্বিতীয়টির আদি বিন্দু একই বিন্দুতে স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু ও দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখার দিকে লব্ধি ভেক্টরের দিক নির্দেশ করবে এবং ওই সরলরেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্দেশ করবে।

ধরা যাক একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্ণয় করতে হবে।

$\vec{P}$ নির্দেশী সরলরেখা AB-এর শীর্ষবিন্দু B-তে $\vec{Q}$ নির্দেশী সরলরেখার আদি বিন্দু থাকে। এরূপে BC রেখা দ্বারা $\vec{Q}$ নির্দেশ করে $\vec{P}$-এর আদিবিন্দু A এবং $\vec{Q}$-এর শীর্ষবিন্দু C যুক্ত করি এবং রেখাটিকে A হতে C অভিমুখে তীর চিহ্নিত করি [চিত্র ২.১৭]। তা হলে তীর চিহ্নিত AC রেখাই লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করবে। এখানে রাশি দুটির যোগফল নিম্ন উপায়ে লেখা হয়—

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.1)$$



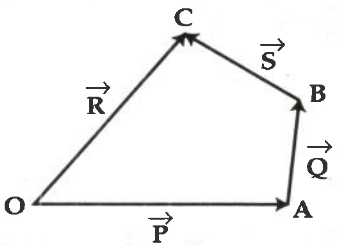
চিত্র ২.১৭

অনুরূপে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগ করা যায়।

(ii) দুটি ভেক্টরের বিয়োগ : ভেক্টর বিয়োগফলের ক্ষেত্রে যে ভেক্টরকে বিয়োগ করতে হবে তার ঋণাত্মক ভেক্টরকে অপর ভেক্টরের সাথে যোগ করলেই বিয়োগফল পাওয়া যায়। P থেকে Q ভেক্টর বিয়োগ করলে বিয়োগফল R হবে—

$$\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} + (-\vec{Q})$$

বিয়োগফলের দিক হবে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দুতে ঋণাত্মক ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর দিকে।



চিত্র ২.১৮

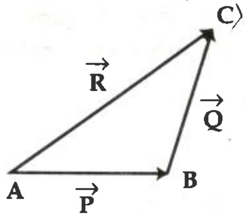
(iii) দুইয়ের অধিক ভেক্টরের যোগ : ২.১৮ চিত্রে তিনটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}, \vec{Q}$ ও $\vec{S}$ যথাক্রমে তীর চিহ্নিত OA, AB ও BC সরলরেখায় নির্দেশ করে OC সরলরেখা দ্বারা এদের লব্ধি $\vec{R}$ সূচিত হয়েছে। এই লব্ধির দিক হবে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু থেকে শেষ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর দিকে।

এখানে লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$

আবার $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ একই ত্রিভুজের তিনটি বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল হলে $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$ হয়।

২. ত্রিভুজ সূত্র
Law of triangle

কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু বরাবর একইক্রমে দুটি ভেক্টর ক্রিয়াশীল হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে।



চিত্র ২.১৯

মনে করি, ABC ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু AB ও BC বরাবর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ একই দিকে ক্রিয়াশীল, তা হলে ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহু AC বরাবর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশিত হবে [চিত্র ২.১৯]।

অর্থাৎ, $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ বা, $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$ ... ... (2.2)

পুন, $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}=-\vec{CA}$ [$\because \vec{AC}=-\vec{CA}$]

বা, $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=0$ ... ... (2.3)

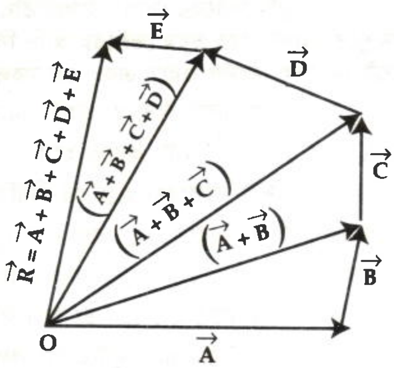
সিদ্ধান্ত : একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত তিনটি সমজাতীয় সমতলীয় ভেক্টর রাশিকে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশ করলে এদের লব্ধি শূন্য হবে।

৩. বহুভুজ সূত্র
Law of polygon

দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে ভেক্টর রাশিগুলোকে একই ক্রমে সাজিয়ে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করলে বিপরীতক্রমে ভেক্টরদ্বয় লব্ধি পাওয়া যায়। এভাবে পরবর্তী প্রত্যেকটি ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু যোগ করতে করতে সর্বশেষ যে ভেক্টরটি পাওয়া যায় সেই বাহুটিই ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ পাঁচটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ২.২০]; এদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে। এখন প্রথম ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর ওপর দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু, দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর ওপর তৃতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু স্থাপন করি এবং এমনিভাবে ভেক্টর রাশিগুলোকে পরপর স্থাপন করি। তা হলে বহুভুজ সূত্রানুসারে প্রথম ভেক্টর রাশির আদি বিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর সংযোজক ভেক্টর রাশি $\vec{R}$-ই উল্লিখিত ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।

$\therefore$ লব্ধি, $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}$



চিত্র ২.২০

৪. সামান্তরিক সূত্র
Law of parallelogram

কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু যদি কোনো কণার ওপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে, তা হলে ওই বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

মনে করি O বিন্দুতে একটি কণার উপর $\vec{OA}=\vec{P}$ ও $\vec{OC}=\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি একই সময়ে α কোণে ক্রিয়া করছে [চিত্র ২.২১]। OA ও OC-কে সন্নিহিত বাহু ধরে OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং OB যুক্ত করি। এই সূত্রানুসারে উভয় ভেক্টরের ক্রিয়াবিন্দু O থেকে অঙ্কিত কর্ণ $\vec{OB}$-ই ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করে।

অর্থাৎ, $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}$

বা, $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$

লব্ধির মান নির্ণয়
Determination of magnitude of the resultant

মনে করি লব্ধির মান R এবং $\angle AOC=\alpha$ কোণটি সূক্ষ্মকোণ। এখন B বিন্দু হতে OA-এর বর্ধিত অংশের ওপর BN লম্ব টানি যা বর্ধিত OA বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করল।

এখানে, AB ও OC সমান্তরাল।

$\therefore \angle AOC = \angle BAN = \alpha$

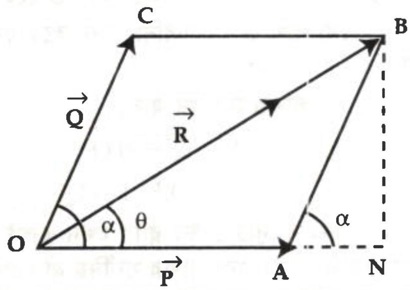
আবার OBN ত্রিভুজের, $\angle ONB$ = এক সমকোণ = $90°$

$\therefore OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA + AN)^2 + BN^2$
$= OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$

চিত্র ২.২১ থেকে ΔABN-এ $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$

$\therefore BN = AB \sin\alpha = Q\sin\alpha$

এবং $\cos\alpha = \frac{AN}{AB}$ $\therefore AN = AB\cos\alpha = Q\cos\alpha$



চিত্র ২.২১

ΔOBN থেকে পাই,

$$OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA + AN)^2 + BN^2$$
$$= OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$$
$$OB^2 = OA^2 + 2OA.Q\cos\alpha + Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha$$
$$= P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.4)$$

লব্ধির দিক নির্ণয়
Determination of direction of the resultant

মনে করি P-এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে লব্ধি R ক্রিয়া করছে, অর্থাৎ $\angle AOB = \theta$

সুতরাং OBN সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\tan\theta = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{(OA + AN)}$$

BAN সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$

$\therefore BN = AB\sin\alpha$

$$= \frac{AB\sin\alpha}{(OA + AB\cos\alpha)}$$
$$= \frac{Q\sin\alpha}{(P + Q\cos\alpha)}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.5)$$

অতএব সমীকরণ (2.4) এবং সমীকরণ (2.5) হতে যথাক্রমে লব্ধির মান (R) এবং দিক (θ) পাওয়া যায়।

লব্ধির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান
Maximum and minimum values of the resultant

মনে করি দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ একই সময়ে কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়া করছে [চিত্র ২.২১]। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রানুসারে এদের লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

(ক) উপরিউক্ত সমীকরণ হতে বলা যায় লব্ধি $\vec{R}$-এর মান $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণের ওপর নির্ভর করে। $\vec{R}$-এর মান সর্বাধিক হবে যখন cos α-এর মান সর্বাধিক (1) হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = 1 = \cos 0°$

বা, $\alpha = 0°$ হবে

$\therefore$ **লব্ধির সর্বোচ্চ মান**

$$R_{max} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0°}$$
$$= \sqrt{(P+Q)^2} = (P+Q) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.10)$$

$\therefore R_{max} = P + Q$

অতএব, **দুটি ভেক্টর যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর একই দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে এবং এই সর্বোচ্চ মান ভেক্টর রাশি দুটির যোগফলের সমান হবে।** অন্যভাবে বলা যায়, **দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির মান এদের যোগফল অপেক্ষা বড় হতে পারে না।**

(খ) লব্ধি R-এর সর্বনিম্ন মান হবে যখন $\cos\alpha$-এর মান সর্বনিম্ন (-1) হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = -1 = \cos 180°$ বা, $\alpha = 180°$ হবে।

∴ **লব্ধির সর্বনিম্ন মান,**

$$R_{min} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ}$$
$$= \sqrt{(P \sim Q)^2} = P \sim Q \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad (2.11)$$

অতএব, **দুটি ভেক্টর রাশি যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বনিম্ন হবে এবং লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টর রাশি দুটির বিয়োগফলের সমান হবে।**

কাজ : একটি রশির দুই প্রান্তে দুই জন ধরে সমান বলে টান দাও। দুই জনের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে কী?

দুটি সমান ও বিপরীতমুখী বল একটি সরলরেখার দুই প্রান্তে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধি শূন্য হয়, তাই দুইজনের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

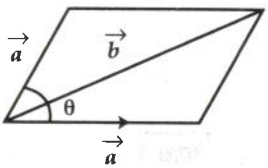
অনুধাবনমূলক কাজ : দুটি সমমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কি না ব্যাখ্যা কর।

জেনে রাখ :

I. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 0°$ হলে, ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হবে।
II. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$ হলে, দুটি ভেক্টরের লব্ধি প্রত্যেক ভেক্টরের সমান হবে।
III. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 180°$ হলে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করবে।

অনুসন্ধান : দুটি সমান মানের ভেক্টরের লব্ধির মান কোন অবস্থায় ওদের প্রত্যেকের মানের সমান হতে পারে ?
[CKRUET Admission Test, 2021-22]

ধরা যাক, প্রত্যেকটি ভেক্টরের মান a, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ এবং ভেক্টর দুটির লব্ধির মান b।



$\therefore \; b^2 = a^2 + a^2 + 2a.a\cos\theta$

বা, $b^2 = 2a^2 + 2a^2\cos\theta$

বা, $b^2 = 2a^2(1 + \cos\theta)$

$\therefore \; b = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

এখন $b = a$ হবে যদি $\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 1$ হয়

বা, $2(1+\cos\theta) = 1$

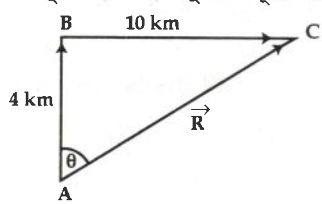
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

বা, $\theta = 120°$ হয়।

অতএব, মূল ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে লব্ধির মান ওদের প্রত্যেকের মানের সমান হয়।

হিসাব কর : একটি কণার উত্তর ও পূর্ব দিকে যথাক্রমে 4 km এবং 10 km সরণ হলে, লব্ধি সরণ নির্ণয় কর।
[CKRUET Admission Test, 2021-22]

$\vec{AB}$ এবং $\vec{BC}$ ভেক্টর যথাক্রমে উত্তর ও পূর্ব দিকে 4 km এবং 10 km সরণ সূচিত করে। ত্রিভুজের সূত্র অনুযায়ী লব্ধি $\vec{AC}$ সরণ ভেক্টর আঁকা হলো। $\vec{AB}$ এবং $\vec{AC}$-এর অন্তর্বর্তী কোণ θ এবং লব্ধি ভেক্টরের মান R হলে,



$$R = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 10{\cdot}77 \text{ km}$$

এবং $\tan\theta = \frac{10}{4} = 2{\cdot}5$

$\therefore \; \theta = 68{\cdot}2°$

কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র (Some special cases)

(i) $\alpha = 0$ হলে অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে বা ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0^\circ$$
$$= P^2 + Q^2 + 2PQ = (P+Q)^2 \quad [\because \cos 0^\circ = 1]$$
$$\therefore \quad R = P + Q$$

এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 0^\circ}{P + Q\cos 0^\circ} = \dfrac{0}{P+Q} = 0 \quad [\because \sin 0^\circ = 0]$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 0^\circ$$
$$\therefore \quad \theta = 0^\circ$$

সুতরাং দুটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল এবং দিক হবে ভেক্টরদ্বয় যেদিকে ক্রিয়া করে সেই দিকে।

(ii) $\alpha = 90^\circ$ হলে, অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90^\circ$ বা, $R^2 = P^2 + Q^2$

$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 90^\circ}{P + Q\cos 90^\circ}$

$\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{Q}{P}\right)$

অর্থাৎ দুটি ভেক্টর পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে রাশিদ্বয়ের বর্গের যোগফলের বর্গমূলের সমান।

(iii) $\alpha = 180^\circ$ হলে অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী হলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180^\circ = P^2 + Q^2 - 2PQ$$

বা, $R^2 = (P \sim Q)^2 \quad \therefore \quad R = P \sim Q$

এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 180^\circ}{P + Q\cos 180^\circ} = \dfrac{0}{P - Q} = 0$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 180^\circ$ বা, 0°

অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী হলে তাদের লব্ধির মান হবে ভেক্টর দুটির বিয়োগফল এবং দিক হবে বৃহত্তর ভেক্টরটির দিকে। ভেক্টর দুটি সমান ও বিপরীতমুখী হলে, লব্ধি হবে শূন্য।

সিদ্ধান্ত : উপরিউক্ত ক্ষেত্রসমূহ বিবেচনা করে নিম্নের ফলাফল পাওয়া যায়। যখন a ও b দুটি ভেক্টরের মান এবং c উহাদের লব্ধির মান প্রকাশ করে।

(i) দুটি ভেক্টরের **লব্ধির সর্বোচ্চ মান** হলো $c = a + b$, যখন মূল ভেক্টর দুটি সমমুখী।

(ii) দুটি ভেক্টরের **লব্ধির সর্বনিম্ন মান** হলো $c = a \sim b$ যখন মূল ভেক্টর দুটি বিপরীতমুখী।

(iii) মূল ভেক্টর দুটি সমান ও বিপরীতমুখী হলে তাদের **লব্ধির মান শূন্য হয়।**

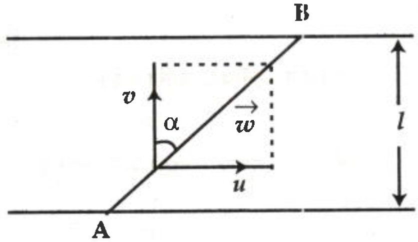
ক্রিয়াকর্ম : 3F এবং 3F ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর R। প্রথম ভেক্টরকে দ্বিগুণ করলে লব্ধি ভেক্টরও দ্বিগুণ হয়। ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উ. 163·73°]

২·৫ নদীতে নৌকার গতি
Motion of a boat on a river

ধরা যাক, একটি নদীর প্রস্থ $= l$ এবং স্রোতহীন পানিতে একটি নৌকার বেগ $= v$। নদীতে কোনো স্রোত না থাকলে নৌকাটি আড়াআড়িভাবে (অর্থাৎ প্রস্থ বরাবর) নদী পার হতে সময় নেয়,

$$t = \frac{l}{v} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.6)$$

এখন, নদীর লম্বালম্বি দিকে (অর্থাৎ দৈর্ঘ্য বরাবর) স্রোতের বেগ u হলে নৌকাটির একই সাথে v এবং u এই দুটি বেগই থাকে। ফলে নৌকাটি এই দুই বেগের লব্ধি বেগ $\vec{w}$ নিয়ে কোনাকুনি নদী পার হয় [চিত্র ২·২২]। অর্থাৎ নৌকাটি A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে যায়।



চিত্র ২·২২

লব্ধি বেগের মান, $w = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.7)$

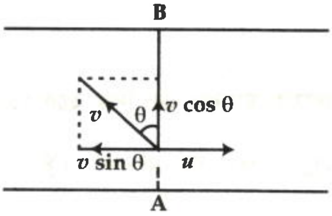
লব্ধি বেগ আড়াআড়ি দিকের সাথে α কোণ করলে,

$$\tan\alpha = \frac{u}{v} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.8)$$

২.৫.১ ন্যূনতম দূরত্বে নদী পারাপার
Crossing or ferrying a river at a minimum distance

চিত্র ২·২৩-এ নৌকাটিকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে যেতে হলে সেটিকে কোনদিকে চালনা করতে হবে?

মনে করা যাক, আড়াআড়ি দিকের সাথে θ কোণে অর্থাৎ স্রোতের দিকের সাথে $(90° + \theta)$ কোণে আনত রেখে নৌকাটিকে চালানো হলো। এক্ষেত্রে নৌকার বেগ $\vec{v}$-এর দুটি লম্ব উপাংশ বিবেচনা করলে পাওয়া যায়—



চিত্র ২·২৩

(i) স্রোতের উল্টোদিকে $v \sin\theta$ যার কাজ হলো স্রোতের বিরোধিতা করা। স্রোতের বেগ সম্পূর্ণ প্রতিমিত (balanced) হওয়ার শর্ত হলো,

$$u = v\sin\theta$$

বা, $$\sin\theta = \frac{u}{v}$$

বা, $$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$$

(ii) আড়াআড়ি দিকের উপাংশ $v \cos\theta$ যা নৌকাকে আড়াআড়ি দিকে চালিত করে, ফলে l দৈর্ঘ্যের নদী পার হতে নৌকাটির সময় লাগে,

$$t' = \frac{l}{v\cos\theta} \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad (2.9)$$

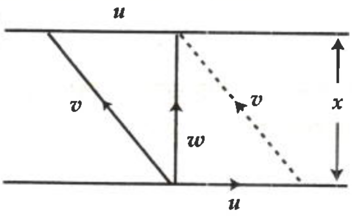
২·৫·২ ন্যূনতম সময়ে নদী পারাপার
Crossing or ferrying a river in minimum time

2.9নং সমীকরণে $\cos\theta$ সর্বোচ্চ হলে সময় ন্যূনতম হয়। এর শর্ত হলো $\cos\theta = 1$ বা, $\theta = 0°$; অর্থাৎ স্রোতের বেগ যাই হোক না কেন, নৌকাটিকে আড়াআড়ি দিকেই চালনা করতে হবে। ফলে স্রোতের জন্য নৌকার প্রকৃত গতি হয় কোনাকুনি [চিত্র ২·২২]।

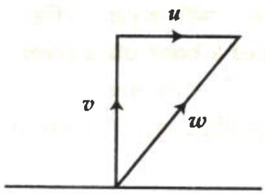
উদাহরণ ১। দুটি নৌকা প্রতিটি ঘণ্টায় 10 km বেগে 1 km চওড়া নদী পার হতে চেষ্টা করে। নদীতে স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 6 km। একটি নৌকা ন্যূনতম পথে এবং আরেকটি ন্যূনতম সময়ে নদী অতিক্রম করল। যদি নৌকা দুটি একই সঙ্গে রওনা হয়ে থাকে তবে তারা কত সময়ের ব্যবধানে অপর পাড়ে পৌঁছাবে?

ধরা যাক, স্রোতের বেগ $= u$, নৌকার বেগ $= v$ এবং নদীর প্রস্থ $= x$

ন্যূনতম পথে নদী পার হতে গেলে নৌকাকে প্রতিকূল স্রোতের সাথে এমন কোণ করে চলতে হবে যাতে স্রোতের বেগ এবং নৌকার বেগের লব্ধি স্রোতের দিকের সাথে লম্ব হয় [চিত্র ১(ক)]।



চিত্র ১(ক)



চিত্র ১(খ)

অতএব, নৌকার লব্ধি বেগ,

$$w = \sqrt{v^2 - u^2}$$

অতএব, ন্যূনতম পথে নদী পার হতে সময় লাগে,

$$t_1 = \frac{x}{w} = \frac{x}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{10^2 - 6^2}}$$

$$= \frac{1}{8} = 0·125 \text{ hr} = 7·5 \text{ min}$$

এখানে,
$x = 1$ km
$v = 10$ kmh^{-1}
$u = 6$ kmh^{-1}

আবার, ন্যূনতম সময়ে নদী পার হতে হলে নৌকাকে স্রোতের সমকোণে চালনা করতে হবে [চিত্র ১(খ)]। সুতরাং ন্যূনতম সময় লাগে,

$$t_2 = \frac{x}{v} = \frac{1}{10} = 0{\cdot}1 \text{ hr} = 6 \text{ min}$$

অতএব, নির্ণেয় সময় ব্যবধান $= t_1 - t_2 = 7{\cdot}5 - 6 = 1{\cdot}5$ min

অর্থাৎ, নৌকা দুটি $1{\cdot}5$ min সময় ব্যবধানে নদীর অপর পাড়ে পৌছাবে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.২

১। দেখাও যে, দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[PSTU Admission Test, 2015-16]

মনে করি, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ α [চিত্র ২·২১]।

সুতরাং, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ [$\theta = \vec{P}$ এবং লব্ধি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ]

$= \dfrac{Q\sin\alpha}{Q + Q\cos\alpha}$ [$\because |\vec{P}| = |\vec{Q}|$]

$= \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \tan\frac{\alpha}{2}$

$\therefore \quad \theta = \dfrac{\alpha}{2}$ (প্রমাণিত)

২। $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ এবং $P^2 + Q^2 = R^2$ হলে $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মধ্যে সম্পর্ক কী?

মনে করি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ

সুতরাং, $P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta = R^2$; কিন্তু $P^2 + Q^2 = R^2$

$\therefore \quad R^2 - PQ\cos\theta = R^2$

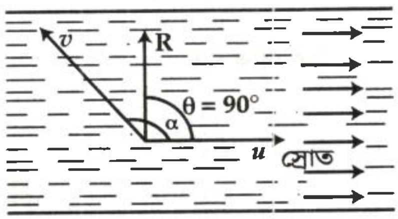
$\therefore \quad 2PQ\cos\theta = 0$ বা, $\cos\theta = 0$

$\therefore \quad \theta = 90°$

অর্থাৎ, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটি পরস্পরের ওপর লম্ব।

৩। কোনো একটি নদীতে একটি দাঁড়ের নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 18 km এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় 6 km। নৌকাটিকে কোন দিকে চালনা করলে তা সোজা অপর পাড়ে পৌছবে এবং নৌকাটি কত বেগে চলবে?

[RUET Admission Test, 2010-11]



ধরা যাক স্রোতের বেগ $= u$ এবং দাঁড়ের বেগ $= v$ । তা হলে,

$u + v = 18$ এবং $v - u = 6$

$\therefore$ সমীকরণ দুটির যোজন ও বিয়োজনে পাওয়া যায়,

$v = 12 \text{ km h}^{-1}$ এবং $u = 6 \text{ km h}^{-1}$

ধরা যাক স্রোতের সাথে α কোণ করে নৌকাটিকে চালনা করলে তা R বেগে চলে সোজা অপর পাড়ে পৌছবে। তা হলে স্রোতের গতি বরাবর R-এর অংশ, $R\cos 90° = 0 = u\cos 0° + v\cos\alpha$

$\therefore \quad \cos\alpha = -\dfrac{u}{v} = -\dfrac{6}{12}$

$= -\dfrac{1}{2} = \cos 120°$

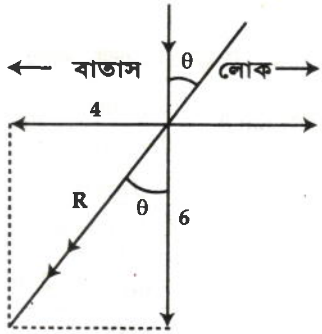
বা, $\alpha = 120°$

আবার, প্রস্থ বরাবর নৌকার লব্ধি বেগ,

$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (12)^2 + 2\times6\times12\cos(120°)}$$
$$= 6\sqrt{3} = 10.39 \text{ kmh}^{-1}$$

৪। 4 ms^{-1} বেগে দৌড়ে যাবার সময় একজন লোক 6 ms^{-1} বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো। বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে হলে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে? [Admission Test : JU unit-A 2020-21; KU 2012-13; BAU 2012-13 (মান ভিন্ন); JUST 2015-16; SAU 2011-12]

মনে করি বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$$\therefore \tan\theta = \frac{4 \text{ ms}^{-1}}{6 \text{ ms}^{-1}} = 0.666$$

বা, $\tan\theta = \tan 33.7°$

$\therefore \theta = 33.7°$

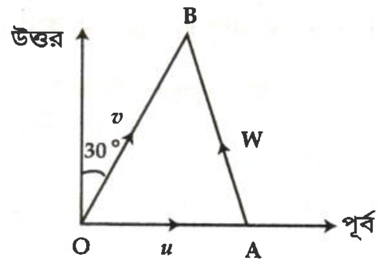
সুতরাং লোকটিকে উল্লম্ব দিকের সাথে 33.7° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

৫। একটি জাহাজ প্রতি ঘণ্টায় 20 km বেগে পূর্ব দিকে গতিশীল। একটি নৌকা উত্তরের সাথে 30° কোণ করে পূর্ব দিকে যাচ্ছে। নৌকার বেগ কত হলে জাহাজটি থেকে মনে হবে নৌকাটি সর্বদাই উত্তর দিকে যাচ্ছে?

এখানে জাহাজের বেগ, $u = \overrightarrow{OA}$ এবং নৌকার বেগ, $v = \overrightarrow{OB}$ [চিত্র দ্রষ্টব্য]।

অতএব জাহাজের সাপেক্ষে নৌকাটির বেগ,

$$\vec{W} = \vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$



চিত্রানুসারে, $\sin 30° = \frac{u}{v}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{u}{v}$

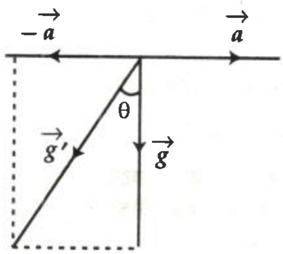
বা, $v = 2u = 2\times20 \text{ kmh}^{-1}$ [এখানে, $u = 20 \text{ kmh}^{-1}$]

$= 40 \text{ kmh}^{-1}$

৬। একজন লোক 6 ms^{-2} ত্বরণসহ গতিশীল একটি মোটর গাড়িতে বসে আছে। তার চোখে পৃথিবীর আকর্ষণ কোন দিকে ক্রিয়াশীল এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত?

ধরা যাক, লোকটির ত্বরণ = $\vec{a}$ এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ = g। সুতরাং লোকটির সাপেক্ষে আপেক্ষিক অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$$



এখানে,
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$
$a = 6 \text{ ms}^{-2}$

চিত্র থেকে পাই,

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2}$$
$$= \sqrt{(9.8)^2 + (6)^2}$$
$$= \sqrt{96.04 + 36} = \sqrt{132.04}$$
$$= 11.49 \text{ ms}^{-2}$$

এবং $\tan\theta = \frac{a}{g} = \frac{6}{9.8} = 0.61 = \tan 31.4°$

$\therefore \theta = 31.4°$

সুতরাং, লোকটির চোখে পৃথিবীর আকর্ষণ নিচের দিকে উল্লম্বের সাথে 31.4° কোণে এবং তার গতির বিপরীত দিকে হেলানো অবস্থায় গতিশীল।

৭। একটি বস্তুকে 50 N বল দ্বারা পশ্চিম দিকে এবং 20 N বল দ্বারা উত্তর দিকে টানা হচ্ছে। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর। [JU Admission Test, 2018-19]

আমরা জানি,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(50)^2 + (20)^2 + 2 \times 50 \times 20 \cos 90^\circ}$$
$$= \sqrt{(50)^2 + (20)^2} = \sqrt{2500 + 400}$$
$$= \sqrt{2900}\ N = 53{\cdot}85\ N$$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \dfrac{20\sin 90^\circ}{50 + 20\cos 90^\circ} = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{2}{5} = 21{\cdot}80^\circ$

এখানে,

$P = 50\ N$

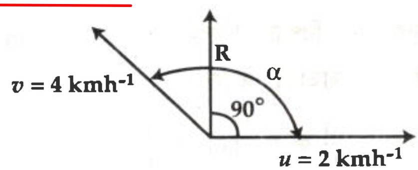
$Q = 20\ N$

$\alpha = 90^\circ$

$R = ?$

$\theta = ?$

৮। স্রোত না থাকলে একজন সাঁতারু 4 kmh^{-1} বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। 2 kmh^{-1} বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে সাঁতারুকে কোন দিকে কত বেগে সাঁতার কাটতে হবে? [JU Admission Test, 2016-17]



মনে করি, স্রোতের বেগ u এবং সাঁতারুর বেগ v এবং বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α। নদীটিকে সোজাসুজি অতিক্রম করতে সাঁতারুর লব্ধি বেগ R স্রোতের বেগ u-এর সাথে $\theta = 90^\circ$ কোণ তৈরি করে সাঁতার কাটতে হবে।

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

বা, $\tan 90^\circ = \dfrac{4 \times \sin\alpha}{2 + 4\cos\alpha}$

বা, $\infty = \dfrac{4 \times \sin\alpha}{2 + 4\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{4 \times \sin\alpha}{2 + 4\cos\alpha}$

বা, $2 + 4\cos\alpha = 0$

বা, $4\cos\alpha = -2$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad \alpha = 120^\circ$

এখানে,

$u = 2\ kmh^{-1}$

$v = 4\ kmh^{-1}$

$\theta = 90^\circ$

$\alpha = ?$

অর্থাৎ সাঁতারুকে স্রোতের সাথে 120° কোণে সাঁতার কাটতে হবে।

আবার সাতারুর লব্ধি বেগ,

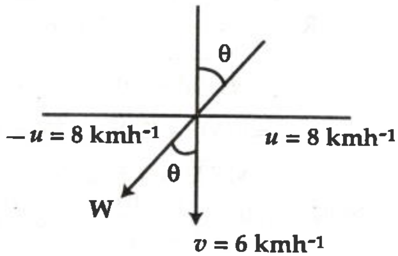
$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + 2 \times 2 \times 4\cos(120^\circ)}$$
$$= \sqrt{4 + 16 + 2 \times 2 \times 4\cos(120^\circ)}$$
$$= \sqrt{20 + 16 \times \cos(-0{\cdot}5)} = \sqrt{12}$$
$$= 3{\cdot}464\ kmh^{-1}$$

৯। শান্ত বাতাসে 6 kmh^{-1} বেগে বৃষ্টি পড়ছে। এ সময়ে সাইকেলে চড়ে আবিদ 8 kmh^{-1} বেগে বাড়ি ফিরছে। বাতাস প্রবাহিত হতে থাকলে উভয়ক্ষেত্রে বৃষ্টি থেকে বাঁচতে আবিদ ছাতা ব্যবহার করল। (ক) স্থির বাতাসে লব্ধি বেগ নির্ণয় কর। (খ) বাতাস প্রবাহিত হবার আগে ও পরে একইভাবে ছাতা ধরলে আবিদ বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবে কি না? গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

(ক) লব্ধি বেগ, $W = \sqrt{u^2 + v^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= 10\ kmh^{-1}$

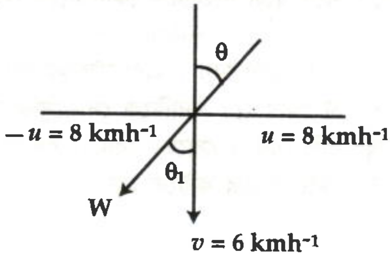


বৃষ্টি উলম্বের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$\tan\theta = \frac{u}{v} = \frac{8}{6}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = 53^{\cdot}13°$

(খ) 'ক' থেকে দেখা যায় বায়ু প্রবাহের আগে আবিদকে 53˙13° কোণে ছাতা ধরতে হবে।



আবিদের গতির বিপরীত দিকে বেগ, $u = 10\ kmh^{-1}$

আবিদের গতির বিপরীত দিকে বেগ, $u' = 10\ kmh^{-1}$

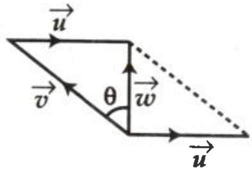
সুতরাং তাকে ছাতা ধরতে হবে,

$\tan\theta = \frac{10}{6}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{6}\right) = 59°$

অর্থাৎ বাতাস প্রবাহিত হওয়ার আগে ও পরে একইভাবে ছাতা ধরলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবে না।

১০। স্থির পানিতে একটি নৌকার বেগ 5 km/hr। নৌকাটি 20 min-এ 1 km চওড়া একটি নদী আড়াআড়িভাবে অতিক্রম করে। নদীর স্রোতের বেগ কত? [CUET Admission Test, 2002-04 (মান ভিন্ন)]

নৌকাটি আড়াআড়িভাবে 20 min-এ অর্থাৎ $\frac{1}{3}$ hr-এ 1 km দূরত্ব অতিক্রম করে।



সুতরাং নৌকার লব্ধি বেগের মান, $W = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3\ km/hr$

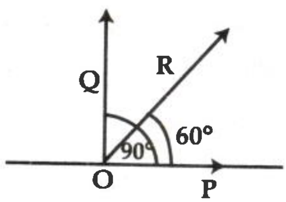
স্থির পানিতে নৌকার বেগ $\vec{v}$ এবং স্রোতের বেগ $\vec{u}$ হলে চিত্র থেকে পাই,

$v^2 = u^2 + w^2$ বা, $u^2 = v^2 - w^2$

বা, $u = \sqrt{v^2 - w^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\ km/hr$

১১। পরস্পরের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি 80N। যদি লব্ধি একটি বলের সাথে 60° কোণে আনত থাকে, তবে বল দুইটির মান নির্ণয় কর। [RUET Admission Test, 2017—18]

মনে করি, P ও Q দুটি বল এবং এদের অন্তর্গত কোণ θ = 90°



এখানে,

R = 80N

θ = 60°

α = 90°

আমরা জানি,

$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

বা, $\tan 60° = \frac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{Q}{P}$

$\therefore\ Q = \sqrt{3}P \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

আবার,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$= P^2 + (\sqrt{3}P)^2 + 2.P.\sqrt{3}P\cos 90°$$
$$= P^2 + 3P^2 = 4P^2$$

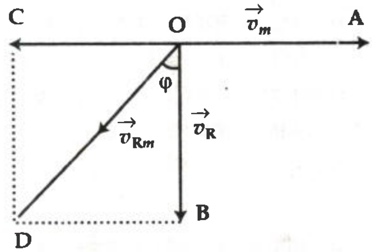
$\therefore$ $(80)^2 = 4P^2$ বা, $P^2 = \frac{80 \times 80}{4} = 1600$

$\therefore$ $P = \sqrt{1600} = 40N$

অতএব, $Q = \sqrt{3}P = \sqrt{3} \times 40 = 69.28N$

অনুধাবনমূলক কাজ : মোটর গাড়ির wiper দণ্ডগুলো সব ক্ষেত্রেই গাড়ির সামনের কাচে লাগানো থাকে কেন ? ব্যাখ্যা কর।

মনে করি, একটি গাড়ি v_m বেগে সামনের দিকে গতিশীল [চিত্র দ্রষ্টব্য]। চিত্রে $\overrightarrow{OA}$ মোটর গাড়ির বেগ নির্দেশ করছে। উল্লম্বভাবে আপতিত বৃষ্টির গতিবেগ $\overrightarrow{OB}$ রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। $\overrightarrow{OC}$ রেখা গাড়ির ঋণাত্মক বেগ নির্দেশ করে $(-v_m)$। সুতরাং আয়তক্ষেত্র OCDB-এর কর্ণ $\overrightarrow{OD}$ মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির গতিবেগ নির্দেশ করে।



সুতরাং, মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক গতিবেগ,

$$\vec{v}_{Rm} = \vec{v}_R - \vec{v}_m$$

এখন চিত্র থেকে পাই,

$$v_{Rm} = \sqrt{v_R^2 + v_m^2 + 2v_R.v_m\cos 90°}$$
$$= \sqrt{v_R^2 + v_m^2}$$

সুতরাং, মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক গতিবেগের মান হবে,

$$v_{Rm} = \sqrt{v_R^2 + v_m^2}$$

এই আপেক্ষিক বেগ উল্লম্বের সাথে φ কোণ উৎপন্ন করলে আমরা পাই,

$$\tan\varphi = \frac{v_m}{v_R}$$

যেহেতু v_{Rm} -এর অভিমুখ উল্লম্বের সাথে আনতভাবে হয় তাই বৃষ্টির মধ্য দিয়ে অনুভূমিকভাবে গতিশীল গাড়ির নিকট বৃষ্টি তির্যকভাবে পড়ছে বলে মনে হবে। ফলে বৃষ্টির মধ্য দিয়ে চলমান গাড়ির সামনের কাচ পিছনের কাচ অপেক্ষা বেশি ভেজে। এই কারণেই গাড়ির wiper দণ্ডগুলো গাড়ির সামনের কাচে লাগানো হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৩

১। দুটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 10 N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 4 N; বল দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে একটি কণার উপর ক্রিয়া করলে লব্ধির মান কত হবে? [DU (HEC) Admission Test, 2020-21 (মান ভিন্ন); CUET 2015-16 (মান ভিন্ন)]

এখানে
$R_{max} = 10$ N
$R_{min} = 4$ N
$\alpha = 90°$
$R = ?$

আমরা জানি

$R_{max} = P + Q$

বা, $10 = P + Q$ ... ... (i)

আবার $R_{min} = P - Q$

বা, $4 = P - Q$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2P = 14$ N $\therefore$ $P = 7$ N

আবার সমীকরণ (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই

$2Q = 6$ N $\therefore$ $Q = 3$ N

আবার $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90°$ [$\because \cos 90° = 0$]

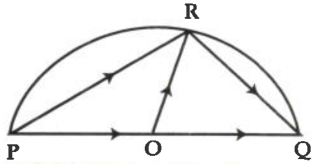
$= P^2 + Q^2 + 0 = (7)^2 + (3)^2 = 49 + 9 = 58$

$\therefore$ $R = \sqrt{58}$ N

২। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

ধরা যাক, PQR একটি অর্ধবৃত্তস্থ ত্রিভুজ [চিত্র দ্রষ্টব্য]। $\angle PRQ$ হলো অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PRQ = 1$ সমকোণ।



এখন, $\angle PRQ$ সমকোণ হলে PQ এবং RQ পরস্পরের ওপর লম্ব হবে।

ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$ $\therefore$ $PO = OQ = r$ এবং $OR = s$ (ধরি)

$\therefore$ $|\vec{r}| = |\vec{s}| = r =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

এখন, ΔPOR-এর ক্ষেত্রে লেখা যায়, $\vec{PR} = \vec{PO} + \vec{OR} = \vec{r} + \vec{s}$

আবার, ΔQRO-এর জন্য লেখা যায়, $\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ}$

বা, $\vec{RQ} = \vec{OQ} - \vec{OR} = \vec{r} - \vec{s}$

$\therefore$ $\vec{PR} . \vec{RQ} = (\vec{r} + \vec{s}) . (\vec{r} - \vec{s}) = \vec{r} . \vec{r} - \vec{r} . \vec{s} + \vec{s} . \vec{r} - \vec{s} . \vec{s}$

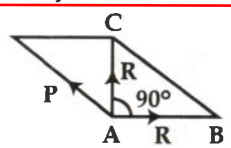
$= r^2 - s^2 = r^2 - r^2 = 0$

$\therefore$ $PR \perp RQ$

অতএব, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ $\angle PRQ = 1$ সমকোণ। (প্রমাণিত)

৩। দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান R একটি ভেক্টরের মানের সমান এবং তার সাথে লম্ব, অন্যটির মান কত?

ভেক্টর দুটির একটির মান R এবং অপরটির মান P (ধরি)। চিত্র অনুসারে, ΔABC থেকে পাই,



$R^2 + R^2 = P^2$ বা, $P^2 = 2R^2$

$\therefore$ $P = \sqrt{2} R$

৪। দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি নাল ভেক্টর হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

[Admission Test : BUET 2021-22]

ধরি ভেক্টর দুটি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$। প্রশ্নানুসারে, $P = Q$ এবং $R = 0$

আমরা জানি,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$$

বা, $0 = \sqrt{P^2 + P^2 + 2P^2 \cos \alpha}$

বা, $2P^2 + 2P^2 \cos \alpha = 0$

বা, $\cos \alpha = -\frac{2P^2}{2P^2} = -1$

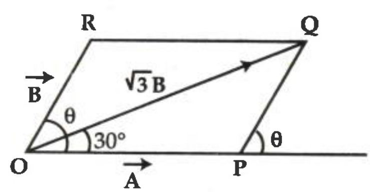
$\therefore$ $\alpha = 120°$

৫। $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান $\sqrt{3}B$ এবং লব্ধি $\vec{A}$ ভেক্টরের সাথে 30° কোণে আনত থাকে। দেখাও যে, A = B বা A = 2B।

চিত্র থেকে পাই, $\vec{OP} = \vec{A}$

$\vec{OR} = \vec{B}$ এবং $|\vec{OQ}| = \sqrt{3}B$

এখন OPQ ত্রিভুজ থেকে ত্রিকোণমিতির নিয়ম অনুসারে পাই,



$$\frac{OP}{\sin OQP} = \frac{PQ}{\sin 30°} = \frac{OQ}{\sin OPQ}$$

বা, $\frac{A}{\sin(\theta - 30°)} = \frac{B}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{3}B}{\sin(180° - \theta)}$

বা, $\frac{A}{\sin(\theta - 30°)} = 2B = \frac{\sqrt{3}B}{\sin(180° - \theta)}$

$$\therefore \quad 2 = \frac{\sqrt{3}}{\sin(180° - \theta)} \text{ বা, } \sin(180° - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

বা, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \quad \theta = 60°$ বা, $120°$

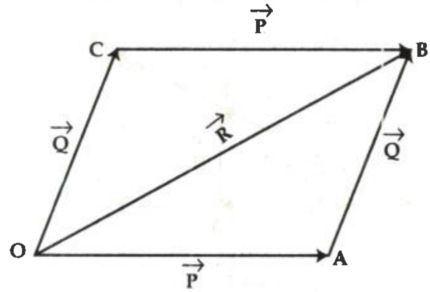
(i) $\theta = 60°$ হলে, $\frac{A}{\sin(60° - 30°)} = 2B; \ \therefore \ A = B$

এবং (ii) $\theta = 120°$ হলে, $\frac{A}{\sin(120° - 30°)} = 2B; \ \therefore \ A = 2B$

২.৬ ভেক্টর যোগের কয়েকটি সূত্র
Some laws of vector addition

ক. বিনিময় সূত্র (Commutative law) :

$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ [MAT: 18-19]



চিত্র ২.২৪

প্রমাণ : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{R}$ রাশি দুটির লব্ধি [চিত্র ২.২৪]।

ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে OAB ত্রিভুজে,

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

অর্থাৎ $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

এখন OABC সামান্তরিক অঙ্কন করি এবং OC ও CB-কে যথাক্রমে AB ও OA-এর ন্যায় তীর চিহ্নিত করি। OCB ত্রিভুজে,

$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$ (ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে)

$\therefore \quad \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OC} + \vec{CB}$

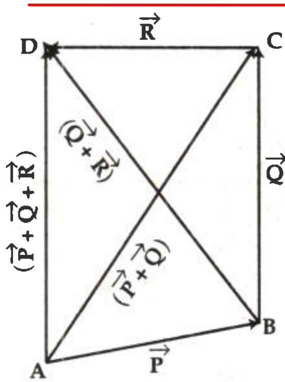
অর্থাৎ $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ ... ... (2.12)

এটিই হলো বিনিময় সূত্র। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

তেমনি স্কেলার রাশিও বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

খ. সংযোজন সূত্র (Associative law) :

$(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$



চিত্র ২.২৫

মনে করি $\vec{P}, \vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ তিনটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ২.২৫]। এদেরকে যথাক্রমে $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ এবং $\vec{CD}$ রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। এখন AC, BD এবং AD যোগ করি। অতএব ত্রিভুজের সূত্র হতে পাই,

ABC ত্রিভুজে, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{P} + \vec{Q}$

ACD ত্রিভুজে, $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$

$$= \left(\vec{P} + \vec{Q}\right) + \vec{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.13)$$

আবার BCD ত্রিভুজে,

$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{Q} + \vec{R}$

এবং ABD ত্রিভুজে, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{P} + \left(\vec{Q} + \vec{R}\right)$ ... ... (2.14)

∴ সমীকরণ (2.13) এবং সমীকরণ (2.14) হতে পাই,

$$\left(\vec{P} + \vec{Q}\right) + \vec{R} = \vec{P} + \left(\vec{Q} + \vec{R}\right)$$

এটিই হলো ভেক্টর রাশির যোগের সংযোজন সূত্র অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ সংযোজন সূত্র মেনে চলে।

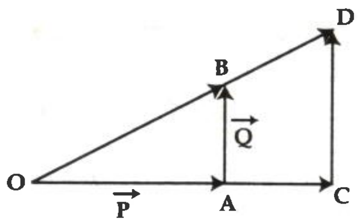
গ. বণ্টন সূত্র (Distributive law) :

$m(\vec{P} + \vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q}$

মনে করি, $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{AB} = \vec{Q}$ [চিত্র ২.২৬]। OB যোগ করি। এখন ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} = \vec{P} + \vec{Q}$

মনে করি, OA ও OB-এর বর্ধিতাংশের উপর C ও D দুটি বিন্দু নেয়া হলো যাতে $\vec{OC} = m\vec{OA} = m\vec{P}$



চিত্র ২.২৬

এবং $\vec{CD} = m\vec{AB} = m\vec{Q}$

এখন OAB এবং OCD সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে,

$$\frac{\vec{OC}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OD}}{\vec{OB}} = \frac{\vec{CD}}{\vec{AB}} = \frac{m\vec{Q}}{\vec{Q}} = m$$

∴ $\vec{OD} = m\vec{OB} = m(\vec{P} + \vec{Q})$ ... ... (2.15)

আবার ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = m\vec{P} + m\vec{Q}$

∴ $m(\vec{P} + \vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q}$ ... ... (2.16)

এটিই হলো ভেক্টর যোগের বণ্টন সূত্র। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ বণ্টন সূত্র মেনে চলে।

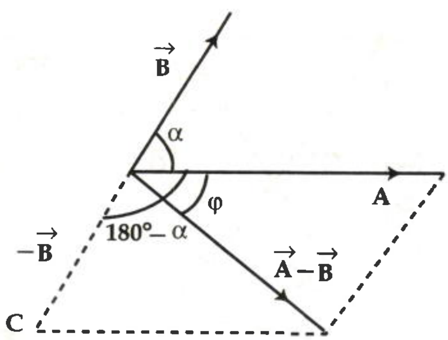
ভেক্টরের বিয়োগ
Subtraction of vectors

দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের বিয়োগফল বলতে একটি ভেক্টরের সাথে অপরটির বিপরীত ভেক্টরের যোগফল বোঝায়।

ব্যাখ্যা : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের বিয়োগ $\vec{A} - \vec{B}$ হলো $\vec{A} + (-\vec{B})$-এর সমান।

∴ $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

ধরা যাক, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ α হলে $\vec{A}$ এবং $(-\vec{B})$-এর অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে $(180° - \alpha)$ [চিত্র ২.২৭ দ্রষ্টব্য]।



চিত্র ২.২৭

সুতরাং, $\vec{A}$ এবং $(-\vec{B})$-এর লব্ধির মান হবে,

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(180° - \alpha)}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha} \quad \ldots \quad (i)$$

$\vec{A}$-এর সঙ্গে $(\vec{A} - \vec{B})$-এর সৃষ্ট কোণ φ হলে,

$$\tan\varphi = \frac{B\sin(180° - \alpha)}{A + B\cos(180° - \alpha)}$$

$$= \frac{B\sin\alpha}{A - B\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ :

(i) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = 90°$ হলে লব্ধি ভেক্টরের মান হবে, $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ [সামান্তরিকের সূত্রানুসারে] এবং ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফলের মান হবে, $S = \sqrt{A^2 + B^2}$ [সমীকরণ (i) ব্যবহার করে]।

অতএব, $R = S = \sqrt{A^2 + B^2}$ । এক্ষেত্রে লব্ধি এবং বিয়োগফলের মান সমান।

(ii) $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান হলে এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = 90°$ হলে,

$$R = S = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2A^2} = \sqrt{2}\,A$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৪

১। দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যথাক্রমে পূর্ব ও দক্ষিণ দিকে ক্রিয়াশীল। এদের মান হলো যথাক্রমে $4a$ ও $3a$। $(\vec{A} - \vec{B})$-এর মান ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, $A = 4a$ এবং $B = 3a$ এবং $\alpha = 90°$

চিত্রে $\vec{OP} = \vec{A}$ এবং $\vec{OQ} = \vec{B}$

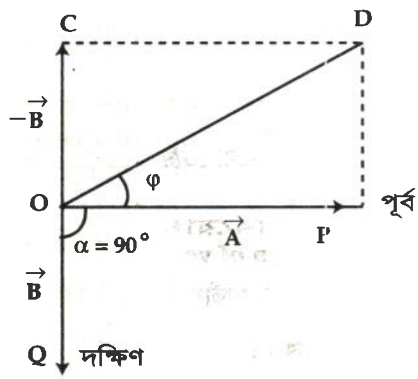
$\therefore \quad \vec{OC} = -\vec{B}$

$$\therefore \quad |\vec{A} - \vec{B}| = OD = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha}$$

$$= [(4a)^2 + (3a)^2 - 2.4a.3a\cos 90°]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (16a^2 + 9a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (25a^2)^{\frac{1}{2}} = 5a$$



ধরা যাক, $(\vec{A} - \vec{B})$ ভেক্টরটি পূর্ব দিকের সাথে φ কোণে আনত।

$$\therefore \quad \tan\varphi = \frac{B}{A} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 36{\cdot}9°$$

সুতরাং, $(\vec{A} - \vec{B})$-এর অভিমুখ হবে পূর্ব দিকের সাথে $36{\cdot}9°$ কোণে উত্তর দিকে।

২·৭ ভেক্টর বিভাজন

Resolution of vectors

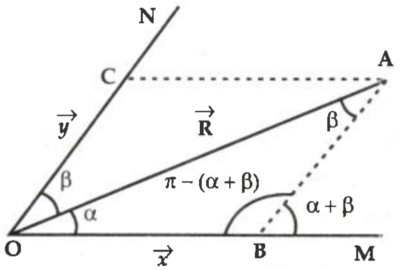
দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যেমন সংযোজন সম্ভব, তেমনি একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক অংশে বিভাজন সম্ভব। বিভাজিত অংশগুলোকে প্রদত্ত ভেক্টরের উপাংশ (component) বলা হয়।

সংজ্ঞা : কোনো একটি ভেক্টরকে দুই বা ততোধিক ভেক্টরে যদি এমনভাবে বিভাজিত করা হয় যাতে মূল ভেক্টরটি বিভাজিত অংশগুলোর লব্ধি হয়, তবে এই বিভাজনকে ভেক্টর বিভাজন বলা হয়। এই বিভাজিত অংশগুলোকে মূল ভেক্টরটির উপাংশ বলা হয়।

কোনো ভেক্টরকে ভেক্টর বিভাজন প্রক্রিয়ায় দুই উপাংশে বিভাজিত করলেই প্রায় সব ধরনের সমস্যার সমাধান করা সম্ভব হয়।

২·৭·১ দুটি উপাংশে ভেক্টর বিভাজন
Resolution of a vector in two components

ধরা যাক, ভেক্টর $\vec{R}$-এর মান ও দিক $\vec{OA}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। OM এবং ON সরলরেখা দুটি OA-এর সাথে যথাক্রমে α ও β কোণে আনত [চিত্র ২·২৮]। OM এবং ON বরাবর $\vec{R}$ ভেক্টরের উপাংশ দুটি নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র ২·২৮

A বিন্দু থেকে OM রেখার সমান্তরাল করে AC রেখা এবং ON রেখার সমান্তরাল করে AB রেখা টেনে OBAC সামান্তরিকটি সম্পন্ন করা হলো।

এখন ভেক্টর সামান্তরিক সূত্রানুসারে,

$$\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA}$$

অর্থাৎ $\vec{OA}$ ভেক্টরের দুটি উপাংশ হলো $\vec{OB}$ এবং $\vec{OC}$। উপাংশ দুটির মান যথাক্রমে x এবং y হলে, $OB = x$ এবং $OC = BA = y$।

OAB ত্রিভুজে ত্রিকোণমিতিক সূত্র ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$\frac{OB}{\sin OAB} = \frac{BA}{\sin AOB} = \frac{OA}{\sin ABO}$$

বা, $$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin[\pi - (\alpha+\beta)]}$$

বা, $$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.17)$$

এখানে, $\vec{R}$-কে α ও β কোণে আনত দুটি উপাংশে $\vec{x}$ ও $\vec{y}$-তে বিভাজিত করা হয়েছে।

বিশেষ ক্ষেত্র : যখন $\vec{x}$ এবং $\vec{y}$ উপাংশ দুটি পরস্পরের ওপর লম্ব হয়, তখন $\alpha + \beta = 90°$ হয়। সুতরাং,

$$x = \frac{R\sin(90° - \alpha)}{\sin 90°} = R\cos\alpha \text{ এবং } y = \frac{R\sin\alpha}{\sin 90°} = R\sin\alpha$$

২·৭·২ লম্ব উপাংশে ভেক্টরের বিভাজন
Resolution of a vector in rectangular components

একটি ভেক্টরকে যেকোনো দুই দিকে বিভাজন করা যায়। বিভাজিত অংশগুলো যদি পরস্পর লম্ব হয়, তাহলে তাদেরকে লম্ব উপাংশ বলে।

চিত্র ২·২৯–এ $\vec{R}$ ভেক্টরটিকে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুটি অক্ষ OX এবং OY বরাবর বিভাজিত করা হয়েছে। সুতরাং, $\vec{OB}$ এবং $\vec{OC}$ উপাংশ দুটিকে **লম্ব উপাংশ** বলা হয়।

ধরা যাক, $\vec{OB} = \vec{x}$, $\vec{OC} = \vec{y}$ এবং $\angle AOB = \alpha$

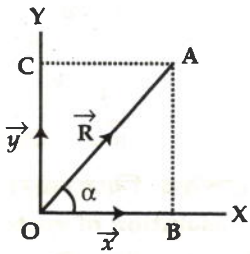
চিত্রানুসারে, OAB ত্রিভুজে

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{x}{R}$$

বা, $x = R\cos\alpha \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{y}{R}$$

বা, $y = R\sin\alpha \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)



চিত্র ২·২৯

সমীকরণ (i) ও (ii) হলো $\vec{R}$ কে দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজন করলে বিভাজিত অংশকের মান।

বিশেষ ক্ষেত্র : একটি ভেক্টর $\vec{R}$-এর দিক বরাবর উপাংশ নির্ণয় করতে হলে সমীকরণ (i)-এ $\alpha = 0$ [অথবা সমীকরণ (ii) $\alpha = 90°$] বসাতে হবে। ফলে $x = R\cos 0 = R$

আবার, সমীকরণ (ii)-এ $x = 0$ (অথবা সমীকরণ (i)-এ $\alpha = 90°$) বসিয়ে অন্য উপাংশ অর্থাৎ $\vec{R}$-এর লম্ব দিকের উপাংশটি পাওয়া যায়। তা হলো, $y = R\sin 0 = 0$

সুতরাং, এ থেকে বোঝা যায়,
(i) কোনো ভেক্টরের নিজ অভিমুখে থাকা উপাংশটির মান ভেক্টরটির সমান এবং
(ii) কোনো ভেক্টরের লম্বদিকে তার কোনো উপাংশ নেই।

২·৭·৩ ভেক্টরের দিক সূচক কোসাইন
Direction cosines of a vector

সংজ্ঞা : কোনো ভেক্টর যদি ধনাত্মক X-অক্ষ, ধনাত্মক Y-অক্ষ ও ধনাত্মক Z-অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে, তবে $\cos\alpha, \cos\beta$ ও $\cos\gamma$-কে ওই ভেক্টরের দিক সূচক কোসাইন বলা হয়।

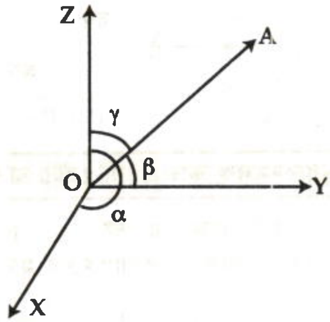
এগুলোকে যথাক্রমে, l, m ও n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, একটি ভেক্টর $\vec{A}$, OX, OY ও OZ অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে [চিত্র ২·৩০]। সুতরাং, ভেক্টরের সূচক কোসাইনগুলো হবে,

$$l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta,\ n = \cos\gamma$$

যদি OX, OY ও OZ-অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরটির স্কেলার উপাংশগুলো যথাক্রমে A_x, A_y ও A_z হয় অর্থাৎ যদি $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ হয়, তবে—

$$l = \cos\alpha = \frac{A_x}{A},\ m = \cos\beta = \frac{A_y}{A} \text{ এবং } n = \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$



চিত্র ২·৩০

এখন, $l^2 + m^2 + n^2 = \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2} = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1$

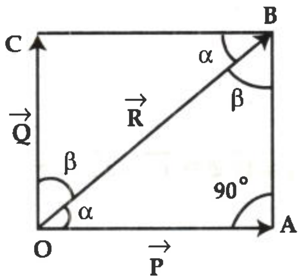
[$\because$ $\vec{A}$ ভেক্টরটির পরম মান $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$]

সুতরাং, কোনো ভেক্টরের দিক সূচক কোসাইনগুলির বর্গের সমষ্টি 1 হয়।

২·৮ লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন
Vector addition and subtraction in terms of normal components

একটি ভেক্টর রাশিকে সামান্তরিক সূত্রের দ্বারা বহুভাবে দুটি ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করা যায়। **একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াই হলো ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ।** একটি ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ কে লম্ব উপাংশে বিভাজন করা যায় এবং এর সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন করা যায়। এই বিভাজিত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি অংশক বা উপাংশ (Component) বলে।

মনে করি, OB রেখা $\vec{R}$-এর মান নির্দেশ করে। যদি $\vec{R}$ সমকোণে বিভাজিত করা হয় অর্থাৎ, P এবং Q উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণী হয় [চিত্র ২·৩১], তবে $(\alpha + \beta) = 90°$। এক্ষেত্রে OB-এর সাথে উপাংশ দুটি যথাক্রমে উৎপন্ন কোণ α, β। এখন OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হলো।



চিত্র ২·৩১

$\therefore$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin 90° = 1$ এবং

$\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

ত্রিকোণমিতির ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী OAB ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin 90°}$$

$$\therefore \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 90°}$$

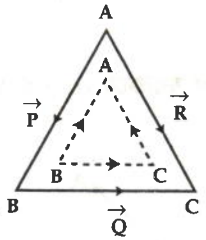
$$\therefore \quad P = R\cos\alpha \text{ এবং } Q = R\sin\alpha \quad \dots \quad \dots \quad (2.18)$$

P এবং Q উপাংশ দুটিকে মূল ভেক্টর রাশি R-এর লম্বাংশ বলে। P-কে অনুভূমিক উপাংশ (Horizontal component) এবং Q-কে উল্লম্ব উপাংশ (Vertical component) বলা হয়।

উপাংশ দুটির ভেক্টর রূপ হলো—

$$\vec{P} = R\cos\alpha\,\hat{i} \text{ এবং } \vec{Q} = R\sin\alpha\,\hat{j}$$

অতএব, এদের ভেক্টর যোজন $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = R\cos\alpha\hat{i} + R\sin\alpha\hat{j}$ ... ... (2.19)



চিত্র ২.৩২

ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সাহায্যে যোজন ও বিয়োজন ব্যাখ্যা করা যায়। মনে করি একটি ত্রিভুজের AB বাহু বরাবর $\vec{P}$ এবং BC বাহু বরাবর $\vec{Q}$ ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.৩২ টানা রেখাচিত্র]। তা হলে এদের ভেক্টর যোজন $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ কে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু AC দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

আবার $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি BA এবং BC বরাবর ক্রিয়াশীল হলে ভেক্টর রাশির বিয়োজন $\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q}$ কে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু CA দ্বারা প্রকাশ করা যায় [চিত্র ২.৩২ ড্যাশ রেখাচিত্র]।

অনুধাবনমূলক কাজ : দুটি ভেক্টর রাশির যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান—ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০১৯]

দুটি সমজাতীয় ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{A}$ ও $-\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\pi - \theta$ হবে। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান হলে, অর্থাৎ

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$$

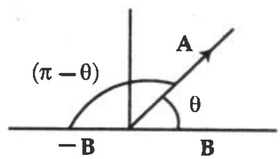
বা, $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \theta)}$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \theta)$

বা, $\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

বা, $\theta = \pi - \theta$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{2}$



অর্থাৎ দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{2}$ হলে ভেক্টর দুটির যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৫

১। যদি $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ এবং $A + B = C$ হয় তা হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ.

অতএব, $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} = |\vec{C}| = C$

$\therefore\ C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

বা, $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$ $[\because A + B = C]$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

বা, $2AB(\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore\ \cos\theta = 1, \quad \therefore \theta = 0°$

সুতরাং, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $= 0°$

২। প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত তিনটি ভেক্টর $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ একটি ত্রিভুজ গঠন করতে পারে।

এখন, $\vec{B} + \vec{C}$ ভেক্টর দুটির সমষ্টি,

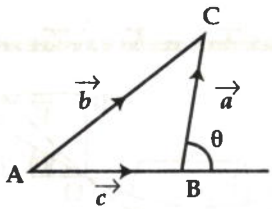
$$\vec{B} + \vec{C} = (-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) + (4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k})$$
$$= 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

$\therefore\ \vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$, অর্থাৎ দুটি ভেক্টরের যোগফল তৃতীয় ভেক্টরের সমান।

অতএব, ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী প্রদত্ত ভেক্টরগুলো একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

৩। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে নিচের সম্পর্কগুলো ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর :

(i) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$; (ii) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$



(i) চিত্র থেকে পাই,

$$\vec{b} = \vec{c} + \vec{a}$$

$$\therefore \quad \vec{b}.\vec{b} = (\vec{c} + \vec{a}).(\vec{c} + \vec{a})$$

$$= \vec{c}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{a} + 2\vec{a}.\vec{c} = c^2 + a^2 + 2ac\cos\theta$$

$\therefore \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B \; [B = 180° - \theta]$ (প্রমাণিত)

(ii) $\vec{b} = \vec{c} + \vec{a}$

$$\therefore \quad \vec{b} \times \vec{a} = (\vec{c} + \vec{a}) \times \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$\therefore \quad ba \sin C = ca \sin B$

বা, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ ... ... (i)

আবার, $\vec{b} \times \vec{c} = (\vec{c} + \vec{a}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c}$

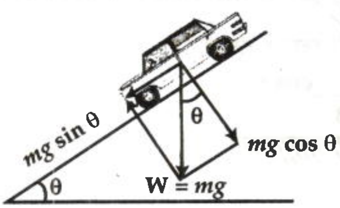
বা, $bc \sin A = ac \sin B$

বা, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ (প্রমাণিত)

কাজ : ২·৩৩ চিত্রটি লক্ষ কর। গাড়িটি ইঞ্জিন বন্ধ করে নিচে নামছে। কেবলমাত্র গাড়িটির ওজন নিচের দিকে ক্রিয়াশীল। ঘর্ষণ উপেক্ষা করে নত তল বরাবর এবং নত তলের লম্ব দিকে দুটি উপাংশ ব্যাখ্যা কর।

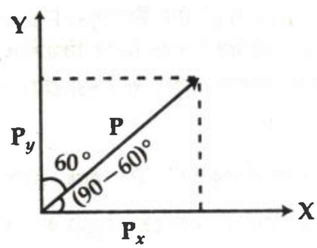


চিত্র ২·৩৩

বস্তুর ওজন mg নিচের দিকে উল্লম্বভাবে ক্রিয়া করে। mg কে নত তল বরাবর এবং নত তলের লম্ব দিকে দুটি উপাংশে বিভাজন করা যায়। নত তলটি অনুভূমিক তলের সাথে θ কোণে আনত হওয়ায় উপাংশ দুটির মান যথাক্রমে $mg \sin\theta$ এবং $mg \cos\theta$ চিত্র অনুযায়ী ক্রিয়াশীল হয়। $mg \cos\theta$ নত তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া দ্বারা প্রশমিত হয়। কেবল $mg \sin\theta$ বলের প্রভাবে গাড়িটি নিচের দিকে নামতে থাকে।

উদাহরণ : 30 N একটি বল Y-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণে আনত। বলটির X ও Y অক্ষ বরাবর লম্ব উপাংশ দুটি নির্ণয় কর এবং উহাদের যোগফল ও বিয়োগফল নির্ণয় কর।

মনে করি, P= 30 N বলের X এবং Y-অক্ষ বরাবর উপাংশ যথাক্রমে P_x এবং P_y। ভেক্টরের সমকৌণিক বিশ্লেষণের নীতি অনুযায়ী



$$P_x = P\sin 60° = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{N} = 15\sqrt{3}\,\text{N}$$

$$P_y = P\cos 60° = 30 \times \frac{1}{2} \text{N} = 15\,\text{N}$$

এদের যোগফল $= P_x + P_y = (15\sqrt{3} + 15)$ N

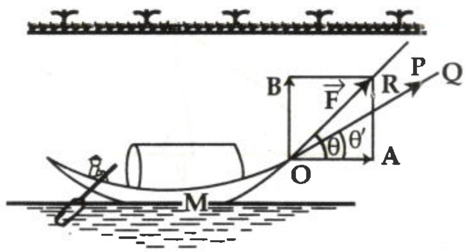
$= 15(\sqrt{3}+1)$ N

এবং বিয়োগফল $= P_x - P_y = (15\sqrt{3} - 15)$ N

$= 15(\sqrt{3}-1)$ N

ভেক্টর উপাংশের মাধ্যমে ব্যাখ্যা

১। নৌকার গুণ টানা : মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়; যথা— অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ।



চিত্র ২.৩৪

অনুভূমিক উপাংশ = $F \cos \theta$, এর দিক OA বরাবর।

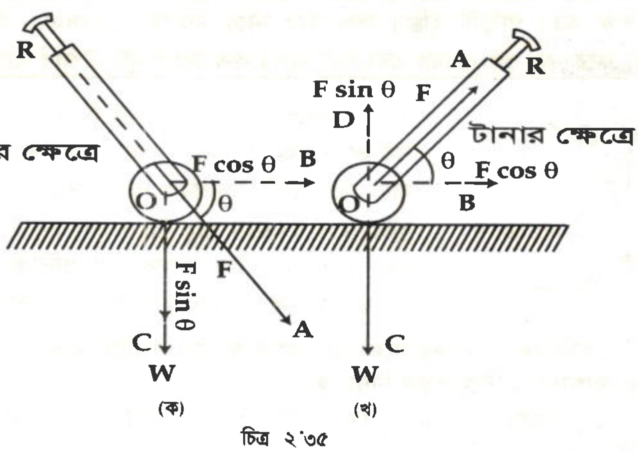
উল্লম্ব উপাংশ = $F \sin \theta$, এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ $F \cos \theta$ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ $F \sin \theta$ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ $F \sin \theta$ প্রতিহত করা হয়। **গুণ যত লম্বা হবে, θ-এর মান তত কম হবে; ফলে $F \sin \theta$-এর মান কম হবে এবং $F \cos \theta$-এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।** অর্থাৎ **গুণের রশি বেশি লম্বা হলে নৌকা বেশি দ্রুত চলবে।** আবার O বিন্দুতে রশি বেঁধে স্রোতের বিপরীতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে নৌকাটিকে $\vec{F}$ বলে সামনের দিকে টানলে এবং রশির দৈর্ঘ্য OP হলে—(i) নৌকা অপেক্ষাকৃত দ্রুত চলবে; (ii) $F \sin \theta$-এর মান কম হলে নৌকা সামনের দিকে বেশি গতিশীল হবে; (iii) OP রশি দ্বারা টানলে নৌকার গতি OQ রশি দ্বারা টানার চেয়ে কম হবে। কারণ OQ রশি লম্বা এবং $\theta' > \theta$।

২। লন-রোলার চালনা : তলের ওপর দিয়ে কোনো বস্তুকে ঠেলা বা টানা হলে তল ও বস্তুর মধ্যে ঘর্ষণ বল ক্রিয়াশীল হয় এবং বস্তুর গতিকে বাধা দেয়। বস্তুর ওজন বেশি হলে ঘর্ষণ বলও বেশি হয়। রোলারকে ঠেলে বা টেনে গতিশীল করা হয়।

ঠেলার ক্ষেত্রে : ধরা যাক, রোলারের ওজন = $\vec{W}$ এবং রোলারের হাতলের ওপর প্রযুক্ত বল = $\vec{F}$

F বল রোলারের O বিন্দুতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.৩৫ (ক)]। O বিন্দুতে এই বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত হয়ে যায়।



চিত্র ২.৩৫

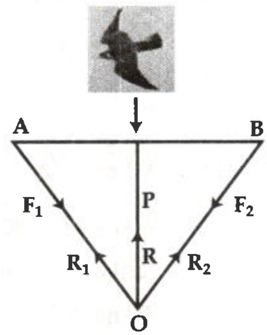
বলের অনুভূমিক উপাংশ = $F \cos \theta$, এর দিক OB বরাবর সামনের দিকে এবং উল্লম্ব উপাংশ = $F \sin \theta$, এর দিক OC বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়াশীল যা রোলারের ওজন বৃদ্ধি করে। সুতরাং রোলারের মোট ওজন হয় $(W + R \sin \theta)$। ফলে রোলার প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী হয়ে যায় বলে ঘর্ষণ বলের মানও বেড়ে যায়। তাই রোলার ঠেলা কষ্টকর হয়।

টানার ক্ষেত্রে : ধরা যাক, রোলারের ওজন = $\vec{W}$ এবং রোলারের হাতলের ওপর প্রযুক্ত বল = $\vec{F}$

F বল O বিন্দুতে অনুভূমিক রেখা OB-এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.৩৫ (খ)]। F বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত হয়ে যায়।

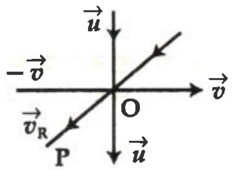
অনুভূমিক উপাংশ = $F\cos\theta$; এর ক্রিয়ায় রোলারটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে এবং উল্লম্ব উপাংশ = $F\sin\theta$; এর ক্রিয়া OD বরাবর উপরের দিকে হওয়ায় রোলারের মোট ওজন W-কে প্রশমিত করে। ফলে রোলারের ওজন হয় $(W - F\sin\theta)$। ফলে টানার ক্ষেত্রে রোলার হাল্কা অনুভূত হয় এবং ঘর্ষণ বলও হ্রাস পায়। ফলে রোলার টানা সহজতর হয়। তাই বলা যায়, **লন-রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজতর।**

৩। পাখির আকাশে উড়া : পাখি ওড়ার সময় ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্র মেনে চলে। যদি A ও B বিন্দু দুটি পাখির ডানার প্রান্ত নির্দেশ করে, তবে ডানা দুটি দিয়ে পাখিটি যথাক্রমে F_1 ও F_2 বল প্রয়োগ করে। বল দুটির বিপরীত প্রতিক্রিয়া বল R_1 ও R_2-এর লব্ধি R-এর অভিমুখে ক্রিয়া করে যা পাখিটিকে আকাশে উড়তে সাহায্য করে। ডানা দিয়ে পাখিটি F_1 ও F_2 বল প্রয়োগ করে এবং বল দুটির ক্রিয়ারেখা (line of action) O বিন্দুতে মিলিত হয়। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে বায়ু সমান বিপরীত প্রতিক্রিয়া বল R_1 ও R_2-এর লব্ধি R পাখিটিকে বায়ুতে ভেসে থাকতে সাহায্য করে।



চিত্র ২.৩৬

৪। বৃষ্টির ফোঁটা গাড়ির সামনের কাঁচকে ভেজায় :



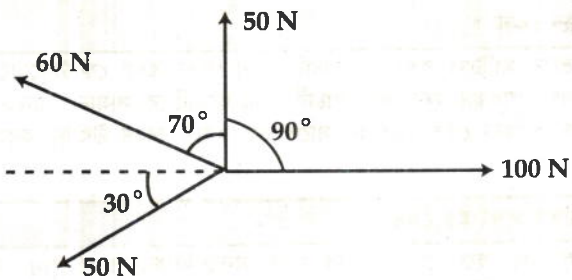
চিত্র ২.৩৭

মনে করি গাড়ির বেগ $\vec{v}$ এবং বৃষ্টির বেগ $\vec{u}$

∴ লব্ধি বেগ $\vec{v}_R = \vec{u} + (-\vec{v})$, OP বরাবর ক্রিয়াশীল হয় অর্থাৎ গাড়ির গতির দিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ২.৩৭]। এক্ষেত্রে গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের দিক সামনের দিকে তির্যকভাবে ক্রিয়াশীল। কাজেই বৃষ্টির ফোঁটা চলন্ত গাড়ির পিছনের কাচকে না ভিজিয়ে সামনের কাচকে ভিজায়।

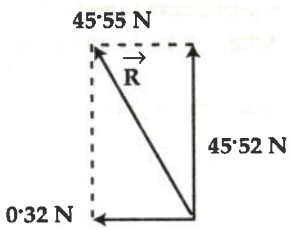
গাণিতিক উদাহরণ ২.৬

১। নিচের চিত্রের 50 N এবং 100 N-এর দিকে বলের লব্ধি নির্ণয় কর।



50 N বলের লম্ব দিকে মোট বল $= 50\sin 90° + 60\sin(90° + 70°) + 50\sin(180° + 30°) = 45{\cdot}52$ N

100 N বলের অনুভূমিক দিকে মোট বল $= 100\cos 0° + 60\cos(90° + 70°) + 50\cos(180° + 30°) = 0{\cdot}32$N



এদের লব্ধি ($\vec{R}$) চিত্রে দেখানো হলো

$$R^2 = \{(45{\cdot}52)^2 + (1{\cdot}69)^2\}\ N = 2072{\cdot}17\ N$$

$$\therefore\quad R = 45{\cdot}55\ N$$

২। ঘণ্টায় 40 km বেগে পূর্বদিকে চলমান একটি গাড়ির চালক ঘণ্টায় $40\sqrt{3}$ km বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল। (ক) ট্রাকটির প্রকৃত বেগ কত এবং (খ) ট্রাকটি কোন দিকে চলছে ?

[রা. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০২; RU-C Admission Test, 2021-22]

(ক) মনে করি ট্রাকটি উত্তর দিকের সাথে θ কোণে পূর্বদিকে চলছে।

ত্রিভুজ সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$$\vec{V}_T = \vec{V}_{TC} + \vec{V}_C$$

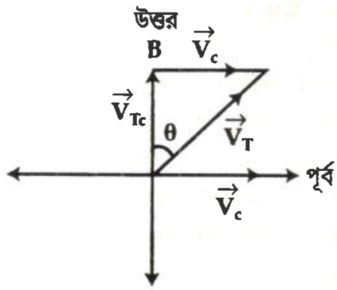
$$\therefore \quad V_T^2 = V_{TC}^2 + V_C^2$$

বা, $V_T = \sqrt{V_{TC}^2 + V_C^2}$

$= \sqrt{(40\sqrt{3})^2 + (40)^2}$

$= \sqrt{40^2(4)} = 2 \times 40$

$= 80\ \text{kmh}^{-1}$



এখানে,

গাড়ির প্রকৃত বেগ,

$V_C = 40\ \text{kmh}^{-1}$

গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের বেগ,

$V_{TC} = 40\sqrt{3}\ \text{kmh}^{-1}$

ট্রাকের প্রকৃত বেগ,

$V_T = ?$

(খ) আবার, $\tan\theta = \dfrac{V_C}{V_{TC}} = \dfrac{40}{40\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\therefore \quad \theta = 30°$

উত্তর : (ক) 80 kmh^{-1}, (খ) 30° কোণে পূর্বদিকে

৩। একটি লন রোলার টানা ও ঠেলার জন্য অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 20N বল প্রয়োগ করা হলো। টানার সময় ওজন ঠেলা অপেক্ষা কতটুকু কম হবে? [JU Admission Test, 2015-16]

রোলার টানার ক্ষেত্রে ওজন $= W - F\sin\theta = W - F\sin 30°$

ঠেলার ক্ষেত্রে ওজন $= W + F\sin 30°$

সুতরাং পার্থক্য $= W + F\sin 30° - (W - F\sin 30°) = W + F\sin 30° - W + F\sin 30°$

$= 2F\sin 30° = 2 \times 20 \times 0{\cdot}5 = 20$ N

কাজ I : পাখি উড়ার সময় পাখার সাহায্যে দুই পাশের বাতাসকে আঘাত করে কিন্তু পাখি সামনের দিকে উড়ে কী করে?

পাখি উড়ার সময় পাখার সাহায্যে বাতাসকে আঘাত করে। ফলে দুটি পাখার লব্ধি বলের বিপরীত দিকে বাতাস একটি প্রতিক্রিয়া বলের সৃষ্টি করে। এজন্য পাখি সামনের দিকে উড়ে যায়।

কাজ II : বৃষ্টির ফোঁটা ভূপৃষ্ঠের ওপর লম্বভাবে পড়লেও একজন পথচারী তার ছাতাটিকে বৃষ্টির ফোঁটার অভিমুখের সাথে সামান্য কোণে আনত রাখেন কেন ?

বৃষ্টির ফোঁটা লম্বভাবে মাটিতে পড়লেও পথচারী তাঁর গতির জন্য ফোঁটাগুলোকে সামান্য আনত কোণে পড়তে দেখেন। তাই বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য ওই পথচারী তাঁর ছাতাটিকে সামান্য আনত কোণে মেলে ধরেন। পথচারীর বেগ বেড়ে গেলে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ উল্লম্বের সাথে তত বেশি কোণ উৎপন্ন করবে। ফলে ছাতাকে বেশি কোণে হেলাতে হবে।

কাজ III : ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা হয় কেন ?

ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা হলে সেটি টানার সময় অনুভূমিকের সাথে ক্ষুদ্র কোণ উৎপন্ন করে, ফলে টানের অনুভূমিক উপাংশ বেশি হবে এবং ট্রলি ব্যাগকে সরানো সহজ হবে।

২.৯ ত্রিমাত্রিক আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ভেক্টরের বিভাজন
Resolution of vector in three dimensional rectangular co-ordinate system

একটি ভেক্টর রাশিকে একক ভেক্টর রাশির সাহায্যে প্রকাশ করতে গিয়ে আমরা কেবল ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন বিবেচনা করব।

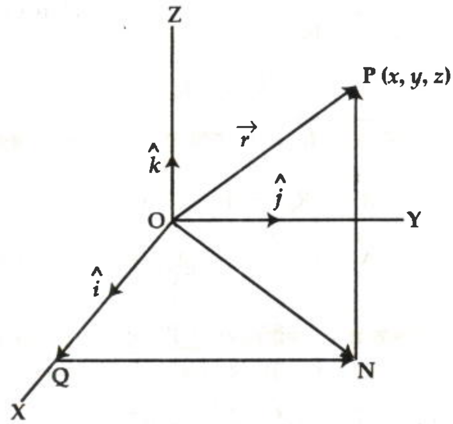
ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো অবস্থান ভেক্টরকে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায় যা ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন হিসেবে বিবেচিত হয়।

$$\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$$

এখানে P-এর অবস্থানাঙ্ক (x, y, z)

ধরা যাক, পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX, OY ও OZ সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে X, Y ও Z-অক্ষ নির্দেশ করছে [চিত্র ২.৩৮]। OP রেখাটি এই অক্ষ ব্যবস্থায় r মানের একটি ভেক্টর রাশি $\vec{r}$ নির্দেশ করছে। **এই $\vec{r}$ কে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।**

আরও মনে করি $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং ধনাত্মক X, Y ও Z-অক্ষে একক ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$। PN রেখাটি হলো XY সমতলের ওপর এবং NQ রেখাটি হলো OX-এর উপর লম্ব।



চিত্র ২.৩৮

চিত্র হতে ভেক্টর যোগের নিয়ম অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$$

এবং $$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP}$$

কিন্তু $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$, $\overrightarrow{QN} = y\hat{j}$,

$\overrightarrow{NP} = z\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

$$\therefore \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.20)$$

এখানে x, y ও z হলো যথাক্রমে X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর $\vec{r}$ ভেক্টরের উপাংশের মান এবং $\vec{r}$ হলো ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় অবস্থান ভেক্টর। সমীকরণ (2.20) হলো নির্ণেয় অবস্থান ভেক্টর। সুতরাং, যে ভেক্টরের আদি বিন্দু (0, 0, 0) এবং অন্তিম বিন্দু (x, y, z) সেই ভেক্টরটি সমীকরণ (2.20) দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর বা অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এর মান :

চিত্র ২.৩৬-এ ΔOQN হলো একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle QON$ কোণটি হলো সমকোণ। সুতরাং,

$$ON^2 = OQ^2 + ON^2 = x^2 + y^2$$

আবার, ΔONP হলো সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ONP$ কোণটি হলো সমকোণ। সুতরাং,

$$OP^2 = ON^2 + NP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

বা, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, নির্ণেয় অবস্থান ভেক্টরের মান $\qquad \ldots \quad \ldots \quad (2.21)$

$\vec{r}$ বরাবর বা $\vec{r}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর রাশি :

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.22)$$

কাজ : তিনটি একক ভেক্টর যোগ করলে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায় কী ? ব্যাখ্যা কর।

তিনটি একক ভেক্টরের মধ্যে যদি দুটি সমান ও বিপরীতমুখী হয় তবে ওই দুটি ভেক্টরের যোগফল শূন্য হবে। তৃতীয় একক ভেক্টরটি ওই দুটির সঙ্গে যোগ করলে যোগফল হিসেবে তৃতীয় ভেক্টরটি পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $\hat{i}$, $(-\hat{i})$ ও $\hat{j}$ এই তিনটি একক ভেক্টরের যোগফল হলো, $\hat{i} + (-\hat{i}) + \hat{j} = \hat{j}$ = একক ভেক্টর।

লম্ব উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ

Vector addition and subtraction of resolved normal components

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি লম্ব উপাংশে বিভাজিত থাকে, তবে তাদের যোগফল বা বিয়োগফলকে লম্ব উপাংশের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়।

ক. যোগফল নির্ণয়

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর রাশি যাদেরকে লম্ব উপাংশের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

এবং $$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

এখানে A_x, A_y, A_z এবং B_x, B_y, B_z, X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির উপাংশের মান নির্দেশ করে।

এখন $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যোগ করে পাই,

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.23)$$

এখন $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$ হলে এবং X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর R-এর উপাংশের মান যথাক্রমে R_x, R_y ও R_z হলে,

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.24)$$

লব্ধির মান : সমীকরণ (2.23) ও (2.24) থেকে পাই,

$$R_x = A_x + B_x, \; R_y = A_y + B_y, \; R_z = A_z + B_z$$

$$\therefore \quad |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}$$

$\vec{R}$ বরাবর $\vec{R}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{r}$ হলে,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$

$$= \frac{(A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}}{\sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}}$$

খ. বিয়োগফল নির্ণয়

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল নিম্নোক্তভাবে নির্ণয় করা যায় :

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) - (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.25)$$

এখন বিয়োগফল $\vec{R}$ হলে,

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

এখানে R_x, R_y ও R_z হলো X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর R-এর উপাংশের মান

$$\therefore \quad \vec{A} - \vec{B} = \vec{R} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.26)$$

লব্ধির মান : সমীকরণ (2.25) ও (2.26) থেকে পাই,

$$R_x = A_x - B_x, \; R_y = A_y - B_y, \; R_z = A_z - B_z$$

$$\therefore \quad |\vec{R}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}$$

$$= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$\vec{R}$ বরাবর $\vec{R}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{r}$ হলে,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}} = \frac{(A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}}{\sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}}$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৭

১। $(2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})$ এবং $(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$ ভেক্টরদ্বয়ের সাথে কী ভেক্টর যোগ করলে লব্ধি হিসেবে $\hat{j}$ পাওয়া যাবে ?

ধরা যাক, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের সাথে $\vec{A}$ ভেক্টর যোগ করতে হবে।

প্রশ্নানুসারে,

$$\vec{A}+(2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})+(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})=\hat{j}$$

বা, $\vec{A}+3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}=\hat{j}$

বা, $\vec{A}=-3\hat{i}+2\hat{k}$

২। একটি কণার অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r}=(t^2-1)\hat{i}+2t\hat{j}$। দেখাও যে, XY তলে কণাটির সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত। [ম. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন)]

এখানে, $\vec{r}=(t^2-1)\hat{i}+2t\hat{j}$ ... ... (i)

আমরা জানি, XY তলে কণার অবস্থান ভেক্টর,

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$x=t^2-1$ এবং $y=2t$ বা, $t=\frac{y}{2}$

বা, $x=\left(\frac{y}{2}\right)^2-1=\frac{y^2}{4}-1$

বা, $y^2=4(x+1)$ ... ... (iii)

সমীকরণ (iii) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

অর্থাৎ, কণাটির সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

৩। A, B এবং C এই তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরগুলো হলো যথাক্রমে $60\hat{i}+3\hat{j}$, $40\hat{i}-8\hat{j}$ এবং $a\hat{i}-52\hat{j}$। প্রমাণ কর, যদি $a=-40$ হয় তবে A, B এবং C বিন্দুগুলো একরেখীয় হবে।

ধরা যাক, $\vec{x}_1=60\hat{i}+3\hat{j}$, $\vec{y}_2=40\hat{i}-8\hat{j}$ এবং $\vec{r}_3=a\hat{i}-52\hat{j}$

সুতরাং, $\overrightarrow{AB}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=40\hat{i}-8\hat{j}-60\hat{i}-3\hat{j}=-20\hat{i}-11\hat{j}$

আবার, $\overrightarrow{BC}=\vec{r}_3-\vec{r}_2=a\hat{i}-52\hat{j}-40\hat{i}+8\hat{j}=(a-40)\hat{i}-44\hat{j}$

যেহেতু, A, B এবং C বিন্দুগুলো হলো একরেখীয়, তাই লেখা যায় $\overrightarrow{BC}=n\overrightarrow{AB}$। এখানে n হলো একটি স্কেলার রাশি যার মান $n\neq 0$

$\therefore\ (a-40)\hat{i}-44\hat{j}=n(-20\hat{i}-11\hat{j})$

$\therefore\ a-40=-20n$ ... ... (i)

এবং $-44=-11$ $\therefore\ n=4$

সমীকরণ (i)-এ $n=4$ বসিয়ে পাই, $a=-40$ (প্রমাণিত)

২.১০ দুটি দিক রাশি বা ভেক্টর রাশির গুণফল
Multiplications of two vector quantities

দুটি দিক রাশি বা ভেক্টর রাশির গুণফল সাধারণত দুই প্রকার, যথা—

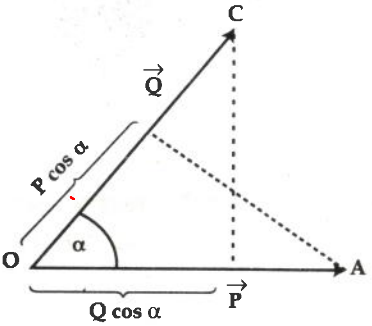
(১) স্কেলার গুণন বা ডট গুণন (Scalar product or Dot product)

(২) ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন (Vector product or Cross product)

এই দুটি গুণন বা গুণফল নিম্নে পৃথক পৃথকভাবে আলোচনা করা হলো।

২.১০.১ স্কেলার গুণন বা ডট গুণন
Scalar product or Dot product

দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে গুণফল একটি স্কেলার রাশি হলে এই গুণনকে স্কেলার গুণন বলে। এই গুণনে গুণফলের মান ভেক্টর দুটির মানের গুণফল এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (cosine) গুণফলের সমান হয়। দুটি ভেক্টরকে স্কেলার গুণন করতে হলে উহাদের মাঝে একটি ডট (·) চিহ্ন দিতে হয়। এই জন্য এ গুণনের অপর নাম ডট গুণন।



চিত্র ২.৩৯

ব্যাখ্যা : মনে করি OA এবং OC রেখা বরাবর $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.৩৯]। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে আনত। তাদের স্কেলার বা ডট গুণফল $= \vec{P}\,.\,\vec{Q}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং পড়তে হয় $\vec{P}$ ডট $\vec{Q}$। কাজেই সংজ্ঞা অনুসারে পাই,

$$\vec{P}.\vec{Q} = |\vec{P}|\,|\vec{Q}|\cos\alpha, \quad \pi \geq \alpha \geq 0$$

বা, $$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = QP\cos\alpha \qquad \ldots \qquad (2.27)$$

এখানে $0 \leq \alpha \leq \pi$

$Q\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{P}$-এর দিকে $\vec{Q}$-এর উপাংশ বা $\vec{P}$-এর ওপর $\vec{Q}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{Q}$-এর দিকে $\vec{P}$-এর উপাংশ [চিত্র ২.৩৭]।

আবার, (2.27) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = Q\,(P\cos\alpha) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad [2.27(a)]$$

এখানে $P\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{Q}$-এর দিকে $\vec{P}$-এর উপাংশ বা $\vec{Q}$-এর ওপর $\vec{P}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং যেকোনো দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বলতে যেকোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের দিকে অপর ভেক্টরের উপাংশের বা সেই ভেক্টরের ওপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফলকে বুঝায়।

বিশেষ ক্ষেত্র :

(ক) যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 0° = PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

(খ) যদি $\alpha = 90°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 90° = 0$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

(গ) যদি $\alpha = 180°$ হয়, তবে $\vec{P}\,.\,\vec{Q} = PQ\cos 180° = -PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী হবে।

[উল্লেখ্য : $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = P \times Q\cos\alpha = Q \times P\cos\alpha$; এখানে, $Q\cos\alpha = \vec{P}$ বরাবর Q-এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha = \vec{Q}$ বরাবর $\vec{P}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ।]

স্কেলার গুণনের উদাহরণ : বল $\vec{F}$ এবং সরণ $\vec{s}$ উভয়েই ভেক্টর রাশি। কিন্তু এদের স্কেলার গুণফল কাজ (W) একটি স্কেলার রাশি, অর্থাৎ

$$W = \vec{F}.\vec{s} = Fs\cos\alpha \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.28)$$

স্থিতিশক্তি, বৈদ্যুতিক বিভব ইত্যাদিও ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফলের উদাহরণ।

স্কেলার গুণনের নিয়মানুসারে,

(i) $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}\,.\,\vec{P}$ (বিনিময় সূত্র)

(ii) $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

(iii) $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0$

অনুধাবনমূলক কাজ : $\hat{i}.\hat{i} = 1$ কিন্তু $\hat{i}.\hat{j} = 0$ হয় কেন ?

স্কেলার গুণফলের কয়েকটি ধর্ম (Some properties of scalar product)

(i) $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$, অর্থাৎ একই ভেক্টরকে দুবার নিয়ে স্কেলার গুণ করলে ভেক্টরটির মানের বর্গ পাওয়া যায়।

(ii) $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ অর্থাৎ স্কেলার গুণফল বিনিময় নিয়ম মেনে চলে। অর্থাৎ $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

(iii) স্কেলার গুণফল বণ্টন সূত্র মেনে চলে; অর্থাৎ $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

(iv) পরস্পর লম্ব দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়। অর্থাৎ $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

আবার যদি দুটি ভেক্টরের কোনোটির মানই শূন্য না হয় $(A \neq 0, B \neq 0)$, তবে $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ হলে $\vec{A} \perp \vec{B}$

(v) দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right)$

(vi) সমকৌণিক একক ভেক্টরসমূহের স্কেলার গুণফল $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{i} = \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$

(vii) উপাংশের মাধ্যমে দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৮

১। $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব। [য. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০১১; দি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ম. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০১]

আমরা জানি, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ হলে ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পরের ওপর লম্ব হবে।

প্রশ্নানুযায়ী, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = 0$ হতে হবে।

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = (9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k})\cdot(4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 9\times 4 + (1\times -6) + (-6\times 5) = 36 - 6 - 30 = 0$

যেহেতু $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$, কিন্তু $A \neq 0$ ও $B \neq 0$; $\therefore$ $\cos\theta = 0 = \cos 90°$

অতএব ভেক্টর দুটি পরস্পরের ওপর লম্ব।

২। ভেক্টর $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$-এর ওপর $\vec{Q} = 4\hat{j} + 5\hat{k}$-এর লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর।
[কু. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ম. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); BUET Admission Test, 2013-14 (মান ভিন্ন)]

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{P}$-এর ওপর $\vec{Q}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ $= Q\cos\theta$

আমরা জানি, $\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$\therefore Q\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{P} = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}|}$

এখানে, $\vec{P}\cdot\vec{Q} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})\cdot(4\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2\times 0 + (-3)\times(4) + (1)\times(5)$

$= -12 + 5 = -7$

এবং $|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\therefore Q\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{14}}$

৩। m-এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে?
[রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); Admission Test : DU (প্রযুক্তি) 2021-22; JU 2021-22; JU-A 2020-21; BSMRSTU 2019-20 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে,

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos 90° = 0$ হবে।

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})\cdot(m\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 0$

বা, $2m + 6 - 8 = 0$

বা, $2m - 2 = 0$

$\therefore m = 1$

৪। $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

[Admission Test : KUET 2013-14 (মান ভিন্ন); RU-C 2021-22]

আমরা জানি,

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{AB}$$

বা, $$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{118}\times\sqrt{77}} = 0$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$$

এখানে,

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = 9\times 4 + 1\times(-6) + (-6)\times 5 = 0$$

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{(9)^2 + (1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{118}$$

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2 + (5)^2} = \sqrt{77}$$

৫। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের কোনোটিই শূন্য মানের ভেক্টর নয়। সেক্ষেত্রে $\vec{A}.\vec{B}$-এর মান কী কখনো শূন্য হতে পারে?

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে আমরা পাই,

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

এখন, $\theta = 90^\circ$ হলে $\cos\theta = 0$ হয়, সেক্ষেত্রে $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হয়।

সুতরাং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর কোনোটিই শূন্য মানের না হলেও $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হতে পারে।

৬। কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দ্বারা সূচিত করা হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P}\times\vec{Q}|$

ABC ত্রিভুজে, $\vec{CB} = \vec{P}$

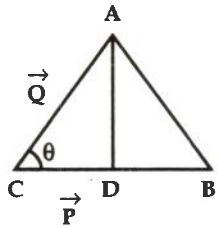
$\vec{CA} = \vec{Q}$

এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ [চিত্র দ্রষ্টব্য]।

ত্রিভুজটির উচ্চতা, $AD = AC\cos\theta = Q\sin\theta$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}(BC)(AD)$

$$= \frac{1}{2}PQ\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{P}\times\vec{Q}|$$



৭। একটি ভেক্টর $\vec{OA}$-এর আদি বিন্দু ও অন্তিম বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 0, 0) এবং (4, —5, 6)। ভেক্টরটিকে স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রকাশ কর। এর পরম মান নির্ণয় কর এবং ভেক্টরটির অভিমুখে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

যেহেতু $\vec{OA}$ ভেক্টরটির আদি ও অন্তিম বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে 0, 0, 0) এবং (4, —5, 6)। সুতরাং,

$$\vec{OA} = (4-0)\hat{i} + (-5-0)\hat{j} + (6-0)\hat{k} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$$

$\vec{OA}$ ভেক্টরটির পরম মান, $OA = |\vec{OA}| = \sqrt{(4)^2 + (-5)^2 + (6)^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = 8{\cdot}77$ একক

$\vec{OA}$ ভেক্টরটির অভিমুখে একক হবে, $\hat{\eta} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \frac{4\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}}{8{\cdot}77}$

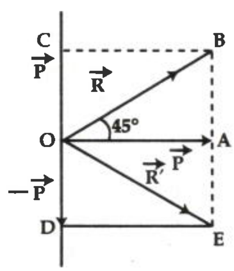
৮। দেখাও যে, পরস্পরের সাথে লম্বভাবে অবস্থিত দুটি সমান বলের যোগফল এবং বিয়োগফল সমান এবং এরা পরস্পরের সাথে লম্বভাবে অবস্থিত।

মনে করি, সমান বল দুটির প্রত্যেকটির মান P। এদেরকে OABC সামন্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু OA এবং OC দ্বারা দেখানো হয়েছে। সুতরাং কর্ণ OB ওদের লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ নির্দেশ করে এবং ওই লব্ধি ∠AOC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং, ∠AOB = 45°। আবার $\vec{OD} = -\vec{P}$ বলকে নির্দেশ করে।

$\vec{OA} = +\vec{P}$ এবং $\vec{OD} = -\vec{P}$ এই দুটি বলের লব্ধি $\vec{OE} = \vec{R'}$

সুতরাং, R′, ∠AOD কোণকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং, ∠AOE = 45°। অর্থাৎ, ∠BOE = ∠AOB + ∠AOE = 90°



এখন, $OB = \sqrt{2}P$ এবং $OE = \sqrt{2}P$

$\therefore \quad R = R'$

সুতরাং, দুটি সমান বল সমকোণে থাকলে ওদের যোগফল ও বিয়োগফল সমান এবং তারা পরস্পরের সাথে সমকোণে থাকে।

৯। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ হলে ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরালে বা লব্ধির দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); Admission Test : DU (প্রযুক্তি) 2020-21 (মান ভিন্ন); RU-C 2022-23]

আমরা জানি লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর,

$$\hat{\eta} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

এখানে,

লব্ধি $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} + \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$= 3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

এবং $|\vec{R}| = R = \sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{50} = 7{\cdot}07$

$$\therefore \quad \hat{\eta} = \frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{50}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{50}}\hat{j} - \frac{4}{\sqrt{50}}\hat{k}$$

২·১০·২ ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন
Vector product or Cross product

দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয়, তবে ওই গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। দুটি ভেক্টরকে ভেক্টর গুণন করতে হলে তাদের মাঝে একটি ক্রস (×) চিহ্ন দিতে হয় এজন্য এই গুণনের অপর নাম ক্রস গুণন। ভেক্টর গুণফলের দিক উভয় ভেক্টরের ওপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল। এই দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়া করে [চিত্র ২·৩৯]। অতএব এদের ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল—

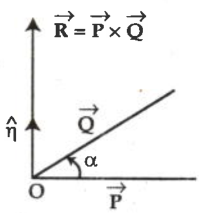
$$\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\,|\vec{P}|\,|\vec{Q}|\,\sin\alpha, \qquad 0 \le \alpha \le \pi \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.29(a)]$$

এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ২·৪০]

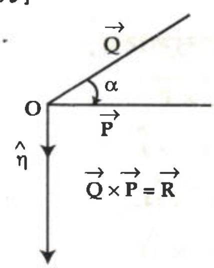
বা, $\vec{R} = \vec{Q} \times \vec{P}$

$$= \hat{\eta}\, QP\, \sin\alpha, \quad 0 \le \alpha \le \pi \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.29(b)]$$

এখানে একক ভেক্টর $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ২·৪১]



চিত্র ২·৪০



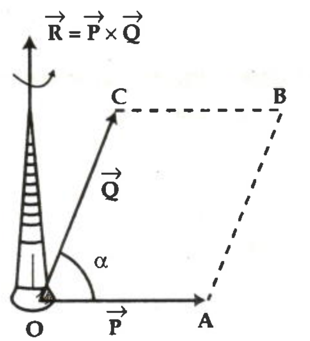
চিত্র ২·৪১

দুটি ভেক্টরের গুণফলের দিক ডান হাতি কর্ক স্ক্রু সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

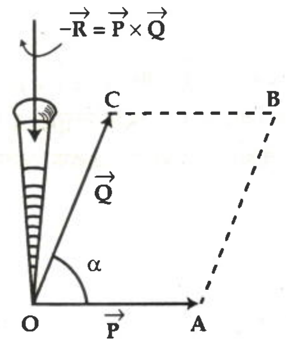
ডান হাতি স্ক্রু নিয়ম

ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের ওপর লম্বভাবে একটি ডান হাতি স্ক্রুকে রেখে প্রথম ভেক্টর হতে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় সেই দিকই হবে ভেক্টর গুণফলের দিক $\hat{\eta}$।

উপরোক্ত নিয়ম অনুসারে $\vec{P} \times \vec{Q}$-এর অভিমুখ হবে ওপরের দিকে [চিত্র ২·৪২] এবং $\vec{Q} \times \vec{P}$-এর অভিমুখ হবে নিচের দিকে [চিত্র ২·৪৩] অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে ডান হাতি স্ক্রুর দিক হবে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী (Anticlockwise)

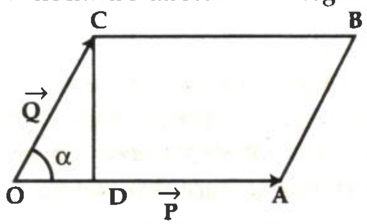


চিত্র ২·৪২



চিত্র ২·৪৩

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিকে (Clockwise)। Anti-clockwise direction-কে positive (ধনাত্মক) ধরা হয় এবং clockwise direction-কে Negative (ঋণাত্মক) ধরা হয়।



চিত্র ২·৪৪

ভেক্টর গুণনের উদাহরণ : মনে করি দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের সাথে α কোণ উৎপন্ন করেছে। OABC সামান্তরিকের $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OC} = \vec{Q}$ এখন C হতে OA-এর উপর CD লম্ব টানি [চিত্র ২·৪৪]।

$$\therefore \text{ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল } = OA \times CD = OA \times OC \sin\alpha$$

$$= PQ \sin\alpha = |\vec{P} \times \vec{Q}|$$

সিদ্ধান্ত : ওপরের ফলাফল থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় যে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মানের সমান।

বিশেষ ক্ষেত্র :

~~ক.~~ যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 0° = 0$ এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

~~খ.~~ যদি $\alpha = 90°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 90° = PQ$ এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

~~গ.~~ যদি $\alpha = 180°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 180° = 0$ এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী হবে।

ভেক্টর গুণনের নিয়মানুসারে,

~~(i)~~ $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

~~(ii)~~ $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

~~(iii)~~ $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -(\hat{j} \times \hat{i})$

~~(iv)~~ $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -(\hat{k} \times \hat{j})$

~~(v)~~ $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -(\hat{i} \times \hat{k})$

হিসাব : একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু বরাবর দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ক্রিয়াশীল হলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উ. 15·3 একক]

Hints : $\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় করে $|\vec{A} \times \vec{B}|$ এর মান বের করতে হবে। [KUET Admission Test, 2018-19 (মান ভিন্ন)]

RMDAC

ভেক্টর গুণফলের কয়েকটি ধর্ম (Some properties of vector product)

(i) $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, অর্থাৎ একই ভেক্টরকে দুবার নিলে তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।

(ii) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ অর্থাৎ ভেক্টর গুণফল বিনিময় নিয়ম মেনে চলে না। অর্থাৎ $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

(iii) ভেক্টর গুণন বণ্টন সূত্র মেনে চলে। অর্থাৎ $A \times (B \times C) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

(iv) ভেক্টর গুণন সংযোজন সূত্র মেন চলে না। অর্থাৎ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

(v) $\vec{A} \perp \vec{B}$ হলে $\vec{A} \times \vec{B}$-এর মান $= |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin 90° = AB$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B}$ এই তিনটি ভেক্টরই পরস্পরের ওপর লম্ব।

(vi) সমকৌণিক একক ভেক্টরসমূহের ভেক্টর গুণফল

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$, $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

(vii) স্থানাঙ্কের মাধ্যমে দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$$

(viii) $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ সমতলীয় হবার শর্ত হলো $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

কাজ : কোন ক্ষেত্রে স্কেলার ও ভেক্টর যোগফলের মান সমান হয় ?

স্কেলারের শুধু মান থাকে। তাই স্কেলার যোগফল বলতে শুধুমাত্র মানের যোগফল বোঝায়। তেমনি একাধিক ভেক্টরের অভিমুখ যদি একই দিকে হয়, তবে শুধুমাত্র মানগুলো যোগ করে ভেক্টরগুলোর যোগফল পাওয়া যায়। অর্থাৎ এই যোগফল হবে স্কেলার যোগফলের সমান।

অনুসন্ধান : দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কী শূন্য হতে পারে ?

ধরি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

এদের লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

যখন $\theta = 180°$, তখন R ন্যূনতম হয়। অর্থাৎ, $R_{min} = P - Q$

এখন দেখা যাচ্ছে, P এবং Q সমান হলে R শূন্য হয়। কিন্তু P ও Q অসমান হলে R-এর ন্যূনতম মান শূন্য হতে পারে না। সুতরাং, দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কখনো শূন্য হতে পারে না।

নিজে কর : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে দেখাও যে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$

[JU Admission Test, 2019-20]

গাণিতিক উদাহরণ ২.৯

১। $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$। m-এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে ?

[KUET Admission Test , 2010-11 (মান ভিন্ন)]

যদি $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হয়, তবে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে।

এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \times (m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ m & 6 & -10 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(30 - 30) - \hat{j}\,(-10 - 5m) + \hat{k}\,(6 + 3m)$$

$$= \hat{j}\,(10 + 5m) + \hat{k}\,(6 + 3m)$$

$\therefore$ শর্ত অনুসারে,

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{j}(10 + 5m) + \hat{k}(6 + 3m) = 0$

উভয় পাশে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$-এর সহগ তুলনা করে পাই,

$10 + 5m = 0$ এবং $6 + 3m = 0$

বা, $5m = -10$ বা, $3m = -6$

$\therefore m = -\frac{10}{5} = -2$ $\therefore m = -\frac{6}{3} = -2$

সুতরাং, $m = -2$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

২। প্রমাণ কর যে, $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2B^2$

আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ [এখানে, θ হলো ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ]

এবং $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{\eta}$; $\hat{\eta}$ একক ভেক্টর

$$\therefore (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2 = (AB\cos\theta)^2 + (AB\sin\theta\,\hat{\eta})^2$$

$$= A^2B^2\cos^2\theta + A^2B^2\sin^2\theta \qquad [\because \hat{\eta}^2 = 1]$$

$$= A^2B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = A^2B^2$$ (প্রমাণিত)

৩। $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -2\hat{j} + \hat{i} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থান করে তার উল্লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৪; কু. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৮]

$\vec{P} \times \vec{Q}$ একটি ভেক্টর যা $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর তলে লম্ব।

$$\therefore \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(9 - 8) + \hat{j}(-4 - 6) + \hat{k}(-4 - 3) = \hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}$$

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একক ভেক্টর রাশি $= \hat{\eta}$

$$\therefore \hat{\eta} = \frac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-10)^2 + (-7)^2}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{1 + 100 + 49}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{150}}$$

৪। $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করে দেখাও যে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

মনে করি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

বা, $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A} - \vec{B}|^2$

বা, $(\vec{A} + \vec{B}) . (\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{A} - \vec{B}) . (\vec{A} - \vec{B})$

বা, $\vec{A} . \vec{A} + \vec{B} . \vec{A} + \vec{A} . \vec{B} + \vec{B} . \vec{B} = \vec{A} . \vec{A} - \vec{B} . \vec{A} - \vec{A} . \vec{B} + \vec{B} . \vec{B}$

বা, $2(\vec{A} . \vec{B}) = -2(\vec{A} . \vec{B})$, $(\because \vec{A} . \vec{B} = \vec{B} . \vec{A})$

বা, $4(\vec{A} . \vec{B}) = 0$ বা, $\vec{A} . \vec{B} = 0$

বা, $AB\cos\theta = 0$ $\therefore \cos\theta = 0$ বা, $\theta = 90°$ $(A \neq 0, B \neq 0)$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $90°$; কাজেই ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

৫। $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\vec{P} \times \vec{Q} = \vec{Q} \times \vec{R} = \vec{R} \times \vec{P}$

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$$

$$\therefore \quad \vec{P} = -(\vec{Q} + \vec{R})$$

$$\therefore \quad \vec{P} \times \vec{Q} = -(\vec{Q} + \vec{R}) \times \vec{Q} = -\vec{R} \times \vec{Q} = \vec{Q} \times \vec{R} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

আবার, $\vec{R} \times \vec{P} = -\vec{R} \times (\vec{Q} + \vec{R}) = -\vec{R} \times \vec{Q} = \vec{Q} \times \vec{R} \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে পাই,

$\vec{P} \times \vec{Q} = \vec{Q} \times \vec{R} = \vec{R} \times \vec{P}$ (প্রমাণিত)

৬। 3 kg ভরের একটি গতিশীল কণার গতিবেগ $\vec{v} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$। কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j}$ হলে মূলবিন্দু সাপেক্ষে এর কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

এখানে,

$m = 3\,\text{kg}$

$\vec{v} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j}$

আমরা জানি,

রৈখিক ভরবেগ, $\vec{P} = m\vec{v}$

$$\therefore \quad \vec{P} = 3(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = 6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

আবার, কৌণিক ভরবেগ, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$

$$\therefore \quad \vec{L} = (\hat{i} + \hat{j}) \times (6\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-3 - 6 \times 0) + \hat{j}\{6 \times 0 - 1 \times (-3)\} + \hat{k}(6 - 6)$$

$$= -3\hat{i} + 3\hat{j}$$

৭। একটি ঘূর্ণনরত কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$N হলে টর্কের মান ও দিক নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১৫]

এখানে,

ব্যাসার্ধ ভেক্টর, $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m

বল, $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$N

টর্ক, $\vec{\tau} = ?$

টর্কের মান, $\tau = ?$

আমরা জানি, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-6 + 3) - \hat{j}(-6 + 6) + \hat{k}(6 - 12)$$

$$= -3\hat{i} - 6\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{\tau} = -(3\hat{i} + 6\hat{k})\text{N-m}$$

τ-এর মান $= \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$

উত্তর : $-(3\hat{i} + 6\hat{k})$N-m, $\sqrt{45}$

৮। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ α হলে প্রমাণ কর—

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{P}\times\vec{Q}|}{\vec{P}.\vec{Q}}$$

আমরা জানি,

$$|\vec{P}\times\vec{Q}| = PQ\sin\alpha \text{ এবং } \vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha$$

$$\therefore \frac{|\vec{P}\times\vec{Q}|}{\vec{P}.\vec{Q}} = \frac{PQ\sin\alpha}{PQ\cos\alpha} = \tan\alpha \text{ (প্রমাণিত)}$$

৯। একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুটি যথাক্রমে $\vec{A} = (3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})m$ এবং $\vec{B} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})m$। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত? (Admission Test : KUET 2018-19; RUET 2014-15 (মান ভিন্ন))

আমরা জানি, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-1+2) - \hat{j}(-3-4) + \hat{k}(-3-2)$$

$$= \hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{1+7^2+(-5)^2} = 8{\cdot}66 \text{ m}^2$$

১০। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণ দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$। [দি. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০১২; Admission Test : KUET 2014-15 (মান ভিন্ন); RU-C 2021-22]

আমরা জানি, দুটি ভেক্টর কোনো একটি সামন্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশ করলে ওই সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে ভেক্টর দুটির ক্রস গুণফলের অর্ধেক।

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times|\vec{A}\times\vec{B}|$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-6) - \hat{j}(12+2) + \hat{k}(-9-1) = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times|\vec{A}\times\vec{B}| = \frac{1}{2}(\sqrt{(-2)^2+(-14)^2+(-10)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\times\sqrt{300} = 8{\cdot}66$$

১১। $\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$; $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় একটি ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

আমরা জানি,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\times|\vec{P}\times\vec{Q}|$

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(15-1) - \hat{j}(20-2) + \hat{k}(4-6) = 14\hat{i} - 18\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{P}\times\vec{Q}| = \sqrt{(14)^2+(-18)^2+(-2)^2} = 22{\cdot}90$$

$$\therefore \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}\times 22{\cdot}90 = 11{\cdot}45 \text{ একক}$$

১২। বল $\vec{F} = 4.0$ N, ব্যাসার্ধ $\vec{r} = 5.0$ m এবং এই দুই ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ 30°। ভেক্টর গুণন $\vec{r} \times \vec{F}$ নির্ণয় কর। এটি কোন রাশি নির্দেশ করে?

$$\vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta\, \hat{n} = 4 \times 5 \sin 30^\circ\, \hat{n} = 10\, \hat{n} \text{ N-m}$$

$\therefore$ $|\vec{r} \times \vec{F}| = 10$ N-m

$\vec{r} \times \vec{F}$, এটি একটি ভেক্টর। এই রাশিটিকে টর্ক বলা হয়।

১৩। $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, দুটি ভেক্টর দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য. বো. ২০২৩]

উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টর দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজ একটি সামন্তরিক।

$\therefore$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\therefore \quad \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-3-2) - \hat{j}(-3+2) + \hat{k}(-2-2) = -5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$$

$\therefore$ $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (-4)^2} = 6.48$ বর্গ একক

১৪। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় মিলে একটি ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্র গঠন করে। ভেক্টর তিনটি এই সমতলে অবস্থিত কি না গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [কু. বো. ২০২৩]

আমরা জানি, $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$ হলে ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থান করবে।

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(6-2) - \hat{j}(9-1) + \hat{k}(6-2) = 4\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{A} \times \vec{B}| \cdot \vec{C} = (4\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= (4 \times 1) + (-8)(2) + (4)(2)$$

$$= 4 - 16 + 8 = -4$$

যেহেতু $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \neq 0$ তাই ভেক্টরদ্বয় একই সমতলে অবস্থান করবে না।

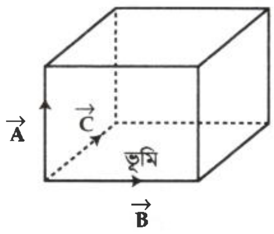
২.১০.৩ ভেক্টরের ত্রৈধ গুণন
Triple product of vectors

দুটি ভেক্টরের গুণফলকে তৃতীয় অন্য একটি ভেক্টরের সাথে গুণ করার প্রক্রিয়াটিকে বলা হয় ভেক্টরের ত্রৈধ গুণন। ত্রৈধ গুণন দুই প্রকার। যথা— (i) স্কেলার ত্রৈধ গুণন (Scalar triple product) এবং (ii) ভেক্টর ত্রৈধ গুণন (Vector triple vector)।

স্কেলার ত্রৈধ গুণন : দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের সাথে তৃতীয় একটি ভেক্টরের স্কেলার গুণনকে বলা হয় স্কেলার ত্রৈধ গুণন।

উদাহরণ : $\vec{B} \times \vec{C}$ একটি ভেক্টর রাশি। এর সঙ্গে $\vec{A}$-এর স্কেলার গুণন হলে পাওয়া যায়, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ যা একটি স্কেলার রাশি। এটিই $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$-এর স্কেলার ত্রৈধ গুণন।

যদি তিনটি ভেক্টর $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ একটি ঘন সামান্তরিকের বা সমান্তর ষটফলক (Parallelepiped)-এর তিনটি বাহু নির্দেশ করে [চিত্র ২.৪৫], তবে ওই সামান্তরিক বা সমান্তর ষটফলকের আয়তন হবে, $V = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$।



চিত্র ২·৪৫

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$ হলে, $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ দ্বারা বর্ণিত ঘন সামান্তরিকের আয়তন শূন্য হবে। এর অর্থ হলো $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয় একতলীয় হবে।

সুতরাং তিনটি ভেক্টর $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ একতলীয় হওয়ার শর্ত হলো —

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$$

ভেক্টর ত্রৈধ গুণন (Triple product of vector) :

দুটি ভেক্টরের গুণফলের সাথে তৃতীয় একটি ভেক্টরের গুণনকে ভেক্টর ত্রৈধ গুণন বলা হয়।

উদাহরণ : $\vec{B}\times\vec{C}$ হলে একটি ভেক্টর রাশি। $\vec{A}$ এর সাথে $\vec{B}\times\vec{C}$-এর ভেক্টর গুণফল হবে $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$। এটি একটি ভেক্টর রাশি। $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ এর এই ধরনের গুণন হলো ভেক্টর ত্রৈধ গুণন।

১। $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর।

এখানে, $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A}) - \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$

$\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A})$

$$\therefore\ \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) + \vec{C}(\vec{B}\cdot\vec{A})$$
$$= \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}) + \vec{A}(\vec{C}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A}) = 0$$

হিসাব কর : $\vec{A} = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ **এবং** $\vec{C} = 2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ **হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় কি না —প্রমাণ কর।** [JU Admission Test, 2021-22]

Hints : আমরা জানি,

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$ হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে।

২·১১ পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাস
Calculus in physics

ক্যালকুলাস হলো পরিবর্তনের গাণিতিক অধ্যয়ন। এর দুটি প্রধান শাখা রয়েছে—ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস (Differential calculus) ও ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস (Integral calculus)। বিজ্ঞানী নিউটন সর্বপ্রথম তাত্ত্বিক পদার্থ-বিজ্ঞানে ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করেন।

গুরুত্ব : পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের গুরুত্ব অপরিহার্য। অনেক বাস্তব প্রক্রিয়া ডেরিভেটিভস যুক্ত সমীকরণ দ্বারা ব্যাখ্যা করা হয়। সেই সমীকরণগুলোকে ব্যবকলনীয় (ডিফারেনসিয়াল) সমীকরণ বলে। পদার্থবিজ্ঞান সময়ের সাথে রাশির পরিবর্তন ও বিকাশের পদ্ধতির সাথে সম্পর্কিত। কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ ধারণার সম্যক জ্ঞানের জন্য time derivative-এর ধারণা থাকা আবশ্যক। বিশেষত নিউটনীয় পদার্থবিদ্যায় একটি বস্তুর অবস্থানের time derivative গুরুত্বপূর্ণ।

বেগ বস্তুর সরণের time derivative

ত্বরণ বস্তুর বেগের time derivative

ব্যবহার :

I. বেগ, ত্বরণ, বক্ররেখার ঢাল ইত্যাদি হিসাবের জন্য ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করা হয়।

II. ক্ষেত্রফল, আয়তন, ভরকেন্দ্র, কাজ এবং চাপ ইত্যাদি হিসাবের জন্য ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়। স্থান, কাল এবং গতির প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জনের জন্যও ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ :

দেয়া আছে, একটি সরলরেখার উপর বস্তুর অবস্থান

$$x(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

তাহলে বস্তুর বেগ, $v = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -32t + 16$

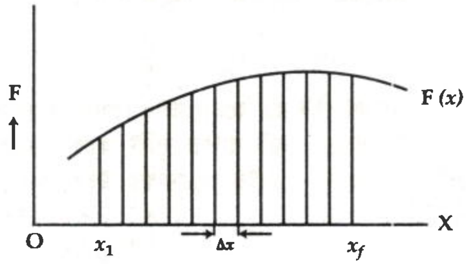
এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = -32$

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র সাধারণ ব্যবকলনীয় (ডিফারেনসিয়াল) সমীকরণের মাধ্যমে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের সাহায্যে পরিবর্তী বল দ্বারা কাজ নির্ণয় : ধরি, একটি বস্তুর ওপর একটি পরিবর্তনশীল বল x-অক্ষ বরাবর ক্রিয়াশীল। বলটির মান বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব x-এর ওপর নির্ভর করে অর্থাৎ F হলো দূরত্ব x-এর একটি অপেক্ষক। চিত্র ২·৪৬-এ x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $F(x)$-এর আনুষঙ্গিক মান নিয়ে লেখ দেখানো হয়েছে।

মোট সরণ Δx প্রস্থের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত, যেখানে x_i থেকে $x_i + \Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ হচ্ছে Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে বলের মান প্রায় ধ্রুব থাকে এবং এই ধ্রুব মান F_1। সুতরাং এই অংশে এই বল দ্বারা সম্পন্ন ক্ষুদ্র কাজ, $\Delta W_1 = F_1 \Delta x$



চিত্র ২·৪৬

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশে $x_i + \Delta x$ থেকে $x_i + 2\Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে ধ্রুব বল F_2। সুতরাং দ্বিতীয় অংশে বল দ্বারা কৃত কাজ, $\Delta W_2 = F_2 \Delta x$। বস্তুটিকে x_i থেকে x_f পর্যন্ত সরাতে $F(x)$ বল দ্বারা কৃত মোট কাজ,

$$\begin{aligned} W &= \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \ldots + \Delta W_N \\ &= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x + \ldots + F_N\Delta x \\ &= \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.30) \end{aligned}$$

Δx-কে যত ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর তথা N-এর মান যত বেশি হবে হিসাবকৃত কাজের মান তত সঠিক হবে। আমরা বল $F(x)$ দ্বারা কৃত কাজের সঠিক মান পেতে পারি যদি পরিমাপের সীমার মধ্যে Δx শূন্য থাকে এবং N অসীম হয়। তা হলে সঠিক ফল হবে,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.31)$$

কিন্তু ক্যালকুলাসের ভাষায় $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x$ রাশিটি হচ্ছে

$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$ যা x_i থেকে x_f পর্যন্ত x-এর সমাকলন (Integration) নির্দেশ করে।

সুতরাং সমীকরণ (2.31) দাঁড়ায়,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.32)$$

সংখ্যাগতভাবে এই রাশিটি হচ্ছে বল বক্ররেখা এবং x_i ও x_f সীমার মধ্যে অবস্থিত x-অক্ষের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। সুতরাং সমাকলনের সাহায্যে কাজ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

২·১২ ভেক্টর ক্যালকুলাস
Vector calculus

২·১২·১ ভেক্টর অন্তরীকরণ বা অবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ
Vector differentiation or vector derivatives

ভেক্টর অন্তরীকরণ বা অবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ আলোচনার পূর্বে কয়েকটি প্রয়োজনীয় বিষয় জানা দরকার।

(ক) ক্যালকুলাস (Calculus) : বিজ্ঞানের ভাষায় ক্যালকুলাস হলো অবিরত পরিবর্তনশীল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ গণনার একটি শাস্ত্র। আধুনিক গণিতে এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা।

ক্যালকুলাস দুভাগে বিভক্ত—

(১) অন্তরীকরণ বা অবকলন ক্যালকুলাস (Differential calculus),

(২) যোগজীকরণ বা সমাকলন ক্যালকুলাস (Integral calculus)

(খ) অপারেটর (Operator) : অপারেটর একটি ইংরেজি শব্দ। এর অভিধানগত অর্থ হলো **'চলক'** বা **'সংঘটক'** বা **'কার্যকারক'**। কিন্তু বিজ্ঞানের ভাষায় অপারেটর এক ধরনের **প্রতীক** বা **সংকেত**। এর নিজস্ব কোনো মান নেই। যেমন বর্গ (2), ঘন (3), বর্গমূল ($\sqrt{\ }$), sine, log ইত্যাদি। তবে এরা যখন অন্য কোনো রাশির সাথে যুক্ত হয় তখন একটি নির্দিষ্ট মান বহন করে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $\sqrt{25} = 5$, $\sin 30° = 0{\cdot}5$ ইত্যাদি। আরও সোজা কথায় বলা যেতে পারে $(10\times)$ চিহ্নটির কোনো মান হয় না। কিন্তু (10×5) চিহ্নটির মান $= 50$। এর অর্থ 10-কে 5 দ্বারা গুণ করা। এখন যদি $(10\times)$ চিহ্নকে C দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $10\times 5 = C5$ হয়। অতএব C একটি অপারেটর। যোগজীকরণও একটি অপারেটর। এর চিহ্ন $\int$ অথবা Σ।

সংজ্ঞা : যে গাণিতিক প্রকাশ বা চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

(গ) ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ∇ : ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটরটি স্যার হ্যামিলটন প্রথম আবিষ্কার করেন। গিব্স একে 'ডেল' (del) নামকরণ করেন। এর অন্য নাম 'ন্যাবলা' (nabla)। ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয় :

$$\text{ডেল, } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

সাধারণ ভেক্টরের মতো ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটরেরও ভেক্টর ধর্ম রয়েছে। ইহা কোনো একটি রাশির ওপর ক্রিয়া করে নতুন একটি রাশির সৃষ্টি করে। যেহেতু ভেক্টর ও স্কেলার উভয় রাশিকে অন্তরীকরণ করা যায়, তাই অন্তরীকরণ অপারেটর ভেক্টর ও স্কেলার উভয় ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

$$\text{তবে, } \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, একটি স্কেলার রাশি। এখানে $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ আংশিক অন্তরীকরণ বুঝায়।

স্কেলার ফাংশনের গ্রেডিয়েন্ট, ভেক্টর ফাংশনের ডাইভারজেন্স বা ভেক্টর ফাংশনের কার্ল সংজ্ঞায়িত করার জন্য এই অপারেটরটি ব্যবহার করা হয়।

২·১২·২ ভেক্টর অন্তরক অপারেটরকে উপাংশের সাহায্যে প্রকাশ
Representation of vector differential operator in terms of components

বিভিন্ন উপাংশের সাহায্যে ভেক্টর অন্তরক অপারেটরকে লেখা যায়—

$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ এবং $\frac{d}{dz}$ আকারে। এখানে $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$-এর কোনো অর্থ নেই। কিন্তু যখন ইহা x, y, z-এর ওপর ক্রিয়া করে তখন $\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dy}$ এবং $\frac{dz}{dz}$ আকারে লেখা হয় এবং ইহা অর্থপূর্ণ হয়। এখন y যদি একটি রাশি হয় যার মান x-এর উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ y x-এর অপেক্ষক $y(x)$, তাহলে x-এর সাপেক্ষে y-কে অন্তরীকরণ করা যাবে এবং পাওয়া যাবে $\frac{dy}{dx}$। এখানে $\frac{dy}{dx}$ হচ্ছে x-এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার। একে x-এর সাপেক্ষে y-এর অন্তরকও বলে। আবার Δt এর মান শূন্যের কাছাকাছি হলে x-এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য t এর সাপেক্ষে x এর পরিবর্তনের হারকে x-এর সাপেক্ষে t-এর অন্তরক $\frac{dx}{dt}$ বলে। অর্থাৎ,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

এখন $\vec{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে লেখা যায়,

$\vec{x} = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1$; এখানে x_1, y_1, z_1 হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষের দিকে $\vec{x}$ ভেক্টরের উপাংশের মান। x_1, y_1, z_1 উপাংশগুলো সময় t-এর অপেক্ষক কিন্তু $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ধ্রুবক এবং সময়ের সাপেক্ষে এদের কোনো পরিবর্তন নাই; অর্থাৎ এদের পরিবর্তনের হার শূন্য। অতএব $\vec{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে এর ব্যবকলন হবে,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{i}\frac{dx_1}{dt} + \hat{j}\frac{dy_1}{dt} + \hat{k}\frac{dz_1}{dt} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (2.33)$$

২.১২.৩ অবস্থান ভেক্টর হতে বেগ ও ত্বরণ প্রতিপাদন
Derivation of velocity and acceleration from position vector

ধরা যাক, $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর। $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

অতি ক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ $\vec{v}$ বলা হয়।

সুতরাং, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\dfrac{dx}{dt} + \hat{j}\dfrac{dy}{dt} + \hat{k}\dfrac{dz}{dt}$ ... ... (2.34)

আবার, অতি ক্ষুদ্র সময়ে বেগ $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হার হলো ত্বরণ,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.35)$$

কোনো স্কেলার রাশিকে অন্তরীকরণ করার সাধারণ নিয়ম নিম্নরূপ :

(ক) প্রথমে চল রাশিটির সহগ সংখ্যাকে ঘাত দ্বারা গুণ করতে হবে।

(খ) পরে চল রাশির ঘাতের মান হতে '1' বিয়োগ করতে হবে।

উদাহরণ : মনে করি, দূরত্ব $s = 16t^2$। এখানে সহগ 16, t চল রাশি এবং 2 হলো ঘাত। ওপরের নিয়ম অনুসারে প্রথমে সহগ 16-কে ঘাত 2 দ্বারা গুণন করে পাওয়া যাবে 32 এবং চল রাশির ঘাত 2 হতে 1 বিয়োগ করলে পাওয়া যাবে 1।

$$\therefore \frac{ds}{dt} = v = 32t$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.১০

১। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}$ ও $\vec{B} = 5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\,.\,\vec{B})$ ও $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী, $(\vec{A}\,.\,\vec{B}) = \{\hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}\}\,.\,(5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3)$

$$= 5t^3 - t^2 - (2t+1)t^3$$
$$= 5t^3 - t^2 - 2t^4 - t^3$$
$$= 4t^3 - 2t^4 - t^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\,.\,\vec{B}) = \frac{d}{dt}(4t^3 - 2t^4 - t^2) = 12t^2 - 8t^3 - 2t$$

পুনরায়, $(\vec{A}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & -t & (2t+1) \\ 5t & t & -t^3 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -t & (2t+1) \\ t & -t^3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} t^2 & (2t+1) \\ 5t & -t^3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} t^2 & -t \\ 5t & t \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) - \hat{j}(-t^5 - 10t^2 - 5t) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$$
$$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) + \hat{j}(t^5 + 10t^2 + 5t) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \hat{i}(4t^3 - 4t - 1) + \hat{j}(5t^4 + 20t + 5) + \hat{k}(3t^2 + 10t)$$

২। $\vec{A}$ একটি ধ্রুবক মানের ভেক্টর হলে দেখাও যে $\frac{d\vec{A}}{dt}$, $\vec{A}$-এর সঙ্গে লম্বভাবে আছে।

$|\vec{A}| =$ ধ্রুবক $\quad \therefore \quad \vec{A}.\vec{A} = A^2 =$ ধ্রুবক

$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{A}) = 0$

বা, $\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{A} = 0$

বা, $2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ বা $\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot(\vec{A} + \vec{A}) = 0$

সুতরাং, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ভেক্টরটি $\vec{A}$ ভেক্টরের সঙ্গে লম্বভাবে আছে।

৩। একটি কণা $x = 3t^2$, $y = t^2 - 2t$, $z = 3t - 4$ সমীকরণগুলো দ্বারা নির্দেশিত বক্রপথে গতিশীল। $t = 2$ সময়ে কণাটির বেগ ও ত্বরণের মান কত?

কোনো মুহূর্তে কণাটির অবস্থান ভেক্টর,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 3t^2\hat{i} + (t^2 - 2t)\hat{j} + (3t - 4)\hat{k}$$

সুতরাং কণাটির বেগ,

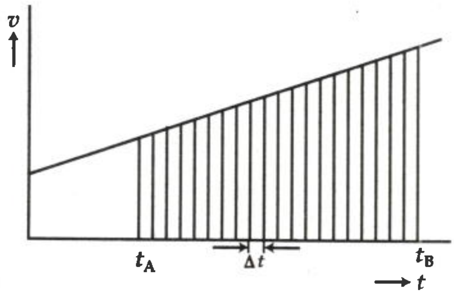
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\hat{i} + (2t - 2)\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=2} = 6\times(2)\hat{i} + (2\times2 - 2)\hat{j} + 3\hat{k} = 12\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

কণাটির ত্বরণ, $\vec{a} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\{6t\hat{i} + (2t - 2)\hat{j} + 3\hat{k}\} = 6\hat{i} + 2\hat{j}$

যোগজীকরণ বা সমাকলন
Integration

মনে করি, একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল অর্থাৎ এটি সরলরেখা বরাবর চলছে। বেগের দিক নির্দিষ্ট হলেও এর মান ভিন্ন। ধরা যাক, বেগের মান v সময় t-এর ওপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ v সময় t-এর অপেক্ষক (function)। একে $v(t)$ হিসেবে প্রকাশ করা হয়।



চিত্র ২.৪৭

ধরা যাক, আদি সময় t_A এবং শেষ সময় t_B। এই সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করব। এখন আমরা সময় ব্যবধান $t_B - t_A$ কে N সংখ্যক অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সমান অংশ Δt এ বিভক্ত করি। ধরি আদি সময় t_A হতে প্রথম ক্ষুদ্রাংশ $t_A + \Delta t$ এর মধ্যে সময় ব্যবধান Δt। এই সময় ব্যবধান এত ক্ষুদ্র যে এই অংশে $v(t)$ এর পরিবর্তন অতি নগণ্য; সুতরাং এই ক্ষুদ্র সময় ব্যবধানকালে $v(t)$ এর মান প্রায় ধ্রুব থাকে। ধরা যাক $v(t)$-এর এই ধ্রুব মান v_1। Δt সময় ব্যবধানে অতিক্রান্ত দূরত্ব Δs_1 হলে আমরা পাই,

$$\Delta s_1 = v_1\Delta t$$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশ, তৃতীয় অংশের জন্য সময় ব্যবধান হবে Δt এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে যথাক্রমে $\Delta s_2 = v_2\Delta t$, $\Delta s_3 = v_3\Delta t$। N সংখ্যক অংশের জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে $\Delta s_N = v_N\Delta t$। এখন t_A হতে t_B সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব s হবে, $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3 \ldots\ldots\ldots \Delta s_N$ পদগুলোর সমষ্টি।

সুতরাং, $s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots + \Delta s_N$

বা, $s = v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + \ldots + v_N\Delta t$

বা, $$s = \sum_{n=1}^{N} v_n\Delta t \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.36)$$

RMDAC

এখানে লক্ষণীয় যে আমরা ক্ষুদ্র সময় ব্যবধান Δt-এর জন্য বেগের মান ধরেছি প্রায় ধ্রুব। এই Δt সময়ে বেগের মান যদি পুরোপুরি ধ্রুব থাকত তবে সমীকরণ (2.36) হতে আমরা সঠিক দূরত্ব নির্ণয় করতে পারতাম। এখন সময় ব্যবধান Δt যত ক্ষুদ্রতর হবে v-এর মান ততই ধ্রুব মানের খুবই কাছাকাছি হবে। অতিক্রান্ত দূরত্বের মান সঠিক পেতে পারি যদি পরিমাপের সীমার মধ্যে Δt-কে শূন্য এবং ক্ষুদ্র অংশগুলোর সংখ্যা N অসীম হয়। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{N} v_n \Delta t$$

ক্যালকুলাসে $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{n=1}^{N} v_n \Delta t$ রাশিকে লেখা হয় $\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$

$\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$ রাশিটি t_A হতে t_B পর্যন্ত t-এর সাপেক্ষে $v(t)$-এর সমাকলন নির্দেশ করে। সমাকলন এক ধরনের যোগজীকরণ Σ বা $\int$ চিহ্ন সমষ্টিকরণ বা যোগজীকরণ বুঝায়।

অতএব, $$s = \int_{t_A}^{t_B} v(t)dt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.37)$$

$v(t)$ কে যোজ্য রাশি (Integrand) বলা হয়। $v(t)$-এর পরে dt দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে, যোগজীকরণটি করতে হবে t-এর সাপেক্ষে।

অন্তরীকরণ বা অবকলন ও যোগজীকরণ পরস্পর বিপরীত ক্রিয়া। যেমন—

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

আবার, $\int \cos x \, dx = \sin x$

অর্থাৎ $\sin x$-কে অন্তরীকরণ করলে $\cos x$ পাওয়া যায়, আবার $\cos x$-কে যোগজীকরণ করলে $\sin x$ পাওয়া যায়।

২·১৩ ভেক্টর অপারেটরের ব্যবহার
Uses of vector operators

গ্রেডিয়েন্ট (Gradient)

গ্রেডিয়েন্টের সংজ্ঞা এবং ব্যাখ্যা দেয়ার পূর্বে ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ডেল $(\vec{\nabla})$, স্কেলার ও ভেক্টর ক্ষেত্র এবং রেখা ইন্টিগ্রাল সম্পর্কে জানা দরকার।

স্কেলার ক্ষেত্র ও ভেক্টর ক্ষেত্র

স্কেলার ক্ষেত্র : যেকোনো ক্ষেত্র বিবেচনা করা হোক না কেন, ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর সাথে একটি ভৌত গুণ (physical property) যুক্ত থাকে। **ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে।** ঘনত্ব, উষ্ণতা, বিভব ইত্যাদি স্কেলার ক্ষেত্রের উদাহরণ। অন্যভাবে বলা যায় কোনো স্থানের কোনো অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুতে যদি একটি স্কেলার রাশি $\varphi(x, y, z)$ বিদ্যমান থাকে, তবে ওই অঞ্চলকে ওই রাশির স্কেলার ক্ষেত্র বলে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, $\varphi(x, y, z) = 3x^2yx + 2xy^2x + 5zy^2$ স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

[DAT: 22-23]

ভেক্টর ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে। বেগ, তড়িৎ প্রাবল্য, মহাকর্ষ প্রাবল্য ইত্যাদি ভেক্টর ক্ষেত্রের উদাহরণ। অন্যভাবে কোনো স্থানের কোনো অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুতে যদি একটি ভেক্টর রাশি $\vec{F}(x, y, z)$ বিদ্যমান থাকে, তবে ওই অঞ্চলকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে।

উদাহরণ : $\vec{F}(x, y, z) = ax^2y\,\hat{i} + bx^2yz^2\,\hat{j} + 4zx^2\,\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

রেখা ইন্টিগ্রাল : $\vec{V}(x, y, z)$ একটি ভেক্টর ক্ষেত্র হলে কোনো আবদ্ধ পথে ভেক্টরের রেখাজনিত ইন্টিগ্রাল $\oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$; এখানে $d\vec{l}$ আবদ্ধ পথের একটি অংশ যার পরিমাণ dl এবং অভিমুখ ওই অংশের স্পর্শক বরাবর।

স্কেলার ক্ষেত্রের গ্রেডিয়েন্ট

ধরা যাক, $\varphi(x, y, z)$ একটি ব্যবকলনযোগ্য স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে। তা হলে φ-এর গ্রেডিয়েন্টকে $\vec{\nabla}\varphi$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ, $$\text{grad}\, \varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \frac{\hat{i}\,\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\hat{j}\,\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\hat{k}\,\partial\varphi}{\partial z}$$

ইহা একটি ভেক্টর রাশি। এর মান অবস্থানের সাপেক্ষে ওই স্কেলার রাশির সর্বোচ্চ বৃদ্ধি হার নির্দেশ করে। এই বৃদ্ধি হারের দিকই হবে রাশিটির গ্রেডিয়েন্টের দিক। বিভিন্ন অক্ষের সাপেক্ষে কোনো স্কেলার ফাংশনের ঢালই হলো গ্রেডিয়েন্ট।

সংজ্ঞা : গ্রেডিয়েন্ট হলো একটি ভেক্টর ক্ষেত্র যা অদিক রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হার প্রকাশ করে। একে স্কেলার অপেক্ষকও বলে।

গ্রেডিয়েন্টের ভৌত তাৎপর্য (Physical significances of gradient)

(i) স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েন্ট একটি ভেক্টর ক্ষেত্র অর্থাৎ একটি ভেক্টর রাশি। [MAT: 20-21]

(ii) উক্ত ভেক্টর রাশির মান ওই স্কেলার রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হারের সমান।

(iii) স্কেলার রাশির পরিবর্তন শুধু বিন্দুর স্থানাঙ্কের ওপরই নির্ভর করে না, যেদিকে এর পরিবর্তন দেখানো হয় সেদিকের ওপরও নির্ভর করে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১১

১। যদি $\vec{A} = 2x^2\hat{i} + 3yz\hat{j} - xz^2\hat{k}$ এবং $\varphi = 2z - x^3y$ হয়, তা হলে $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{A}.\nabla\varphi$ নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(2z - x^3y) = -3x^2y\,\hat{i} - x^3\hat{j} + 2\hat{k}$$

এখন, $\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\varphi = (2x^2\hat{i} + 3yz\hat{j} - xz^2\hat{k}).(-3x^2y\,\hat{i} - x^3\hat{j} + 2\hat{k})$

$= -6x^4y - 3x^3yz - 2xz^2$

$(1, 1, -1)$ বিন্দুতে,

$$\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\varphi = -6(1)^4(1) - 3(1)^3(1)(-1) - 2(1)(-1)^2 = -6 + 3 - 2 = -5$$

ডাইভারজেন্স (Divergence)

মনে করি ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় কোনো অঞ্চলে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের অবস্থান ভেক্টর, $\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\,\hat{i} + v_2(x, y, z)\,\hat{j} + v_3(x, y, z)\,\hat{k}$; তা হলে ডেল ($\nabla$) অপারেটরের সাথে $\vec{V}$-এর স্কেলার গুণফলকে ওই ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে। ডাইভারজেন্সকে $\vec{\nabla}\,.\,\vec{V}$ বা div. $\vec{V}$ লিখে প্রকাশ করা হয়। এটি একটি স্কেলার রাশি। ডাইভারজেন্সের মাধ্যমে একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়। গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k})$$

$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$; এটি স্কেলার রাশি।

সংজ্ঞা : ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সগুলো একটি স্কেলার ফাংশন বা ক্ষেত্র যা দ্বারা ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে ফ্লাক্সের প্রকৃতি (বহি/অন্ত) জানা যায়।

ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্ম (Physical properties of divergence)

(i) ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোনো দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা div.$\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

(ii) মান ধনাত্মক হলে, তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়; ঘনত্বের হ্রাস ঘটে। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V}$ = '+' ve [চিত্র ২.৪৮(ক)]।

(iii) মান ঋণাত্মক হলে, আয়তনের সংকোচন ঘটে; ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V}$ = '–' ve [চিত্র ২.৪৮(খ)]।

(iv) মান শূন্য হলে, আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ [চিত্র ২.৪৮(গ)]।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla} . \vec{V} = 0$ হলে, ওই ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনয়ডাল (solenoidal) বলে।

(ক) ধনাত্মক ডাইভারজেন্স (খ) ঋণাত্মক ডাইভারজেন্স (গ) শূন্য ডাইভারজেন্স

চিত্র ২.৪৮

গাণিতিক উদাহরণ ২.১২

১। (1, − 1, 1) অবস্থানে $\vec{A} = 3xyz^3 \hat{i} + 2xy^2 \hat{j} - x^3y^2z \hat{k}$-এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।

[Jnu Admission Test, 2018-19]

আমরা পাই, $\vec{\nabla} . \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (3xyz^3 \hat{i} + 2xy^2 \hat{j} - x^3y^2z \hat{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^3y^2z)$$

$$= 3yz^3 + 4xy - x^3y^2$$

(1, − 1, 1) অবস্থানে,

$$\vec{\nabla} . \vec{A} = 3(-1)(1)^3 + 4(1)(-1) - (1)^3(-1)^2 = -3 - 4 - 1 = -8$$

২। $\vec{P} = 2a\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি যদি (1, 1, —1) বিন্দুতে $\varphi = 2z - x^3y$ গ্রেডিয়েন্টের ওপর লম্ব হয় তবে a এর মান নির্ণয় কর।

এখানে, গ্রেডিয়েন্ট, $\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right) . (2z - x^3y)$

$$= 3x^2y\,\hat{i} - x^3\,\hat{j} + 2\hat{k}$$

(1, 1, —1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi = \{-3(1)^2 \times 1\}^2 \hat{i} - 1^3 \hat{j} + 2\hat{k} = -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, যেহেতু $\vec{P} . \vec{\nabla}\varphi$

$\therefore \quad \vec{P} . \vec{\nabla}\varphi = -6a - 5 + 2 = 0$

বা, $6a - 3$

অর্থাৎ, $a = \frac{1}{2}$

কার্ল (Curl)

ধরা যাক, কোনো ত্রিমাত্রিক স্থানে কোনো বিন্দুর যথার্থ ভেক্টর ফাংশন $\hat{V}(x, y, z) = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$।

তা হলে অপারেটর ∇ এবং $\vec{V}$-এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণনকে **কার্ল** বলে। অর্থাৎ $\vec{V}$ যদি একটি অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক হয়, তা হলে $\vec{V}$ এর কার্ল হবে—

$$\text{curl } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

সংজ্ঞা : কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ওই ক্ষেত্রের ঘূর্ণনের সাথে সম্পর্কিত। ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত একটি বিন্দুর চারদিকে এর লাইন ইনটিগ্রালের মান প্রতি একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তা উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল প্রকাশ করে।

কার্লের ভৌত তাৎপর্য (Physical significances of curl)

(i) কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ওই ভেক্টর ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রের জন্য সর্বাধিক রেখা ইন্টিগ্রালের সমান। (রেখা ইন্টিগ্রালের সংজ্ঞা ২.১১ অনুচ্ছেদে দেওয়া আছে)

(ii) ভেক্টরটির দিক ওই ক্ষেত্রের ওপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

(iii) কার্ল এর মাধ্যমে প্রাপ্ত কোনো ভেক্টরের মান ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক বেগের দ্বিগুণ হয় বা রৈখিক বেগ $\vec{V}$-এর কার্ল কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ এর দ্বিগুণ হয়। অর্থাৎ

$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ হলে, $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 2\vec{\omega}$ হবে। এখানে $\vec{\omega}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর।

(iv) কোনো ভেক্টরের কার্ল ওই ভেক্টরের ঘূর্ণন নির্দেশ করে। কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘুরে কার্ল তা নির্দেশ করে।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল-এর নতিমাত্রা বা কার্লের ডাইভারজেন্স (gradient) শূন্য।

অর্থাৎ $\vec{\nabla} . (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$

(vi) কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল এবং সংরক্ষণশীল হয়।

(vii) কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য না হলে ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল এবং অসংরক্ষণশীল হয় অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ হলে $\vec{F}$ ঘূর্ণনশীল এবং অসংরক্ষণশীল হয়।

(viii) কোনো ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য হয় (0)। $\therefore \vec{\nabla} . (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$ হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১৩

১। (1, 1, – 1) বিন্দুতে $\vec{A} = xz^2\,\hat{i} - 2x^3yz\,\hat{j} + 3yz^3\,\hat{k}$ এর কার্ল নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & -2x^3yz & 3yz^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3yz^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^3yz)\right]\hat{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3yz^3)\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^3yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^2)\right]\hat{k}$$

$$= (3z^3 + 2x^3y)\,\hat{i} + (2xz)\,\hat{j} + (-6x^2yz)\,\hat{k}$$

$$= (3z^3 + 2x^3y)\,\hat{i} + 2xz\,\hat{j} - 6x^2yz\,\hat{k}$$

(1, 1, – 1) বিন্দুতে,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = [3(-1)^3 + 2(1)^3(1)]\,\hat{i} + 2(1)(-1)\,\hat{j} - 6(1)^2(+1)(-1)\,\hat{k}$$

$$= (-3 + 2)\,\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$= -\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

২। $\vec{A} = (6xy + z^3)\,\hat{i} + (3x^2 - z)\,\hat{j} + (3xz^2 - y)\,\hat{k}$। প্রমাণ কর যে, ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল।

[PUST Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি, ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল হবে, যদি $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ হয়।

এখন,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6xy + z^3) & (3x^2 - z) & (3xz^2 - y) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - z)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(6xy + z^3)\right\}$$
$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy + z^3)\right\}$$

$$= \hat{i}\{(0-1) - (0-1)\} - \hat{j}\{(3z^2 - 0) - (0 + 3z^2)\} + \hat{k}\{(6x - 0) - (6x + 0)\}$$

$$= \hat{i}(-1 + 1) - \hat{j}(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}(6x - 6x) = 0$$

$\therefore\ \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

যেহেতু $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$, কাজেই $\vec{A}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।

৩। $\vec{P} = -6\hat{i} + a\hat{j} + 12\hat{k}$ যদি (1, 1, —1) বিন্দুতে $\vec{A} = xz^2\,\hat{i} - 2x^3y\,\hat{j} + 3yz^3\,\hat{k}$–এর কার্ল ভেক্টরের সমান্তরাল হয় তবে 'a' এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{কার্ল} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & -2x^3y & 3yz^3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3yz^3) - \frac{\delta}{\delta z}(-2x^3y)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3yz^3) - \frac{\partial}{\partial z}(xz^2)\right\} - \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-2xy^3) - \frac{\delta}{\delta y}(xz^2)\right\}$$

$$= 3z^3\hat{i} + 2xz\hat{j} - 6x^2y\,\hat{k}$$

(1, 1, —1) বিন্দুতে $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 3 \times (-1)^3\,\hat{i} + 2 \times 1 \times (-1)\,\hat{j} - 6 \times (1)^2 \times 1\,\hat{k} = -3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

প্রশ্নানুসারে, $\vec{P}$, $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ এর সমান্তরাল। সমান্তরাল হওয়ায় শর্ত হলো—

$$\vec{P} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$\therefore\ (-6\hat{i} - a\hat{j} - 12\hat{k}) \times (-3\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}) = 0$

বা, $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & a & 12 \\ -3 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$ বা, $\hat{i}\{-6a + 24\} - \hat{j}(-36 + 36) + \hat{k}\{+12 + 3a\} = 0$

এখানে, i, j ও l এর সহগ শূন্য হবে। অর্থাৎ $-6a + 24 = 0$

বা, $6a = 24$

$\therefore\ a = \frac{24}{6} = 4$

৪। p-এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{V} = (5x + 2y)\hat{i} + (2py - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$ সলিনয়ডাল হবে?
[RUET Admission Test, 2015—16]

$\vec{V}$ সলিনয়ডাল হবে যদি $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হয়।

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\{(5x + 2y)\hat{i} + (2py - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(5x + 2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2py - z) + \frac{\partial}{\partial z}(x - 2z)$$

$$= 5 + 0 + 2p - 2 = 3 + 2p$$

$\therefore \quad 3 + 2p = 0$

বা, $p = -\frac{3}{2}$

৫। দেখাও যে বৈদ্যুতিক ক্ষেত্র, $\vec{E} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ একটি সংরক্ষিত ক্ষেত্র।

যদি curl $\vec{E} = 0$ হয়, তবে ক্ষেত্রটি সংরক্ষিত হবে।

$$\text{curl } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}z - \frac{\partial}{\partial z}y\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}z - \frac{\partial}{\partial z}x\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x\right)$$

$$= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 0) = 0$$

$\therefore \quad \vec{E}$ ক্ষেত্রটি সংরক্ষিত।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ ... ... (1)

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ ... ... (2)

$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ ... ... (3)

$R_{max} = P + Q$ ... ... (4)

$R_{min} = P \sim Q$ ... ... (5)

$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ ... ... (6)

$(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$ ... ... (7)

$m(\vec{P} + \vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q}$ ... ... (8)

একক ভেক্টর, $\hat{n} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ ... ... (9)

ভেক্টরের মান, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ ... ... (10)

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ ... ... (11)

$\vec{A}.\vec{B} = 0$ (লম্বের শর্ত) ... ... (12)

$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ ... ... (13)

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = 0$ ... ... (14)

লম্ব অভিক্ষেপ A এর দিকে, $B\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$ ... ... (15)

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n} AB\sin\theta$ ... ... (16)

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ (সমান্তরালের শর্ত) ... ... (17)

কাজ, $W = \vec{F} . \vec{s}$ ... ... (18)

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{r}$ ... ... (19)

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $|\vec{A} \times \vec{B}|$ ... ... (20)

লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{n} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$ ... ... (21)

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা ... ... (22)

$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$ ... ... (23)

$\vec{F}$-এর উপাংশে বিভাজন, $F_x = F\cos\theta$ এবং $F_y = F\sin\theta$ ... ... (24)

$\hat{i} \times \hat{j} \times \hat{k} = 0$ ... ... (25)

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ ... ... (26)

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ ... ... (27)

$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$ ... ... (28)

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$ ... ... (29)

$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ ... ... (30)

$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ (সলিনয়েডের শর্ত) ... ... (31)

$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ (অঘূর্ণনশীলের শর্ত) ... ... (32)

$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ (তিনটি ভেক্টর সমতলীয় শর্ত) ... ... (33)

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। তমাল সাইকেলে করে বাড়ি থেকে স্কুলে যাচ্ছিল। হঠাৎ করে বৃষ্টি নামল। বৃষ্টির ফোঁটা $6\ ms^{-1}$ বেগে তার গায়ে পড়া শুরু করল। বায়ুর প্রবাহ খুব বেশি ছিল না। তবুও বৃষ্টির ফোঁটা তার গায়ে $45°$ কোণে পড়ছে।

(ক) সাইকেলের বেগ নির্ণয় কর।

(খ) স্কুলে তাড়াতাড়ি পৌঁছানোর জন্য তমাল দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে ?

(ক) আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

বা, $\tan\theta = \frac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}$

বা, $\tan 45° = \frac{6\sin 90°}{P + 6\cos 90°}$

$\therefore$ $P = 6\ ms^{-1}$

$\therefore$ সাইকেলের বেগ $6\ ms^{-1}$

এখানে,
বৃষ্টির বেগ, $Q = 6\ ms^{-1}$
$\theta = 45°$
$\alpha = 90°$
সাইকেলের বেগ, $P = ?$

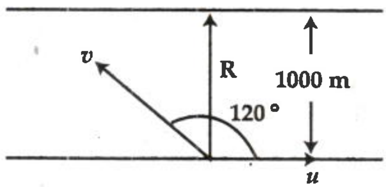
(খ) দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে পরিবর্তিত বেগ,

$P' = (6 \times 2) = 12\ ms^{-1}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{6\sin 90°}{12 + 6\cos 90°} = \dfrac{6}{12+0} = \dfrac{1}{2} = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore$ $\theta = 26{\cdot}57°$, অর্থাৎ তাকে $26{\cdot}57°$ কোণে ছাতা ধরতে হবে।

২।



রবিনদের বাড়ির সামনে 1000 m প্রশস্ত একটি স্রোতঃস্বিনী নদী প্রবাহিত। বাড়ির সোজাসুজি নদীর ঠিক অপর পাড়ে তার কলেজ। একদিন সকালে সে ক্লাস শুরু হওয়ার ঠিক 10 মিনিট পূর্বে স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে 10 kmh^{-1} বেগের একটি নৌকায় কলেজের উদ্দেশ্যে রওনা দিল এবং সোজা অপর পাড়ে গিয়ে কলেজে পৌঁছালো। [নদীর পাড় হতে কলেজের দূরত্ব নগণ্য বিবেচনা করতে হবে।]

(ক) উদ্দীপক অনুসারে নদীতে স্রোতের বেগ কত?

(খ) রবিন কী যথাসময়ে ক্লাসে উপস্থিত হতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

[য. বো. ২০২১; চ. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন)]

(ক) ধরা যাক, স্রোতের বেগ $= u$

স্রোতের সাথে 120° কোণে নৌকাটিকে চালনা করলে তা R বেগে চলে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছায়। সুতরাং,

$R\cos 90° = u\cos 0° + v\cos 120°$

বা, $0 = u + 10 \times (-0{\cdot}5)$

বা, $u = 5\ kmh^{-1}$

$\therefore$ স্রোতের বেগ $= 5\ kmh^{-1}$

(খ) আবার, $v\ \sin\alpha = R$

$\therefore$ $10 \times \sin 120° = R$

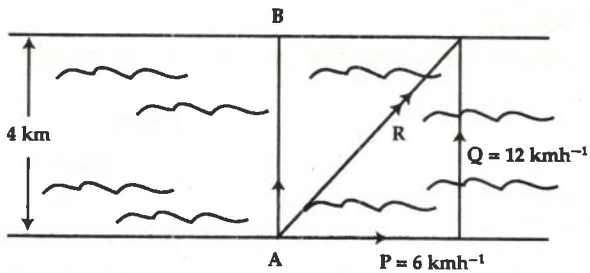
বা, $R = 10 \times 0{\cdot}866 = 8{\cdot}66\ kmh^{-1}$

$\therefore$ $R = \dfrac{8{\cdot}66 \times 1000}{60 \times 60}\ ms^{-1} = 2{\cdot}406\ ms^{-1}$

1000m দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় লাগবে $= \dfrac{s}{v} = \dfrac{1000}{2{\cdot}40} = 415{\cdot}6\ s = 6{\cdot}93\ min$

রবিন যেহেতু 10 min আগে যাত্রা শুরু করেছে, সুতরাং যথাসময়ে ক্লাশে উপস্থিত হতে পারবে।

৩। 4 km প্রস্থবিশিষ্ট একটি নদীর পাড়ের ‘A’ বিন্দু হতে 12 kmh^{-1} বেগে একটি নৌকা নদীর অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য যাত্রা শুরু করল। একজন লোক নৌকা চলার শুরু হতে অপর পাড়ের ‘B’ বিন্দুতে 20 মিনিট অপেক্ষা করে চলে গেল। নদীতে স্রোতের বেগ 6 kmh^{-1}।



(ক) নৌকার লব্ধি বেগের মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে অপেক্ষমাণ লোকটির সাথে নৌকার সাক্ষাৎ হবে কি না? গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

[সি. বো. ২০২১]

(ক) ধরা যাক, নৌকার লব্ধি বেগ = R

চিত্রানুসারে, $R^2 = P^2 + Q^2 = (6)^2 + (12)^2 = 36 + 144$

$\therefore \quad R = \sqrt{180} = 13{\cdot}416 \text{ kmh}^{-1}$

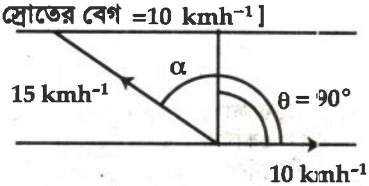
(খ) নদীর অপর পাড়ে নৌকাটি পৌঁছতে সময় লাগে,

$$t = \frac{S}{R}$$

$$\text{বা, } t = \frac{4 \text{ km}}{13{\cdot}416 \text{ kmh}^{-1}} = 0{\cdot}298 \text{ hr} = 17{\cdot}9 \text{ min.}$$

যেহেতু লোকটি নৌকা চলার শুরু হতে 20 মিনিট অপেক্ষা করেছিল সুতরাং লোকটির সাথে নৌকার সাক্ষাৎ হবে।

৪। সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য স্বপন ফেরিতে করে 15 kmh^{-1} বেগে নদী পার হওয়ার সময় দেখল, ফেরিটি সোজাসুজি রওনা না দিয়ে স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে যাচ্ছে। [স্রোতের বেগ =10 kmh^{-1}]



(ক) লব্ধির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মানের কতগুণ নির্ণয় কর।

(খ) ফেরিটির দিক পরিবর্তনের কারণ বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি লব্ধির সর্বোচ্চ মান,

$$R_{max} = v + u = 15 + 10 = 25 \text{ kmh}^{-1}$$

আবার, $R_{min} = v - u = 15 - 10 = 5 \text{ kmh}^{-1}$

$$\therefore \quad \frac{R_{max}}{R_{min}} = = \frac{25}{5}$$

বা, $R_{max} = 5 R_{min}$

এখানে,
ফেরির বেগ, $v = 15 \text{ kmh}^{-1}$
স্রোতের বেগ, $u = 10 \text{ kmh}^{-1}$
$\frac{R_{max}}{R_{min}} = ?$

অর্থাৎ, লব্ধির সর্বোচ্চ মান, লব্ধির সর্বনিম্ন মানের 5 গুণ।

(খ) যেহেতু নদীতে স্রোত আছে সেহেতু সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য ফেরিটিকে তির্যকভাবে রওনা দিতে হবে।

ধরি, ফেরিটিকে স্রোতের প্রতিকূলে α কোণে রওনা দিতে হবে। সেক্ষেত্রে স্রোতের বেগ, $u = 10 \text{ kmh}^{-1}$, ফেরির বেগ, $v = 15 \text{ kmh}^{-1}$ এবং স্রোতের দিকের সাথে লব্ধিবেগের দিক, $\theta = 90°$ হবে।

আমরা জানি, $$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

বা, $\tan 90° = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ বা, $\dfrac{\sin 90°}{\cos 90°} = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

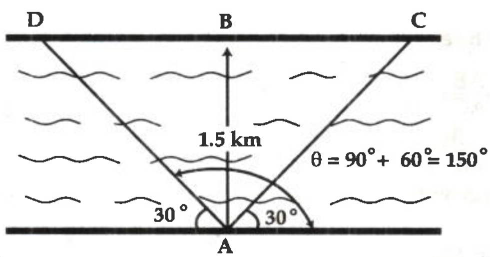
বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ বা, $u + v\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{u}{v} = -\dfrac{10}{15}$ বা, $\cos\alpha = -0{\cdot}666$

বা, $\alpha = \cos^{-1}(-0{\cdot}666)$ $\therefore \alpha = 131{\cdot}8°$

যেহেতু $\alpha > 90°$, সেহেতু ফেরিটিকে সোজাসুজি রওনা না দিয়ে তির্যকভাবে রওনা দিতে হয়েছে।

৫।



চিত্রে স্রোতযুক্ত একটি নদী যার প্রস্থ 1·5 km অতিক্রম করার জন্য পিন্টু A বিন্দু হতে সোজা অপর পাড়ে B বিন্দুতে সাঁতার কেটে পৌঁছানোর সিদ্ধান্ত নিল। ওই নদীতে স্রোতের বেগ 3 kmh^{-1} এবং সাঁতারুর বেগ ছিল 4 kmh^{-1}। স্রোতের কারণে পিন্টু AB বরাবর রওয়ানা হওয়া সত্ত্বেও AC বরাবর ওপারে পৌঁছাল।

(ক) AC বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) AD বরাবর পিন্টু সাঁতার কেটে কী B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০১৫]

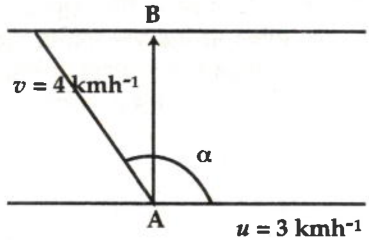
(ক) উদ্দীপকে $AB = 1.5$ km, AB-কে AC বরাবর বিভাজন করে পাই,

$$AC \sin 30° = AB$$

$\therefore$ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $AC = \frac{AB}{\sin 30°} = \frac{1.5}{0.5} = 3\,\text{km}$

(খ) ধরি, পিন্টু স্রোতের প্রতিকূলে α কোণে রওনা দিলে B বিন্দুতে পৌঁছবে। এখানে স্রোতের বেগ $u = 3\ \text{kmh}^{-1}$ এবং সাঁতারুর বেগ $v = 4\ \text{kmh}^{-1}$ এবং স্রোতের দিকের সাথে লব্ধিবেগের দিক, $\theta = 90°$।

আমরা জানি,



$$\tan 90° = \frac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}$$

বা, $\frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{v \sin \alpha}{u + v \cos \alpha}$

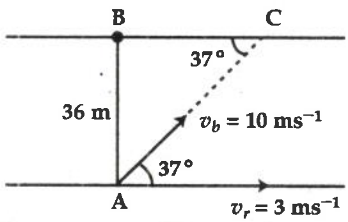
বা, $u + v \cos \alpha = 0$

বা, $v \cos \alpha = -u$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = 138.59°$

যেহেতু AD বরাবর স্রোতের সাথে উৎপন্ন কোণ $\theta = 90° + 60° = 150°$। সুতরাং AD বরাবর সাঁতার কেটে পিন্টু B বিন্দুতে পৌঁছতে পারবে না। তাই পিন্টুকে A বিন্দু হতে স্রোতের সাথে $138.59°$ কোণে সাঁতার কেটে B বিন্দুতে পৌঁছাতে হবে।

৬। 36 m চওড়া একটি নদীতে $10\ \text{ms}^{-1}$ বেগে একটি নৌকা চলছে। নৌকাটি নদী পার হয়ে বিপরীত তীরের C বিন্দুতে পৌঁছাল। নদীতে স্রোতের বেগ $3\ \text{ms}^{-1}$।



(ক) নদীর বিপরীত পাড়ের BC দূরত্ব নির্ণয় কর এবং নদী পার হতে কত সময় লাগবে?

(খ) নদীর বিপরীত পাড়ের B বিন্দুতে নৌকাটিকে সরাসরি পৌঁছাতে হলে মাঝির কী ব্যবস্থা নিতে হবে?

[ঢা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০১৫]

(ক) নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ $= v_b \sin 37° = 10 \sin 37° = 6.02\ \text{ms}^{-1}$

নদী পার হতে সময় লাগবে,

$$t = \frac{d}{6.02} = \frac{36}{6.02} = 5.98\ \text{sec}$$

চিত্র অনুযায়ী, $\sin 37° = \frac{AB}{AC} = \frac{36}{AC}$

বা, $AC = \frac{36}{\sin 37°} = 59.82\ \text{m}$

ABC সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

বা, $BC^2 = AC^2 - AB^2 = (59.81)^2 - (36)^2$

বা, $BC^2 = 2281.2$

$\therefore$ $BC = 47.776\ \text{m}$

(খ) নৌকাটিকে A থেকে সরাসরি B বিন্দুতে পৌঁছাতে হলে নৌকা ও স্রোতের বেগের লব্ধি এবং স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হতে হবে। নৌকা ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ α হলে আমরা পাই,

$$\tan 90° = \frac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$$

বা, $\dfrac{\sin 90°}{\cos 90°} = \dfrac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$

বা, $v_r + v_b \cos\alpha = 0$

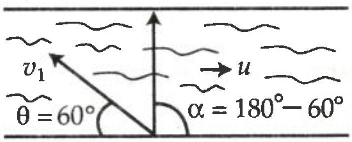
বা, $\cos\alpha = \dfrac{-v_r}{v_b}$

$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-v_r}{v_b}\right) = \cos^{-1}\left(-\dfrac{3}{10}\right)$

$= \cos^{-1}(-0.3) = 107.45°$

সুতরাং A থেকে B বিন্দুতে সরাসরি পৌঁছাতে হলে নৌকাটিকে স্রোতের দিকের সাথে $107.45°$ কোণে চালনা করতে হবে।

৭। 1 km প্রস্থের একটি নদী পার হওয়ার জন্য দুজন সাঁতারু সাঁতার প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করে। প্রথম সাঁতারু 6 kmh⁻¹ বেগে স্রোতের প্রতিকূলে 60° কোণে এবং দ্বিতীয় সাঁতারু 6 kmh⁻¹ বেগে আড়াআড়িভাবে সাঁতার কাটা শুরু করে। নদীতে স্রোতের বেগ 3 kmh⁻¹।



(ক) প্রথম সাঁতারুর লব্ধি বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উক্ত প্রতিযোগিতায় কোন সাঁতারু আগে নদী পার হতে পারবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[ঢা. বো. ২০২৩]

(ক) উদ্দীপক অনুযায়ী নদীর প্রস্থ, $d = 1$ km

প্রথম সাঁতারুর বেগ, $v_1 = 6$ kmh^{-1}

দ্বিতীয় সাঁতারুর বেগ, $v_2 = 6$ kmh^{-1}

স্রোতের প্রতিকূলের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 60°$

স্রোতের বেগ, $u = 3$ kmh^{-1}

সাঁতারু ও স্রোতের মধ্যবর্তী লব্ধিবেগ, $\alpha = 180° - 60° = 120°$

প্রথম সাঁতারুর লব্ধিবেগ,

$$R = \sqrt{u^2 + v_1^2 + 2uv\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + 2\cdot(3)(6) \times \cos 120°}$$
$$= \sqrt{36 + 9 - 18}$$

$\therefore \quad R = 3\sqrt{3}$ kmh^{-1} = 5.196 kmh^{-1}

(খ) প্রথম সাঁতারুর ক্ষেত্রে,

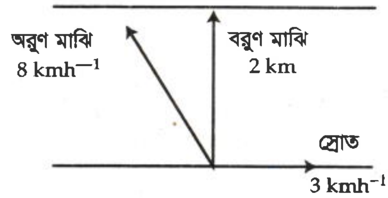
প্রয়োজনীয় সময়, $t_1 = \dfrac{d}{v_1 \sin\alpha} = \dfrac{1}{6\sin 120°} = 0.19$ h

দ্বিতীয় সাঁতারুর ক্ষেত্রে,

প্রয়োজনীয় সময়, $t_2 = \dfrac{d}{v_2 \sin\alpha} = \dfrac{1}{6\sin 90°} = 0.166$ h

সুতরাং দেখা যায় যে, $t_2 < t_1$, $\therefore$ উক্ত প্রতিযোগীতায় ২য় সাঁতারু আগে নদী পার হতে পারবে।

৮। অরুণ মাঝি $8\ kmh^{-1}$ বেগে নৌকা চালিয়ে নদীর প্রস্থ বরাবর পার হয়। বরুণ মাঝি একই বেগে নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকা চালায়। নদীর প্রস্থ 2 km।



(ক) উদ্দীপকে অরুণ মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হয়েছিল?

(খ) উদ্দীপকের কোন মাঝি কম সময়ে নদী পার হবে? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০২২]

(ক) অরুন মাঝি স্রোতের সাথে α কোণে নৌকা চালাতে হবে। নৌকার বেগ $v = 8\ kmh^{-1}$, স্রোতের বেগ $u = 3\ kmh^{-1}$

আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

$\therefore \quad \tan 90° = \dfrac{8 \sin\alpha}{3 + 8\cos\alpha}$

$\dfrac{1}{0} = \dfrac{3\sin\alpha}{3 + 8\cos\alpha}$

বা, $3 + 8\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{3}{8}$

বা, $\alpha = \cos{-1}\left(-\dfrac{3}{8}\right)$

$\therefore \quad \alpha = 112{\cdot}024°$

অর্থাৎ স্রোতের সাথে $112{\cdot}024°$ কোণে নৌকা চালাতে হবে।

(খ) অরুন মাঝির নদী পার হওয়ার সময়,

$t_1 = \dfrac{d}{v\sin\alpha}$

$= \dfrac{2}{8\sin 112{\cdot}0243°}$

$\therefore \quad t_1 = 16{\cdot}18$ min

এখানে,
দূরত্ব, $d = 2$ km
$\alpha = 112{\cdot}043°$
নৌকার বেগ, $v = 8\ kmh^{-1}$

বরুন মাঝির নদী পার হওয়ার সময়,

$t_2 = \dfrac{d}{v\sin\alpha} = \dfrac{2}{8\sin(90°)}$

$= \dfrac{2}{8} = 0{\cdot}25$ h

$\therefore \quad t_2 = 15$ min

এখানে,
দূরত্ব, $d = 2$ km
$\alpha = 90°$
নৌকার বেগ, $v = 8\ kmh^{-1}$

এখানে, $t_1 > t_2$, অর্থাৎ বরুন মাঝি কম সময়ে নদী পার হবে।

৯। $\vec{P} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - m\hat{k}$; $\vec{Q} = \hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$; এখানে $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ পরস্পর লম্ব। যদি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর মান যথাক্রমে নৌকা এবং একটি নদীর স্রোতের দ্রুতি নির্দেশ করে তবে সর্বনিম্ন পথে নদী পার হতে নৌকাটির 2 মিনিট সময় লাগে।

(ক) 'm'-এর মান হিসাব কর।

(খ) যদি নৌকার মাঝি ন্যূনতম সময়ে নদী পার হতে চায় তবে সে নদীর প্রস্থ অপেক্ষা বেশি দূরত্ব অতিক্রম করবে কি না—গাণিতিক পদ্ধতির সাহায্যে ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০২৩; দি. বো. ২০২৩; ম. বো. ২০২৩]

(ক) আমরা জানি, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ পরস্পর লম্ব হলে $\vec{P} \cdot \vec{Q} = 0$ হবে।

$\therefore \quad \vec{P}.\vec{Q} = (5\hat{i} + 3\hat{j} - m\hat{k}).(\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$

বা, $5 + 3 - 4 = 0$

বা, $m = 2$

অর্থাৎ $m = 2$ হলে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর লম্ব হবে।

(খ) এখানে নৌকার বেগ,

$$\vec{V}_P = 5\hat{i} + 3\hat{j} - m\hat{k} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} \qquad \Big|\; m = 2$$

$\therefore \quad |\vec{V}_P| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2 + (-2)^2}$

$V_P = \sqrt{38} = 6{\cdot}16$ একক

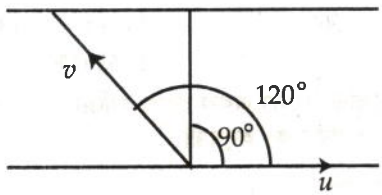
স্রোতের বেগ,

$\vec{V}_Q = \hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{V}_Q| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{1 + 1 + 16}$

$\therefore \quad V_Q = 4{\cdot}24$ একক



সর্বনিম্ন পথ নদী পার হতে নৌকাটির 2 মিনিট সময় লাগে, সেক্ষেত্রে $\theta = 90°$ হয়। ধরি, নৌকার মাঝি সর্বনিম্ন পথে নদী পার হতে স্রোতের সাথে α কোণে যাত্রা শুরু করতে হবে,

$$\tan\theta = \frac{v_P \sin\alpha}{v_Q + v_P\cos\alpha}$$

বা, $\tan 90° = \dfrac{v_P \sin\alpha}{v_Q + v_P\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{v_P \sin\alpha}{v_Q + v_P\cos\alpha}$

বা, $v_Q + v_P\cos\alpha = 0$

$\therefore \quad \cos\alpha = -\dfrac{v_Q}{v_P} = \left(-\dfrac{4{\cdot}24}{6{\cdot}16}\right)$

$\therefore \quad \alpha = 133{\cdot}49°$

আবার, কম সময়ে (t) নদী পার হতে হলে এবং নদীর প্রস্থ (d) হলে,

$$t = \frac{d}{v_P \sin\alpha}$$

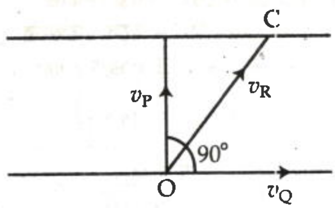
$\therefore \quad d = t\, v_P \sin\alpha \qquad \Big|\; t = 2h = 2 \times 60$ m

$= 2 \times 60 \times 6{\cdot}16 \sin 133{\cdot}49°$

$= 536{\cdot}58$ m

আবার, ন্যূনতম সময়ে নৌকাটি নদী পার হতে হলে স্রোতের সাথে $\alpha' = 90°$ কোণে যাত্রা করতে হবে।

এক্ষেত্রে নৌকার লব্ধি বেগ,



$$R = \sqrt{v_P^2 + v_Q^2 + 2v_P \times v_Q \cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(6{\cdot}16)^2 + (4{\cdot}24)^2 + 2 \times 6{\cdot}16 \times 4{\cdot}24 \cos 90°}$$

$= 7{\cdot}4782\ ms^{-1}$

এবং সময়, $t_1 = \dfrac{d}{v_P \sin\alpha} = \dfrac{536{\cdot}58}{6{\cdot}16 \sin 90°} = 87{\cdot}055$ sec

এক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব, OC $= R \times t_1 = 7{\cdot}4782 \times 87{\cdot}055 = 650{\cdot}96$ m

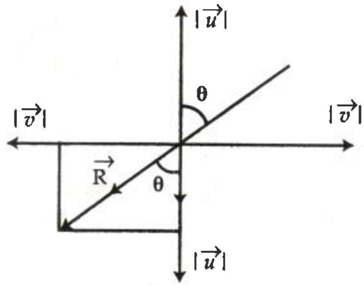
গাণিতিক বিশ্লেষণে দেখা যায়, OC $> d$। অর্থাৎ নৌকার মাঝি ন্যূনতম সময়ে নদী পার হতে চাইলে নদীর প্রস্থ অপেক্ষা বেশি দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে।

১০। একটি গাড়ির পেছনের গ্লাস ছাদের সাথে 30° কোণে হেলানো। গাড়িটি $\vec{v} = 18\hat{i}$ বেগে একটি রাস্তায় চলছিল। হঠাৎ বৃষ্টি $\vec{u} = -12\hat{j}$ বেগ পড়া শুরু হলো।

(ক) গাড়ির সামনের গ্লাসে বৃষ্টি কত বেগে পড়বে?

(খ) উদ্দীপকের গাড়ির পেছনের গ্লাস বৃষ্টিতে ভিজবে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

[ঢা. বো. ২০২৩]



(ক) দেওয়া আছে, গাড়ির বেগ, $\vec{v} = 18\hat{i}$

$v = |\vec{v}| = |18\hat{i}| = 18$ একক

বৃষ্টির বেগ, $\vec{u} = -12\hat{j}$

$u = |\vec{u}| = |-12\hat{j}| = 12$ একক

$\therefore$ বৃষ্টির লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 90°}$

$= \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(18)^2 + (12)^2}$

$= 21.63$ একক

অর্থাৎ বৃষ্টি 21.63 একক বেগে গাড়ির সামনের গ্লাসে পড়বে।

(খ) উদ্দীপক (ক) অনুযায়ী,

গাড়ির বেগ, $\vec{v} = 18\hat{i}$

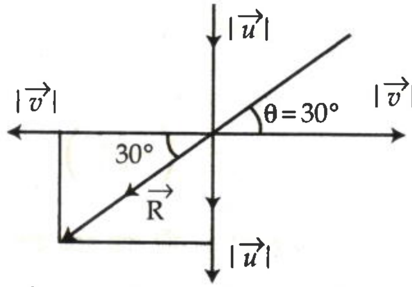
$v = |\vec{v}| = |18\hat{i}| = 18$ একক

বৃষ্টির বেগ, $\vec{u} = -12\hat{j}$

$u = |\vec{u}| = |-12\hat{i}| = 12$ একক

গাড়ির পেছনের গ্লাসের সাথে θ = 30° কোণে হেলবে।

গাড়ির উপর বৃষ্টি যদি 30° কোণ অপেক্ষা বেশি কোণে পড়ে, তখনই পেছনের কাচ ভিজবে।



আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{|\vec{u}|\sin\alpha}{|\vec{v}| + |\vec{u}|\cos\alpha}$

$\tan\theta = \dfrac{12\sin\alpha}{18 + 12\cos 90°} = \dfrac{12}{18}$

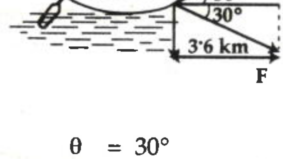
$\therefore \theta = \tan^{-1}\dfrac{12}{18}$ $\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{12}{18}\right)$

$\therefore \theta = 33.69°$

১১। কানন ও রাজন স্থির পানিতে 500 kg ভরের একটি স্থির নৌকাকে নদীর দুই তীর থেকে দড়ি দিয়ে 30° কোণে টানছে। নৌকাটি 5 মিনিটে তীরের সমান্তরালে 3.6 km পথ অতিক্রম করে। 5 মিনিটে গন্তব্যস্থলে পৌঁছাবার জন্য দুইজনে সমান টানে নৌকাটিকে টানতে লাগল। (ঘর্ষণ বল উপেক্ষণীয়)

(ক) দড়ির টানের মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত সময়ে গন্তব্যস্থলে পৌঁছানো সম্ভব কি না?—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে দেখাও।



(ক) টানা বল F হলে এক্ষেত্রে দুটি উপাংশের যোগফল,

$F\cos\theta + F\cos\theta = ma$

বা, $2F\cos\theta = m \times \dfrac{2s}{t^2}$

$\therefore F = \dfrac{m \times 2s}{t^2 \times 2\cos\theta}$

$= \dfrac{500 \times 2 \times 3.6 \times 10^3}{(300)^2 \times 2\cos 60°} = 40\text{ N}$

এখানে,

$\theta = 30°$

দূরত্ব, $s = 3.6\text{ km}$

$= 3.6 \times 10^3\text{ m}$

$t = 5 \times 60 = 300\text{ s}$

নৌকার ভর, $m = 500\text{ kg}$

টান, $F = ?$

(খ) টান সমান হলে মোট টানা বল,

$F + F = ma$

বা, $2F = ma = m \times \frac{2s}{t^2}$

বা, $t^2 = \frac{2 \times 500 \times 3{\cdot}6 \times 10^3}{2 \times 40} = 45 \times 10^3$

$\therefore$ $t = 2{\cdot}12 \times 10^2$ s = 3 min. 32 s

এখানে $t < 5$ min

অতএব তারা উক্ত সময়ে গন্তব্যস্থলে পৌঁছাতে পারবে।

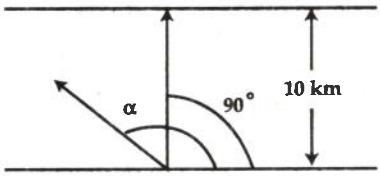
এখানে,

$s = vt + \frac{1}{2}at^2$

বা, $s = \frac{1}{2}at^2$ $[\because v = 0]$

$\therefore$ $a = \frac{2s}{t^2}$

১২।



10 km প্রস্থবিশিষ্ট একটি নদীতে স্রোতের বেগ 5 kmh^{-1}। প্রথম মাঝি 10 kmh^{-1} বেগে নৌকা চালিয়ে স্রোতের সাথে α কোণে এবং দ্বিতীয় মাঝি 10 kmh^{-1} বেগে স্রোতের সাথে লম্বভাবে নৌকা চালিয়ে নদী পার হতে যাত্রা করল।

(ক) α কোণের মান কত হলে প্রথম মাঝি সোজাসুজি নদীর অপর পাড়ে পৌঁছাবে ?

(খ) কোন মাঝি নদীর অপর পাড়ে আগে পৌঁছাতে পারবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।

[ঢা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০২১; রা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন)]

(ক) ধরি স্রোতের বেগ, $u = 5$ kmh^{-1}

১ম মাঝির বেগ, $v_1 = 10$ kmh^{-1}; নৌকাটি স্রোতের সাথে α কোণে যাত্রা করছে।

২য় মাঝির বেগ, $v_2 = 10$ kmh^{-1}; নৌকাটি স্রোতের সাথে 90° কোণে যাত্রা করছে।

নদীর প্রস্থ, $d = 10$ km

এখন, স্রোতের গতি বরাবর v_2-এর অংশ, $v_2 \cos 90° = 0 = u \cos 0° + v_1 \cos \alpha$

বা, $v_1 \cos \alpha = -u$ $\therefore \cos \alpha = -\frac{u}{v_1} = -\frac{5}{10} = -0{\cdot}5$

$\therefore$ $\alpha = 120°$

অর্থাৎ, α = 120° হলে প্রথম মাঝি সোজাসুজি নদীর অপর পাড়ে পৌঁছাবে।

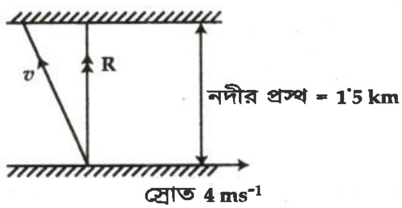
(খ) ২য় মাঝির নদী পার হতে সময় লাগে, $t_1 = \frac{d}{v_2} = \frac{10}{10} = 1$ hr

নদীর প্রস্থ বরাবর ১ম মাঝির বেগের উপাংশ $= v_1 \sin \alpha = v_1 \sin 120° = 10 \times 0{\cdot}866 = 8{\cdot}66$ kmh^{-1}

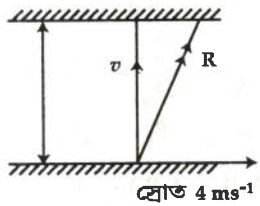
$\therefore$ ১ম মাঝির নদী পার হতে সময় লাগে, $t_2 = \frac{d}{v_1 \sin \alpha} = \frac{10}{8{\cdot}66} = 1{\cdot}15$ hr

অর্থাৎ, ২য় মাঝি নদীর অপর পাড়ে আগে পৌঁছাবে।

১৩।



চিত্র ক



চিত্র খ

উভয় চিত্রে v = নৌকার বেগ = 6 ms^{-1}

R = লব্ধি বেগ

(ক) চিত্র 'ক' থেকে লব্ধি বেগ R নির্ণয় কর।

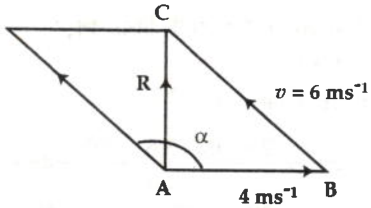
(খ) কোন চিত্রানুসারে নদী পার হতে কম সময় লাগবে ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[দি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন) কু. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০২১]

(ক) এখানে, $BC^2 = AC^2 + AB^2$

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

$\therefore$ $AC = R = \sqrt{20} = 4{\cdot}47$ ms^{-1}



(খ) v-এর x-অক্ষ বরাবর অংশ $= v\cos\alpha$

এবং y -অক্ষ বরাবর অংশ $= v\sin\alpha$

$R\cos 90° = 0 = u\cos 0° + v\cos\alpha = u + v\cos\alpha$

বা, $v\cos\alpha = -u$

$\therefore \quad \cos\alpha = -\frac{u}{v} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} = -0{\cdot}667$

$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}(-0{\cdot}667) = 131{\cdot}9°$

আবার, $R = v\sin\alpha = 6 \times \sin(131{\cdot}9°) = 6 \times 0{\cdot}744 = 4{\cdot}47$ ms^{-1}

$$\therefore \quad t_1 = \frac{d}{R} = \frac{1{\cdot}5 \text{ km}}{4{\cdot}47 \text{ ms}^{-1}} = \frac{1{\cdot}5 \times 1000}{4{\cdot}47} \text{ s} = 335{\cdot}57 \text{ s} = 5 \text{ min } 35\text{s}$$

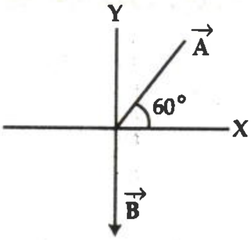
এবং $t_2 = \frac{d}{v} = \frac{1{\cdot}5}{6} \times 1000 = \frac{1500}{6} = 250\text{s} = 4 \text{ min.} 10\text{s}$

সুতরাং, ২য় চিত্র অনুসারে নদী পার হতে কম সময় লাগবে।

১৪। চিত্রে $|\vec{A}| = 5$ এবং $|\vec{B}| = 6$

(ক) $|\vec{A} - \vec{B}|$-এর মান কত ?

(খ) $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এর ওপর লম্বভাবে অবস্থিত—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে এর সত্যতা যাচাই কর। [ঢা. বো. ২০১৬]



(ক) আমরা জানি, $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

এখানে, $\vec{A}$ এবং $-\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90 - 60° = 30°$

$|\vec{A}| = 5$, $|\vec{B}| = 6$

এখন সামন্তরিকের সূত্রানুসারে,

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{5^2 + 6^2 + 2 \times 5 \times 6\cos 30°} = 10{\cdot}63$$

(খ) আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

সুতরাং $(\vec{A} \times \vec{B})$ এবং $(\vec{A} + \vec{B})$-এর স্কেলার গুণফল অর্থাৎ $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$ শূন্য হয় তবে $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$-এর ওপর লম্ব হবে।

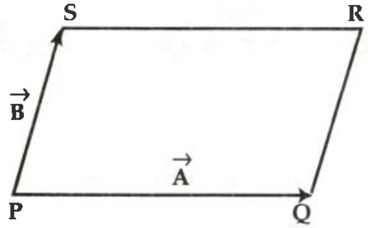
$$\vec{A} + \vec{B} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

এখন $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = (A_yB_z - A_zB_y)(A_x + B_x) + (A_zB_x - A_xB_z)(A_y + B_y)$
$$+ (A_xB_y - A_yB_x)(A_z + B_z)$$
$$= A_xA_yB_z - A_xA_zB_y + A_yB_xB_z - A_zB_xB_y + A_yA_zB_x - A_xA_yB_z + A_zB_xB_y$$
$$- A_xB_yB_z + A_xA_zB_y - A_yA_zB_x + A_xB_yB_z - A_yB_xB_z$$
$= 0$ (প্রমাণিত)

অর্থাৎ $\vec{A} \times \vec{B}$ ভেক্টরটি $\vec{A} + \vec{B}$-এর ওপর লম্বভাবে অবস্থিত।

১৫। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$



(ক) $\vec{B}$ ও $\vec{A}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের ভেক্টর তিনটি সমতলীয় কি না ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[কু. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০২১; দি. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন)]

(ক) আমরা জানি, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $\vec{B} \times \vec{A}$

$$\therefore \quad \vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(6-16) - \hat{j}\,(6-8) + \hat{k}\,(12-6) = -10\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{B} \times \vec{A}| = \sqrt{(-10)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{100 + 4 + 36} = \sqrt{140} = 11{\cdot}83$$

(খ) তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত হলো,

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$$

$$\therefore \quad \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(3-8) - \hat{j}\,(3-4) + \hat{k}\,(6-3) = -5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

এখন, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}).(-5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = -10 + 4 + 6 = 0$

সুতরাং, ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

১৬। নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর :

$p(x, y, z) = 2xy^4 - x^2z$ একটি স্কেলার রাশি, $\vec{A} = (2x + y)\hat{i} + (3y + z^2)\hat{j} + (-5z + x)\hat{k}$ একটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{B} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ অপর একটি ভেক্টর রাশি।

(ক) $(2, -1, -2)$ বিন্দুতে p-এর গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যে কোনটি সলিনয়ডাল এবং কোনটি অঘূর্ণনশীল তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর। [সি. বো. ২০২২]

(ক) $p(x, y, z) = 2xy^4 - x^2z$

আমরা জানি, গ্রেডিয়েন্ট,

$$\text{grad}\, p = \vec{\nabla} p = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial_z}\right)p$$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial_z}\right).(2xy^4 - x^2z)$$

$$= \hat{i}(2y^4 + 6xy^3 - 2xz) + \hat{j}(8xy^3) + \hat{k}(-x^2)$$

$(2, -1, -2)$ বিন্দুতে,

$$\vec{\nabla} p = \hat{i}\{2 \times (-1)^4 + 6 \times 2 \times (-1)^3 - 2 \times 2 \times (-2)\} + \hat{j}\{8 \times 2 \times (-1)\} + \hat{k}(-2)^2$$

$$= \hat{i}\,(2 - 12 + 8) - 16\hat{j} + 4\hat{k} = -2\hat{i} - 16\hat{j} + 4\hat{k}$$

(খ) $\vec{A} = (2x + y)\hat{i} + (3y + z^2)\hat{j} + (-5z + x)\hat{k}$

$\vec{B} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$

আমরা জানি, কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে, অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হলে ওই ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হয়।

এখন,

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial_x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial_y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial_z}\hat{k}\right).(2x + y)\hat{i} + (3y + z^2)\hat{j} + (-5z + x)\hat{k}$$
$$= 2 + 3 - 5 = 0$$

সুতরাং $\vec{A}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল।

আবার, $$\vec{\nabla}.\vec{B} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial_z}\right).(6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$$
$$= 6y + 0 + 6z \neq 0$$

সুতরাং $\vec{B}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল নয়।

আবার, আমরা জানি, কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হয়।

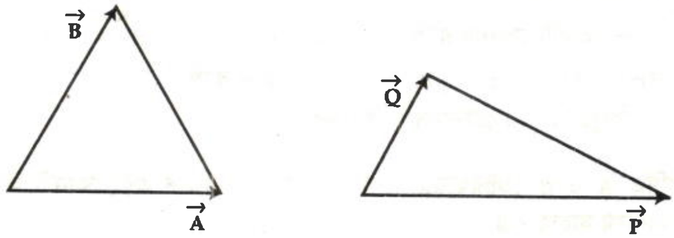
এখানে, $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ 6xy + z^3 & 3x^2 - z & 3xz^2 - y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial_y}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial_z}(3x^2 - z)\right\}$$
$$- \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial_x}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial_z}(6xy + z^3)\right\}$$
$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial_x}(3x^2 - z) - \frac{\partial}{\partial_y}(6xy + z^3)\right\}$$

$$= \hat{i}\{-1 + 1\} - \hat{j}(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}(6x - 6x)$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

সুতরাং, $\vec{B}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।

১৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{3}\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় অপর একটি ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে, যেখানে $\vec{P} = 3\vec{A}$ এবং $\vec{Q} = \frac{1}{2}\vec{B}$।



(ক) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে কোনটি অধিক জায়গা দখল করবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি,

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{(2\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{3}\hat{k}).(\sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{4 + 2 + 3} \times \sqrt{3 + 9 + 4}} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{9} \times \sqrt{16}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{12} = \frac{6{\cdot}93 + 4{\cdot}24}{12} = \frac{11{\cdot}17}{12} = 0{\cdot}93$$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}(0{\cdot}93) = \cos 21{\cdot}5°$

$\therefore \quad \theta = 21{\cdot}5°$

(খ) আবার, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\ |\vec{A}\times\vec{B}|$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 3 & -2\end{vmatrix}=\hat{i}\,(-2\sqrt{2}+3\sqrt{3})-\hat{j}\,(-4+3)+\hat{k}\,(6-\sqrt{6})$$
$$=\hat{i}\,(-2.83+5.2)+\hat{j}+3.55\,\hat{k}$$
$$=2.37\,\hat{i}+\hat{j}+3.55\,\hat{k}$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\,|\vec{A}\times\vec{B}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{5.62+1+12.6}=2.19$$

আবার, $\vec{P}=3\vec{A}=3(2\hat{i}+\sqrt{2}\hat{j}-\sqrt{3}\hat{k})$; $\vec{Q}=\frac{1}{2}\vec{B}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})$

$$=6\,\hat{i}+3\sqrt{2}\hat{j}-3\sqrt{3}\hat{k};\quad \vec{Q}=\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-\hat{k}$$

$$\therefore\ \vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 6 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & -1\end{vmatrix}$$

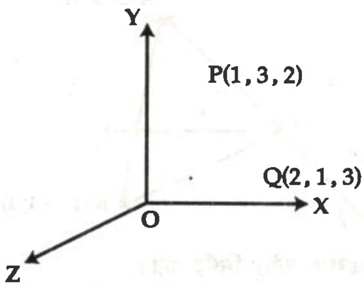
$$=\hat{i}\left(-3\sqrt{2}-\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)-\hat{j}\left(-6+\frac{9}{2}\right)+\hat{k}\left(9-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\hat{i}\,(-4.24-7.79)+\hat{j}(6-4.5)+\hat{k}\,(9-3.67)$$
$$=\hat{i}\,(-12.03)+\hat{j}\times1.5+\hat{k}\times5.33$$

$$\frac{1}{2}\,|\vec{P}\times\vec{Q}|=\frac{1}{2}\times(144.7+2.25+28.4)=87.68$$

$\frac{1}{2}\,|\vec{P}\times\vec{Q}|$ বেশি জায়গা দখল করে।

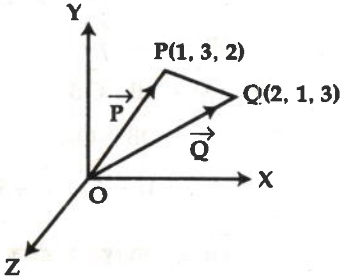
১৮।



চিত্রের P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$

(ক) ΔOPQ-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) $\vec{P}+\vec{Q}$ ও $\vec{P}-\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় + Y-অক্ষের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে কি না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [দি. বো. ২০২২]



(ক) ΔOPQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\vec{OP}\times\vec{OQ}$

$$\vec{OP}=\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$$
$$\vec{OQ}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$$

$\therefore\ A = \frac{1}{2} \times (\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \{\hat{i}(9-2) - \hat{j}(3-4) + \hat{k}(1-6)\} = \frac{1}{2}(7\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k})$

বা, $A = \frac{1}{2} \times (7\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k})$

(খ) এখন, $\vec{P} + \vec{Q} = (\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$

+ Y-অক্ষের সঙ্গে উৎপন্ন কোণ,

$$\cos\theta_1 = \frac{(3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}).4\hat{j}}{\sqrt{9+16+25} \times \sqrt{16}} = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{50}} = \frac{4}{5\sqrt{2}} = 0.5658$$

$\therefore\ \theta_1 = \cos^{-1}(0.5658) = 55.5°$

আবার, $\vec{P} - \vec{Q} = (\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) - (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

+ Y-অক্ষের সঙ্গে উৎপন্ন কোণ,

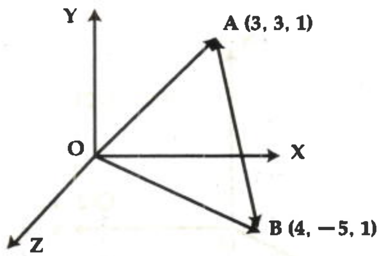
$$\cos\theta_2 = \frac{(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).2\hat{j}}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{4}} = \frac{4}{2\sqrt{6}} = 0.816$$

$\therefore\ \theta_2 = \cos^{-1}(0.816) = 35.3°$

এখানে, $\theta_1 \neq \theta_2$

সুতরাং, $\vec{P} + \vec{Q}$ ও $\vec{P} - \vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় + Y-অক্ষের সঙ্গে সমান কোণ উৎপন্ন করবে না।

১৯। নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর যেখানে ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় A(3, 3, 1) এবং B(4, — 5, 1) দুটি বিন্দু।



(ক) $\vec{AB}$-এর সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(খ) O, A ও B বিন্দুসমূহের সংযোগে গঠিত ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও।

[সি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০২১; ম. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন)]

(ক) এখানে $\vec{OA} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{OB} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k}$

এখন, $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

বা, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$= 4\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} - 3\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k} = \hat{i} - 8\hat{j}$

$\therefore\ \vec{AB}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{\hat{i} - 8\hat{j}}{\sqrt{1+64}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{65}} - \frac{8}{\sqrt{65}}\hat{j}$

(খ) OA, OB, AB বাহু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ হলে যেকোনো দুটি বাহুর মধ্যবর্তী কোণ 90° হবে অর্থাৎ এদের ডটগুণন শূন্য হবে।

এখন, $\vec{OA}.\vec{AB} = (3\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-8\hat{j}) = 3-24 = -21$

আবার, $\vec{OA}.\vec{OB} = (3\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}).(4\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}) = 12-15+1 = -2$

এবং $\vec{OB}.\vec{AB} = (4\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-8\hat{j}) = 4+40 = 44$

কোনোটিরই ডট গুণন শূন্য নয়। সুতরাং O, A ও B বিন্দুসমূহের সংযোগে গঠিত ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ নয়।

২০। একদিন একটি অঞ্চলের তাপমাত্রা ও বাতাসের বেগ পাওয়া গেল যথাক্রমে,

$\theta = 2xy^2z^3 - 4xy$ ও $\vec{v} = (y^2\cos x + z^3)\hat{i} + (2y\sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2+2)\hat{k}$

(ক) (1, −1, 2) বিন্দুতে ওই অঞ্চলের তাপমাত্রার গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় কর।

(খ) ওই দিন ওই অঞ্চলের বাতাসে কোনো ঘূর্ণন ছিল কি না তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মত দাও।

[চ. বো. ২০২২]

(ক) তাপমাত্রার গ্রেডিয়েন্ট $= \nabla\theta$

$$\therefore \quad \nabla\theta = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial_x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial_y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial_z}\right)(2xy^2z^3 - 4xy)$$

$$= (2y^2z^3 - 4y)\hat{i} + (4xyz^3 - 4x)\hat{j} + \hat{k}(6xy^2z^2)$$

(1, − 1, 2) বিন্দুতে গ্রেডিয়েন্ট

$$= \{2(-1)^2.(2)^3 - 4(-1)\}\hat{i} + \{4(1)(-1).(2)^3 - 4(1)\}\hat{j} + \{6(1)^2(-1)^2(2)^2\}\hat{k}$$

$$= (16+4)\hat{i} + (-32-4)\hat{j} + 24\hat{k}$$

$$= 20\hat{i} - 36\hat{j} + 24\hat{k}$$

(খ) কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য না হলে ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla}\times\vec{v} \neq 0$ হলে $\vec{v}$ ঘূর্ণনশীল হবে।

এখন, $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ y^2\cos x + z^3 & 2y\sin x - 4 & 2xz^2 + 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial_y}(2xz^2+2) - \frac{\partial}{\partial_z}(2y\sin x - 4)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial_x}(2xz^2+2) - \frac{\partial}{\partial_z}(y^2\cos x + z^3)\right\}$$

$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial_x}(2y\sin x - 4) - \frac{\partial}{\partial_y}(y^2\cos x + z^3)\right\}$$

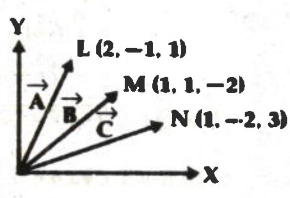
$$= \hat{i}(0-0) - \hat{j}(2z^2 - 3z^2) + \hat{k}(2y\cos x - 2y\cos x)$$

$$= z^2\hat{j} \neq 0$$

$\because \quad \vec{\nabla}\times\vec{v} \neq 0$

সুতরাং, ওই দিন ওই অঞ্চলের বাতাসে ঘূর্ণন ছিল।

২১।



(ক) $\vec{C}$, X-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণের মান কত ?

(খ) $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকের ভেক্টরটি $\vec{A}$ এর সাথে একই সমতলে অবস্থান করে কি না—গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

[কু. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$\vec{C}$ ভেক্টর X—অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে,

এখানে,

$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\cos\alpha = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4+9}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} = 0{\cdot}26726$$

$\therefore$ $\cos\alpha = 0{\cdot}26726$

$\therefore$ $\alpha = \cos^{-1}(0{\cdot}26726) = 74{\cdot}5°$

(খ) আমরা জানি, দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি যার দিক ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে।

ধরি, $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{C}$

এখানে,

$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(3-4) + \hat{j}\,(-2-3) + \hat{k}\,(-2-1)$$

$$= -\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

এখন, $\vec{D}$ এবং $\vec{A}$ একই সমতলে থাকবে যদি ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

অর্থাৎ তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়।

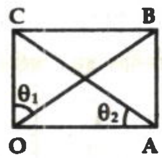
এখন, $\vec{D}\,.\,\vec{A} = D_xA_x + D_yA_y + D_zA_z$

$$= (-1)\times 2 + (-5)\times(-1) + (-3)\times 1$$

$$= -2 + 5 - 3 = 0$$

যেহেতু $\vec{D}$ এবং $\vec{A}$ পরস্পর লম্ব সুতরাং তারা অবশ্যই একই সমতলে অবস্থিত।

২২।



উপরের চিত্র অনুযায়ী OABC একটি আয়তক্ষেত্র। এর OA এবং OB বাহু দ্বারা দুটি ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ নির্দেশিত হয়েছে।

(ক) উদ্দীপক অনুসারে ΔOAB-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুসারে θ_1 ও θ_2-এর মধ্যে কোনটি বড়ো তা গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে বের কর।

[য. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) দেওয়া আছে,

OA বাহু দ্বারা নির্দেশিত ভেক্টর, $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

এবং OB বাহু দ্বারা নির্দেশিত ভেক্টর, $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(-4-3) - \hat{j}\,(2+2) + \hat{k}\,(-3+4)$$

$$= -7\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$$

$\therefore$ $|\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{66}$

$\therefore$ ΔOAB-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times |\vec{P} \times \vec{Q}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{66} = 4{\cdot}062$ বর্গ একক

(খ) আমরা ওপরের (ক) থেকে পাই,

$|\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{66}$

বা, $PQ \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $(\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (2)^2}) \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $(\sqrt{6} \times \sqrt{17}) \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $\sqrt{102} \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{66}}{\sqrt{102}}$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{66}}{\sqrt{102}}\right) = \sin^{-1}(0{\cdot}804) = 53{\cdot}55°$

$\therefore$ OA এবং OB-এর অন্তর্গত কোণ, $\theta = 53{\cdot}55°$

$\because$ OABC একটি আয়তক্ষেত্র,

$\therefore \angle AOC = 90°$

$\therefore \theta_1 = 90° - \theta = 90° - 53{\cdot}55°$

$\boxed{\theta_1 = 36{\cdot}45°}$

আবার, ΔAOC এবং ΔOAB সর্বসম

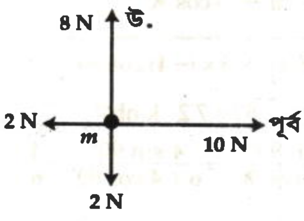
অতএব, $\angle AOB = \angle OAC$

$\therefore \theta_2 = \theta$

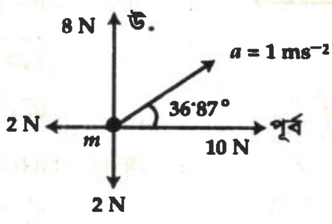
$\therefore \boxed{\theta_2 = 53{\cdot}55°}$

যেহেতু $\theta_2 > \theta_1$, তাই θ_1 অপেক্ষা θ_2 বড়ো।

২৩। m = (10 kg) ভরের একটি বস্তুর ওপর একই সময়ে চারটি বল ক্রিয়া করছে যা ১নং চিত্রে দেখানো হলো—



চিত্র ১

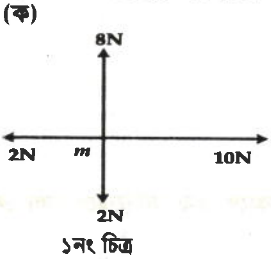


চিত্র ২

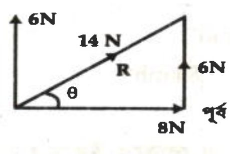
(ক) ১নং চিত্রে বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল নিট বলের মান কত?

(খ) ১নং চিত্রের আলোকে ২নং চিত্রের সঠিকতা যাচাই কর। [সি. বো. ২০২১]

(ক)



১নং চিত্র



১(ক)নং চিত্র

এখানে,
পূর্ব দিকের বল = 10 N
পশ্চিম দিকের বল = 2N
উত্তরদিকের বল = 8N
দক্ষিণদিকের বল = 2N

সুতরাং নিট বল, $\vec{R}$ = 10N — 2N + 8N — 2N = 8N + 6N = 14N উত্তর-পূর্ব কোণে [$\because$ পূর্ব ও পশ্চিম দিক এবং উত্তর ও দক্ষিণ দিক পরস্পর বিপরীতমুখী]

$\vec{R}$-এর মান, $R = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10N$

(খ) আমরা জানি বল,

$\vec{F} = m\vec{a}$

বা, $F = ma$

$\therefore a = \frac{F}{m} = \frac{10}{10} = 1\ ms^{-2}$

এখানে,

$m = 10\ kg$

$a = 1\ ms^{-2}$

$\vec{F} = 14N$ উত্তর-পূর্ব দিকে

আমরা জানি,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q \sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}\right)$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{6 \sin 90°}{8 + 6 \times 0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right)$$

$$= \tan^{-1}(0{\cdot}75) = 36{\cdot}87°$$

এখানে,

$\alpha = 90°$

$Q = 6N$

$P = 8N$

সুতরাং, ১ম চিত্রের আলোকে ২য় চিত্র সঠিক।

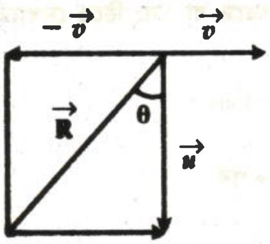
২৪। কোনো এক বৃষ্টির দিনে নাফিসা জানালার পাশে দাঁড়িয়ে দেখছিল বৃষ্টি উল্লম্বভাবে $6\ kmh^{-1}$ বেগে পতিত হচ্ছে। নাফিসা লক্ষ করল, রাস্তায় একজন লোক $4 kmh^{-1}$ বেগে হাঁটছে এবং অপর একজন লোক $8\ kmh^{-1}$ বেগে সাইকেলে যাচ্ছে। তাদের উভয়ের ছাতা ভিন্ন ভিন্ন কোণে বাঁকাভাবে ধরা।

(ক) উদ্দীপকে হেঁটে চলা লোকটির সাপেক্ষে পড়ন্ত বৃষ্টির লব্ধি বেগ কত ?

(খ) হেঁটে চলন্ত লোকটির এবং সাইকেলে চলন্ত লোকটির ছাতা একই রকমভাবে বাঁকানো নয়—নাফিসার পর্যবেক্ষণটি গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) মনে করি বৃষ্টির বেগ, $u = 6\ kmh^{-1}$ এবং লোকটির বেগ, $v = 4\ kmh^{-1}$

লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ, $v_r = ?$



সুতরাং লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ v_r হলে,

$$v_r = \sqrt{u^2 + (-v^2) + 2u(-v)\cos 90°}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (-4)^2 + 2 \times 6 \times (-4)\cos 90°}$$

$$= \sqrt{36 + 16 + 0} = \sqrt{52} = 7{\cdot}21\ kmh^{-1}$$

আবার, $\tan\theta = \frac{v \sin 90°}{u + v\cos 90°} = \frac{4 \sin 90°}{6 + 4\cos 90°} = \frac{4}{6}$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = 33{\cdot}69°$$

সুতরাং, লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ $7{\cdot}21\ kmh^{-1}$। এই বেগ উল্লম্বের সাথে $33{\cdot}69°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী,

হেঁটে চলা লোকটির বেগ, $v_1 = 4\ kmh^{-1}$

সাইকেলে চলন্ত লোকটির বেগ, $v_2 = 8\ kmh^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $u = 6\ kmh^{-1}$

মনে করি বৃষ্টি হতে রক্ষার জন্য হেঁটে চলা লোককে উল্লম্বের সাথে θ_1 কোণে এবং সাইকেলে চলা লোকটিকে উল্লম্বের সাথে θ_2 কোণে ছাতা ধরতে হবে।

$$\therefore \tan\theta_1 = \frac{v_1 \sin 90°}{u + v_1\cos 90°} = \frac{4 \sin 90°}{6 + 4\cos 90°} = \frac{4}{6}$$

$$\therefore \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) = 33{\cdot}69°$$

এবং $\tan\theta_2 = \dfrac{v_2 \sin 90°}{u + v_2 \cos 90°} = \dfrac{8 \sin 90°}{6 + 8\cos 90°} = \dfrac{8}{6}$

$\therefore \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{8}{6}\right) = 53.13°$

সুতরাং নাফিসার পর্যবেক্ষণ সঠিক।

২৫। ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে P (1, 2, −1), Q (−2, 1, 1) এবং R (3, 1, −2), যেখানে $\vec{P}$, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করে।

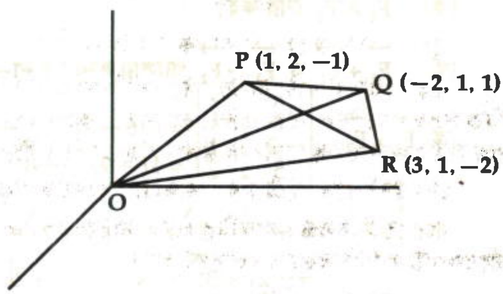
(ক) $\vec{P}$-এর ওপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর।

(খ) P, Q এবং R বিন্দুত্রয়ের ক্রম সংযোজন দ্বারা উৎপন্ন ভেক্টরগুলো দ্বারা গঠিত ক্ষেত্র একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে কি না তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর।

[ম. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১৯]

(ক) প্রশ্নানুসারে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$\overrightarrow{OP} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$



Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$\overrightarrow{OQ} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$\overrightarrow{OR} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{P}$-এর ওপর $\vec{Q}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ $= Q\cos\theta$

আমরা জানি,

$\vec{P}\cdot\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$$\therefore \quad Q\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}|} = \frac{(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})\cdot(-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$= \frac{-2+2-1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} = -0.408$$

(খ) P, Q ও R বিন্দুত্রয় যোগ করে যে ত্রিভুজ PQR গঠিত হয়, তার যেকোনো দুটি বাহুর মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে। কোণ 90° হওয়ার শর্ত হলো ভেক্টর দুটির ডট গুণন শূন্য হবে।

এখন, $\overrightarrow{PQ} = (-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{QR} = (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) - (-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 5\hat{i} - 3\hat{k}$

$\overrightarrow{RP} = (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

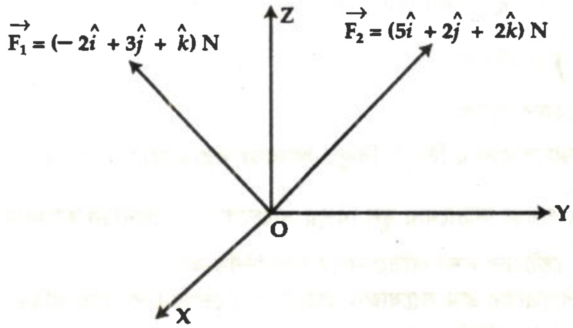
$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR} = (-3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})\cdot(5\hat{i} - 3\hat{k}) = -21$

$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{RP} = (5\hat{i} - 3\hat{k})\cdot(-2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -10 - 3 = -13$

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{PR} = (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})\cdot(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) = 6 - 1 + 2 = 7$

যেহেতু কোনোটিরই ডট গুণন শূন্য নয় অতএব, ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ নয়।

২৬।



চিত্রে $\vec{F_1}$ ও $\vec{F_2}$ বলদ্বয় O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

(ক) $\vec{F_1} \times \vec{F_2}$ বের কর।

(খ) $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ ও $\vec{F_1} - \vec{F_2}$ পরস্পর লম্ব কি না—যাচাই কর। [কু. বো. ২০২১]

(ক) $\vec{F_1} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(6-2) - \hat{j}(-4-5) + \hat{k}(-4-15)$
$= 4\hat{i} + 9\hat{j} - 19\hat{k}$

(খ) $\vec{F_1} + \vec{F_2} = (-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + (5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$
$= -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} + 5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$
$= (3\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k})$N

এবং $\vec{F_1} - \vec{F_2} = (-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - 5\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k} = -7\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

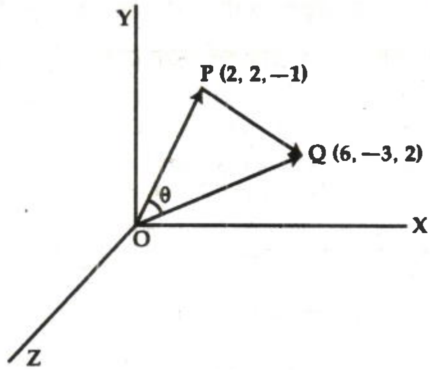
এখন, $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ এবং $\vec{F_1} - \vec{F_2}$ পরস্পর লম্ব হবে যদি,

$(\vec{F_1} + \vec{F_2}).(\vec{F_1} - \vec{F_2}) = 0$

$\therefore \quad (3\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}).(-7\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = -21 + 5 - 3 = -19$

এরা পরস্পর লম্ব নয়।

২৭।



চিত্রে দুটি বিন্দু P ও Q-এর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। $\vec{OP}$ ও $\vec{OQ}$ যথাক্রমে বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করছে।

(ক) $\vec{OP}$ ও $\vec{OQ}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থান করে কি না—গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

[য. বো. ২০২১]

(ক) অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

আমরা জানি,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{PQ}}{|OP||PQ|} = \frac{(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}).(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{(4+4+1)}\times\sqrt{(36+9+4)}} = \frac{12-6-2}{\sqrt{9\times 49}}$$

$$= \frac{4}{21} = 0.19 = \cos 79^\circ$$

$\therefore \quad \theta = 79^\circ$

(খ) একই সমতলে অবস্থিত হওয়ার শর্ত হলো,

$$\overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{OQ} = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

এখন, $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \hat{i} & +\hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -5 & 3 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-10+9) - \hat{j}(8-18) + \hat{k}(-12+30)$

$$= -\hat{i} + 10\hat{j} + 18\hat{k}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP}.\{(\overrightarrow{PQ})\times(\overrightarrow{OQ})\} = (2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}).(-\hat{i}+10\hat{j}+18\hat{k})$$

$$= -2 + 20 - 18 = 0$$

সুতরাং, এরা একই সমতলে অবস্থান করে।

২৮। তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{C} = x^2y\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^2x\hat{k}$।

(ক) উদ্দীপকের $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের $\vec{C}$ ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য হবে কি? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[রা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০১৯]

(ক) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের ক্রস গুণন $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ওপর লম্ব হবে।

$$\therefore \quad \vec{A}\times\vec{B} = \vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(6-5) - \hat{j}(8-10) + \hat{k}(4-6) = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{P}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

এখন $\vec{P}$ ভেক্টরের একক ভেক্টর, $\hat{P} = \dfrac{\vec{P}}{|\vec{P}|} = \dfrac{\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}}{3}$

অতএব, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব দিকে একক ভেক্টর হলো, $\frac{1}{3}(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

(খ) $\vec{C}$ ভেক্টরের কার্ল,

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix} = \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(z^2x) - \frac{\partial}{\partial_2}(y^2z)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(z^2x) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y)\right]$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right]$$

$$= -y^2\hat{i} - z^2\hat{j} - x^2\hat{k}$$

RMDAC

$\vec{\nabla} \times \vec{C}$-এর ডাইভারজেন্স, অর্থাৎ

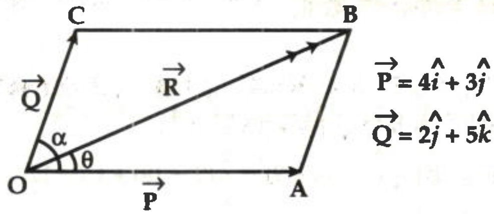
$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).(-y^2\hat{i} - z^2\hat{j} - x^2\hat{k})$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2)\right\}$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

সুতরাং $\vec{C}$ ভেক্টরের কার্লের ডাইভারজেন্স শূন্য হবে।

২১। চিত্রটি লক্ষ কর :



(ক) উদ্দীপকের আলোকে θ-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) ΔOAB ও ΔOBC-এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিক OABC-এর ক্ষেত্রফলের সমান কি না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [সি. বো. ২০১১]

(ক) $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{j} + 5\hat{k} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\vec{P}.\vec{R} = PR\cos\theta$$

বা, $$\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{R}}{|\vec{P}|\,|\vec{R}|} = \frac{(4\hat{i} + 3\hat{j}).(4\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k})}{\sqrt{25}\sqrt{16 + 25 + 25}}$$

$$= \frac{16 + 15}{\sqrt{25}\sqrt{66}} = \frac{31}{40{\cdot}62} = 0{\cdot}763$$

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}(0{\cdot}763) = 40{\cdot}27°$

(খ) $$\Delta OAB = \frac{1}{2}(\vec{P} \times \vec{Q}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[\hat{i}(15 - 2\times 0) - \hat{j}(20 - 0) + \hat{k}(8 - 0\times 3)]$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{i}(15) - \hat{j}(20) + \hat{k}(8)] = \frac{1}{2}(15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k})$$

এবং $$\Delta OBC = \frac{1}{2}\vec{R} \times (-\vec{P}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 5 & 5 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{i}(0 + 15) - \hat{j}(0 + 20) + \hat{k}(-12 + 20)]$$

$$= \frac{1}{2}(15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k})$$

অতএব, $$\Delta OAB + \Delta OBC = \frac{1}{2}(15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k}) + \frac{1}{2}(15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k})$$

$$= (15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k})$$

আবার সামান্তরিক OABC-এর ক্ষেত্রফল,

$$= \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(15-0) - \hat{j}(20-0) + \hat{k}(8-0)$$

$$= 15\hat{i} - 20\hat{j} + 8\hat{k}$$

সুতরাং, ΔOAB + ΔOBC ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিক OABC-এর ক্ষেত্রফলের সমান।

৩০। অনিক $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর নিয়ে তাদের ডট ও ক্রস গুণন নির্ণয় করছিল। সে দেখল যে, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যস্থ কোণের মান একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ পরিবর্তন করলে তাদের ডট ও ক্রস গুণনের মান সমান হয়।

(ক) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু ধরে উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) অনিকের পর্যবেক্ষণের গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [ব. বো. ২০১১]

(ক) আমরা জানি, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $\vec{A} \times \vec{B}$

এখন $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}(-3-2) - \hat{j}(-6+1) + \hat{k}(-4-1)$$

$$= -5\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}$$

(খ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর ডট গুণন, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ এবং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর ক্রস গুণন, $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$

প্রশ্নানুসারে, ডট গুণনের মান = ক্রস গুণনের মান

অর্থাৎ, $AB\cos\theta = AB\sin\theta$

$\therefore \quad \dfrac{AB\sin\theta}{AB\cos\theta} = 1$

বা, $\tan\theta = 1$

$\therefore \quad \theta = 45°$

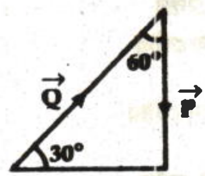
সুতরাং কোণের পরিবর্তন করে 45° হলেই ডট গুণন ও ক্রস গুণনের সমান হবে যা অনিক পর্যবেক্ষণ করেছে। সুতরাং, অনিকের পর্যবেক্ষণ সঠিক।

৩১। 30° কোণে আনত একটি পাহাড়ের ঢাল বেয়ে 72 km/h সমবেগে একটি বাস ওপরে উঠছে। এমন সময় হঠাৎ বৃষ্টি 6 ms^{-1} সমবেগে খাড়া নিচে পড়তে শুরু করল। বৃষ্টি যখন প্রায় শেষ তখন অনুভূমিকভাবে বায়ুপ্রবাহ শুরু হলো।

(ক) শুরুতে বাসচালক কত কোণে বৃষ্টি পড়তে দেখবে নির্ণয় কর।

(খ) বায়ুপ্রবাহের দরুন বাস চালক খাড়া নিচের দিকে বৃষ্টি পড়তে দেখলে বায়ু প্রবাহের প্রকৃত মান ও দিক গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০১১]

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত ঘটনাটি চিত্রে দেখানো হলো:



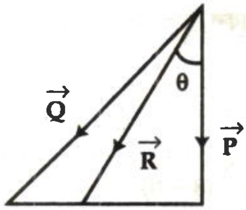
এখানে, $\vec{Q}$ ও $\vec{P}$ হচ্ছে যথাক্রমে বাস ও বৃষ্টির বেগ। বাসটির নিজস্ব বেগের কারণে এর চারপাশের সবকিছুর মধ্যে বিপরীত দিকে নিজের সমান বেগ দেখতে পাবে। তাই বৃষ্টির লব্ধিবেগ নির্ণয়ের জন্য $\vec{Q}$ এর দিক বিপরীত ধরে পাই,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

$$\tan\theta = \frac{20 \times \sin 60°}{6 + 20 \cos 60°}$$

$\therefore \quad \tan\theta = 1{\cdot}0825$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(1{\cdot}0825) = 47{\cdot}27°$



দেওয়া আছে,

$Q \;= 72\ \text{km/h} = \dfrac{72 \times 1000\ \text{m}}{60 \times 60\ \text{s}}$

$\;\;\;= 20\ \text{ms}^{-1}$

$P \;= 6\ \text{ms}^{-1}$

$\alpha \;= 60°$

অর্থাৎ বাসচালক উল্লম্বের সাথে $47{\cdot}27°$ কোণে বৃষ্টি পড়তে দেখবে।

(খ) ক থেকে পাই আপেক্ষিক বেগের দিক $\theta = 47{\cdot}27°$

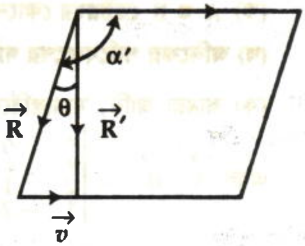
এখানে বাস সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ $\vec{R}$ হলে,

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (20)^2 + 2{\cdot}6{\cdot}20\cos 60°}$$

$$= 23{\cdot}58\ \text{ms}^{-1}$$

আবার যখন বায়ুপ্রবাহ শুরু হয় তখন নতুন লব্ধিবেগের দিক উল্লম্বের সাথে 0° কোণে ক্রিয়া করে। অর্থাৎ বায়ুপ্রবাহের দিকের সাথে লম্বভাবে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে চিত্রে দেখান হলো।



এখানে $\vec{R'}$ হলো বায়ুপ্রবাহের দরুন বাস সাপেক্ষে বৃষ্টির পরিবর্তিত আপেক্ষিক বেগ।

$$\therefore \quad \tan 90° = \frac{R\sin\alpha'}{v + R\cos\alpha'} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$\alpha' = 90° + \theta = 90° + 47{\cdot}27° = 137{\cdot}27°$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ অনুসারে,

$$v + R\cos\alpha' = \frac{R\sin\alpha'}{\tan 90°} = 0$$

$\therefore \quad v + 23{\cdot}58\cos(137{\cdot}27°) = 0$

$\therefore \quad v = 17{\cdot}32\ \text{ms}^{-1}$

সার-সংক্ষেপ

স্কেলার রাশি : যেসব ভৌত রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি বলে।

ভেক্টর রাশি : যে সমস্ত ভৌত রাশির মান ও অভিমুখ উভয়ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে।

সমবিন্দু ভেক্টর : যে সমস্ত ভেক্টরের আদি বিন্দু একই তাদের সমবিন্দু ভেক্টর বলে।

ত্রিমাত্রিক ভেক্টর : ত্রিমাত্রিক দেশে অবস্থিত ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক ভেক্টর বলে।

একক ভেক্টর : যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।

সঠিক ভেক্টর : যেসব ভেক্টরের মান শূন্য হয় না তাদেরকে সঠিক ভেক্টর বলে।

নাল বা শূন্য বা অকার্যকর ভেক্টর : যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য এবং যার কোনো নির্দিষ্ট দিক থাকে না তাকে নাল বা শূন্য বা অকার্যকর ভেক্টর বলে।

সমান ভেক্টর : দুটি ভেক্টরের মান ও দিক একই হলে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।

বিপরীত ভেক্টর : দুটি ভেক্টরের পরম মান সমান কিন্তু অভিমুখ বিপরীত হলে তাদেরকে বিপরীত ভেক্টর বলে।

অবস্থান ভেক্টর : প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা যায় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর : স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যে ভেক্টরের সাহায্যে মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায় তাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

আয়ত একক ভেক্টর : ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বা আয়ত ভেক্টর বলে।

সরণ ভেক্টর : রৈখিক বা সরল পথে বা নির্দিষ্ট দিকে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্বকে সরণ বলে। অন্যভাবে বলা যায়, কোনো বস্তুর অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে সরণ ভেক্টর বলে।

সদৃশ ভেক্টর : সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে।

বিপ্রতীপ ভেক্টর : দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

সমরেখ বা একরেখীয় ভেক্টর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে তাদেরকে সমরেখ বা একরেখীয় ভেক্টর বলে।

সমতলীয় বা একতলীয় ভেক্টর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় বা একতলীয় ভেক্টর বলে।

বিপরীত বা বন্ধন ভেক্টর : বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে একে অপরের বিপরীত বা বন্ধন ভেক্টর বলে।

সমভেক্টর : দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান ও দিক একই দিকে হলে তাদেরকে সমভেক্টর বলে।

পোলার ভেক্টর : বস্তুর ঘূর্ণনের সঙ্গে যুক্ত নয় এমন ভেক্টরকে তীর চিহ্ন যুক্ত সরলরেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই রেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টরের মান এবং তীর চিহ্ন দিক নির্দেশ করে। এদেরকে পোলার ভেক্টর বলে।

অক্ষীয় ভেক্টর : বস্তুর ঘূর্ণনের সঙ্গে যুক্ত ভেক্টরকে অক্ষীয় ভেক্টর বলে।

সীমাবদ্ধ ভেক্টর : কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু যদি নির্দিষ্ট থাকে তবে তাকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে।

লব্ধি ভেক্টর : দুটি ভেক্টরের সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলাফল যে ভেক্টরের ক্রিয়ার ফলাফলের সমান হয় সেই ভেক্টরকে প্রথমোক্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর বলে।

ত্রিভুজ সূত্র : দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে যদি কোনো ত্রিভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত দুটি বাহু দ্বারা মানে ও অভিমুখে সূচিত করা যায় তবে বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহুটি ওই ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধিকে মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করবে।

সামান্তরিক সূত্র : দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে যদি কোনো সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও অভিমুখে সূচিত করা যায় তবে ওই বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধিকে মানে ও অভিমুখে সূচিত করবে।

বহুভুজ সূত্র : বহু সংখ্যক সমজাতীয় ভেক্টর যদি কোনো উন্মুক্ত বহুভুজের ক্রমান্বয়ে গৃহীত বাহুগুলোর দ্বারা মানে ও অভিমুখে প্রকাশিত হয় তবে যে বাহুটি ওই বহুভুজকে বন্ধ করে, বিপরীতক্রমে গৃহীত সেই বাহুটি ওই ভেক্টরসমূহের লব্ধিকে মানে ও অভিমুখে প্রকাশ করবে।

বিনিময় সূত্র : দুটি ভেক্টর রাশির যোগের ক্ষেত্রে তাদের অবস্থান বিনিময় করা হলে যোগফলের মান অপরিবর্তিত থাকে।

সংযোজন সূত্র : তিন বা ততোধিক ভেক্টরকে তাদের অবস্থানের বিচারে যে ক্রমাঙ্কেই যোগ করা হোক না কেন, যোগফলের মান অপরিবর্তিত থাকে।

বণ্টন সূত্র : যেকোনো সমজাতীয় ভেক্টর $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর যোগের ক্ষেত্রে বণ্টন সূত্র অনুযায়ী $n(\vec{P}+\vec{Q})=n\vec{P}+n\vec{Q}$, যেখানে n হলো একটি স্কেলার।

ভেক্টর বিভাজন : কোনো একটি ভেক্টরকে দুই বা ততোধিক ভেক্টরে যদি এমনভাবে বিভাজিত করা হয় যাতে মূল ভেক্টরটি বিভাজিত অংশগুলোর লব্ধি হয়, তবে ওই বিভাজনকে ভেক্টর বিভাজন বলে। এই বিভাজিত অংশগুলোকে মূল ভেক্টরটির উপাংশ বলা হয়।

স্কেলার গুণন : দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে গুণফল একটি স্কেলার রাশি হলে ওই গুণনকে স্কেলার গুণন বলে। এই গুণনে গুণফলের মান ভেক্টর দুটির মানের গুণফল এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের গুণফলের সমান হয়।

ভেক্টর গুণন	:	দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি বৃহত্তর রাশি হয়, তবে ওই গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইনের (sine) গুণফলের সমান।
অপারেটর	:	যে গাণিতিক প্রকাশ বা চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেওয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।
স্কেলার ক্ষেত্র	:	ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে।
ভেক্টর ক্ষেত্র	:	ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে।
রেখা ইন্টিগ্রাল	:	$V(x, y, z)$ একটি ক্ষেত্র হলে কোনো আবদ্ধ পথে ভেক্টরের রেখাজনিত ইন্টিগ্রাল $\oint \vec{V}.\vec{dl}$, এখানে $\vec{dl}$ আবদ্ধ পথের একটি অংশ যার গতি মান dl এবং অভিমুখ ওই অংশের স্পর্শক বরাবর।
গ্রেডিয়েন্ট	:	গ্রেডিয়েন্ট হলো একটি ভেক্টর ক্ষেত্র যা অদিক রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হার প্রকাশ করে। একে স্কেলার অপেক্ষকও বলে।
ডাইভারজেন্স	:	ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সগুলো একটি স্কেলার ফাংশন বা ক্ষেত্র যা দ্বারা ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে ফ্লাক্সের প্রকৃতি জানা যায়।
কার্ল	:	কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ওই ক্ষেত্রের ঘূর্ণনের সাথে সম্পর্কিত। ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত একটি বিন্দুর চারদিকে একই লাইন ইন্টিগ্রালের মান প্রতি একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তা উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল প্রকাশ করে।
স্বাধীন ভেক্টর	:	কোনো ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু যদি ইচ্ছামতো ঠিক করা যায়, তবে সেই ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলে।
বিসদৃশ ভেক্টর	:	সমজাতীয় দুটি ভেক্টর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হলে বোঝায়—

(ক) $\vec{A} = 0$ (খ) $\vec{B} = 0$ (গ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ একে অপরের ওপর লম্ব।

২। $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হয়। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর লব্ধির সর্বোচ্চ মান $\vec{A} + \vec{B}$ এবং সর্বনিম্ন মান $\vec{A} - \vec{B}$।

৩। যদি $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ এবং $\vec{D} = \vec{B} \times \vec{A}$ হয় তাহলে $\vec{C}$ এবং $\vec{D}$-এর মধ্যবর্তী কোণ হবে 180°।

৪। যদি $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হয় তবে $\vec{\nabla}.\vec{r}$-এর মান হবে 3। $2\hat{i} + 3\hat{j}$ ভেক্টর এর মান $\sqrt{13}$, ইহা XY তলে অবস্থিত, Z অক্ষের সাথে 90° কোণ করে।

৫। $\vec{A}$ এবং এর একক ভেক্টরের $(\hat{a})$ মধ্যবর্তী কোণ 0°। $Q(x, y) = 3x^2y$ হলে $(1, -2)$ বিন্দুতে $\nabla = -12\hat{i} + 3\hat{j}$

৬। $\vec{A} = \hat{i}$ এবং $\vec{B} = \hat{j} + \hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ 90°। $|\vec{A}.\vec{B}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ 45°। $\vec{F}$ ও $\vec{s}$ মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হলে কাজ শূন্য হয়।

৭। $\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{k})$-এর মান শূন্য হয়, $\hat{j} \times (\hat{j} \times \hat{k})$-এর মান $-\hat{k}$ হয়। $\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$-এর ওপর লম্ব ভেক্টর হলো $3\hat{i} - 4\hat{j}$

৮। দুটি ভেক্টর পরস্পর 45° কোণে ক্রিয়া করলে এদের স্কেলার ও ভেক্টর গুণফলের মান সমান হয়।

৯। X-অক্ষের সমান্তরাল ভেক্টর হলো $(\hat{i}\times\hat{j})\times\hat{j}$। YZ সমতলে $3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\sqrt{50}$।

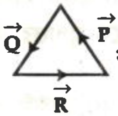
১০। দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে যখন এদের মধ্যবর্তী কোণ $0°$ হয়।

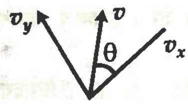
১১। $|\vec{A}\times\vec{A}|=0$ হয়। $\vec{A}\times\vec{B}=0$ হলে $\vec{A}$, $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হয়। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বিপ্রতীপ হবে, যখন $\vec{A}=2\hat{i}$ এবং $\vec{B}=\frac{1}{2}\hat{i}$ হয়। $\hat{i}\times\hat{j}$ ভেক্টরের গুণফলের দিক $\hat{k}$ বরাবর।

১২। একটি সামান্তরিকের কর্ণ $2\hat{i}$ ও $2\hat{j}$ হলে তার ক্ষেত্রফল হবে 2 বর্গ একক। স্কেলার ফাংশনকে ভেক্টর রাশিতে রূপান্তর করে গ্রেডিয়েন্ট।

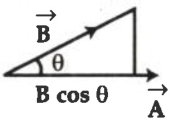
১৩। $\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $B\cos\theta$। $\vec{A}\times\vec{B}$ ও $(\vec{A}+\vec{B})$ এর মধ্যবর্তী কোণ $90°$।

১৪। দুটি সমান বলের এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ $60°$ এর জন্য লব্ধির বর্গ হবে তাদের মানের 3 গুণ।

১৫। $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$ সম্পর্কটি চিত্রের সাহায্যে 

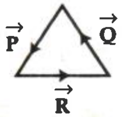
প্রকাশ করা যায়। 

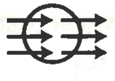
$\theta=45°$ হলে v_x ও v_y এর উপাংশ সমান হয়। শক্তি, বিভব, ডাইভারজেন্স, কাজ স্কেলার রাশি।

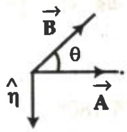
১৬। (ক) 

এখানে $B\cos\theta$ হলো $\vec{A}$ এর দিকে $\vec{B}$-এর লম্ব উপাংশ বা অভিক্ষেপ।

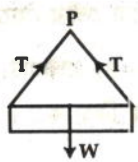
(খ) কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই হলে ভেক্টরটি নাল ভেক্টর হবে।

১৭। $\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$ কে প্রকাশ করা হয় 

চিত্রের সাহায্যে। মান শূন্য নয় এমন একটি ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।  চিত্রটি একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স, ফলে $\vec{\nabla}.\vec{V}$ = '+'ve;  চিত্রটি একটি ভেক্টর ডাইভারজেন্স, ফলে $\vec{\nabla}.\vec{V}$ = '−' ve;  চিত্রটি শূন্য ডাইভারজেন্স, ফলে $\vec{\nabla}.\vec{V}=0$

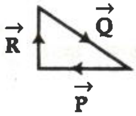
১৮। লম্ব একক ভেক্টর $\hat{\eta}=\dfrac{\vec{B}\times\vec{A}}{|\vec{B}\times\vec{A}|}$ এর জন্য চিত্র হলো— 

$|\vec{A}\times\vec{B}|=\vec{A}.\vec{B}$ হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{4}$। চিত্রে W ওজনের একটি আয়তাকার ফ্রেমের দুই প্রান্ত সুতা দিয়ে বেঁধে সুতার মধ্য বিন্দুটি দেওয়ালের সাথে আটকানো আছে। তাহলে W এর মান হবে, $W=2T\cos\theta$।



১৯। $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরটির মান হবে $\sqrt{3}$। $\hat{j}\times(\hat{j}\times\hat{k})=-\hat{k}$; $\hat{i}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{k}=0$; $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$; $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$

২০। $\vec{A}.\vec{A} = A^2$, $\hat{i} + \hat{j}$ ভেক্টরটি X-Y তলে অবস্থিত। $\vec{A} = 5\hat{i}$, $\vec{B} = \frac{1}{5}\hat{i}$ হলে ভেক্টরদ্বয় বিপ্রতীপ হয়।

২১। 

চিত্রে $\vec{R}$ ভেক্টরটি $\vec{P} - \vec{Q}$ ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করে। দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হবে যখন $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হয়। স্কেলার বা ভেক্টর গুণনে দুটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণের সম্পর্ক হলো $0° \le \theta \le 180°$।

২২। $\vec{A} = -\vec{B}$ হলে $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হয়। $\vec{A} + \vec{B}$ ও $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান হওয়ার শর্ত হলো $\vec{B} = 0$।

২৩। দুটি ভেক্টরের যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান হয় যখন তাদের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়।

২৪। $\nabla \times \vec{V} = 0$ হলো অঘূর্ণনশীলের শর্ত, $\vec{\nabla} . \vec{V} = 0$ হলো সলিনয়েডের শর্ত এবং কোনো পদার্থ আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়। স্কেলার ফাংশনকে ভেক্টর রাশিতে রূপান্তর করে গ্র্যাডিয়েন্ট।

২৫। $\vec{A} = 2\vec{B}$ হলে $\vec{A}, \vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় (i) সদৃশ ভেক্টর, (ii) একই দিকে ক্রিয়া করে, (iii) সমজাতীয় ভেক্টর।

২৬। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে $\frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$

২৭। যদি $\vec{A} = -\vec{B}$ হয়, তবে $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান হবে শূন্য।

২৮। দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে যখন এদের মধ্যবর্তী কোণ শূন্য।

২৯। $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2B^2 - (A . B)^2$

৩০। কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল-এর নতিমাত্রা (gradient) শূন্য অর্থাৎ $\vec{\nabla} . (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$

৩১। $(\vec{A} + \vec{B})$ ও $(\vec{A} - \vec{B})$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত $A = B$।

৩২। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের সমান।

৩৩। দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কখনই শূন্য হতে পারে না।

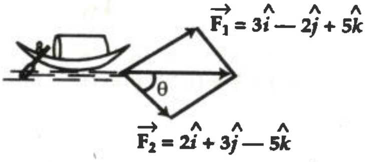
৩৪। $(\vec{A} . \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2B^2$

৩৫। $\vec{P} = \vec{Q}$ হলে $\vec{P} \times (\vec{Q} \times \vec{P})$ এর মান শূন্য হয়। দুটি ভেক্টরের সমষ্টি ও পার্থক্যের মান একই হয় যখন ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ 90°।

৩৬। $\hat{i}$ এবং $-\hat{i}$-এর মধ্যকার কোণ 180°, $|-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}| = \sqrt{3}$ হয়। ডাইভারজেন্স স্কেলার রাশি।

৩৭। কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে সেটি অঘূর্ণনশীল।

৩৮। $2\hat{i} + 3\hat{j}$ ভেক্টরটি XY সমতলে অবস্থিত। $\vec{A} = -3\vec{B}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় সমজাতীয় ও পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। $\vec{A} = -\vec{B}$ হলে, $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান শূন্য হবে।

৩৯। 

$\vec{F_1}$ ও $\vec{F_2}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান 11.22। এই নৌকায় দাড় টানার ক্ষেত্রে রাশির দৈর্ঘ্য T cos θ-এর মান বেশি হলে নৌকা দ্রুত চলবে এবং T sin θ-এর মান কম হলে নৌকা সামনের দিকে বেশি গতিশীল হবে। T sin θ নৌকার হাল দ্বারা প্রশমিত হয়।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

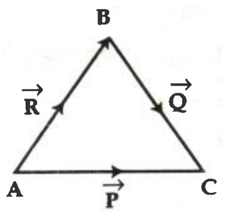
১। কোন দুটি ভেক্টর রাশি ?
ⓚ গতিশক্তি, বেগ
ⓛ তড়িৎ বিভব, ত্বরণ
ⓜ কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, তাপমাত্রা
ⓝ তড়িৎ ক্ষেত্র, বল

২। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ এবং $\vec{A}$-এর দিকে একটি একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে $\vec{A}$-এর ওপর $\vec{B}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ হলো— [কু. বো. ২০২১; CoM Admission Test, 2015-16]
(i) $A \cos\theta$
(ii) $B \cos\theta$
(iii) $\vec{B} \cdot \hat{a}$
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i
ⓛ ii
ⓜ i ও ii
ⓝ ii ও iii

৩। যদি দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি এদের যেকোনো একটির সমান হয় তবে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে— [Admission Test : DU-A1 2018-19; BSMRSTU, NSTU 2017-18; BuTex 2011-12; BU 2015-16; RU 2014-15, 2015-16; JU 2019-20; CKRUET 2021-22; RU-C 2022-23; JU-A 2022-23; Agri. 2020-21]
ⓚ 0°
ⓛ 180°
ⓜ 90°
ⓝ 120°

৪। একটি লন রোলার ঠেলা বা টানার সময় এর হাতলে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 19·6N বল প্রয়োগ করলে এর টানা অপেক্ষাকৃত সহজ হয় কারণ এর ওজন তখন কমে— [JU Admission Test, 2015-16 (মান ভিন্ন)]
ⓚ 0·5 kg
ⓛ 1 kg
ⓜ 3 kg
ⓝ 9·8 kg

৫। [সি. বো. ২০১৯; দি. বো. ২০১৯; ঢা. বো. ২০১৭; দি. বো. ২০১৬]

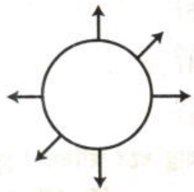


চিত্রানুসারে কোনটি সঠিক ?
ⓚ $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$
ⓛ $\vec{P} = \vec{R} + \vec{Q}$
ⓜ $\vec{Q} = \vec{R} + \vec{P}$
ⓝ $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$

৬। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফল কত? [সি. বো. ২০১৫; Admission Test : JU 2018-19; CU unit-A 202-21]
ⓚ 3
ⓛ 7
ⓜ 9
ⓝ 11

৭। $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হলে $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ কত? [ব. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০১৫; Admission Test : JU 2021-22, 2018-19; IU 2017-18; RU-C 202-21]
ⓚ 1
ⓛ 2
ⓜ 3
ⓝ 4

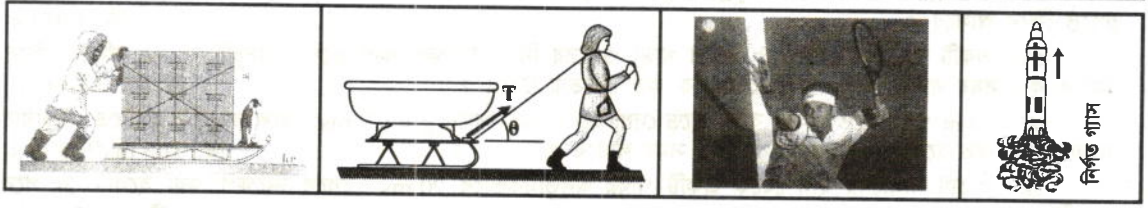
৮। নিচের কোনটি X-অক্ষের সমান্তরাল? [সি. বো. ২০১৫]
ⓚ $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{i}$
ⓛ $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{k}$
ⓜ $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{j}$
ⓝ $(\hat{k} \times \hat{j}) \times \hat{k}$

৯। 

চিত্রটি একটি ভেক্টর ক্ষেত্রে ডাইভারজেন্স হলে কোনটি সঠিক? [দি. বো. ২০২২; ঢা. বো. ২০১৬; DUP Admission Test, 2021-22 (মান ভিন্ন)]
ⓚ $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$
ⓛ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$
ⓜ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = +ve$
ⓝ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = -ve$

৪ নিউটনিয়ান বলবিদ্যা
NEWTONIAN MECHANICS

প্রধান শব্দ (Key Words) : বল, মৌলিক বল, ভরবেগ, নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র, ঘাত, অভিকর্ষ, মহাকর্ষ সূত্র, মহাকর্ষ, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, জড়তার ভ্রামক, কৌণিক ভরবেগ, চক্রগতির ব্যাসার্ধ, টর্ক, কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র, কেন্দ্রমুখী বল, কেন্দ্রবিমুখী বল, সংঘর্ষ, স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ, অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ, একমাত্রিক সংঘর্ষ।



সূচনা
Introduction

বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন বস্তুর গতি সংক্রান্ত সূত্র নিয়ে প্রথম আলোচনা করেন। তাঁর আবিষ্কৃত তিনটি সূত্র **গতিবিদ্যার স্তম্ভস্বরূপ।** পদার্থবিদ্যা ও প্রকৌশলবিদ্যার (engineering) বহু সমস্যা এই সূত্র প্রয়োগ করে সফল-ভাবে সমাধান করা সম্ভব হয়েছে। সরলরৈখিক এবং ঘূর্ণায়মান বস্তুর ক্ষেত্রেও পদার্থবিদ্যার গতি, ভরবেগ এবং সংরক্ষণশীলতার নীতি ব্যাখ্যা ও প্রমাণ নিউটনিয়ান বলবিদ্যার অন্যতম সাফল্য।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- বলের স্বজ্ঞামূলক ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- নিউটনিয়ান বলবিদ্যায় ব্যবহৃত সূত্রগুলো ক্যালকুলাস ব্যবহার করে বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- নিউটনের গতিসূত্রের সীমাবদ্ধতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রৈখিক ও কৌণিক ভরবেগ সংক্রান্ত রাশিমালা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রমুখী ও কেন্দ্রবিমুখী বলের ব্যবহার জানতে পারবে।
- স্থিতিস্থাপক ও অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ব্যাখ্যা করতে এবং এ সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

  ব্যবহারিক : পরীক্ষার সাহায্যে একটি ফ্লাই হুইলের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে পারবে।

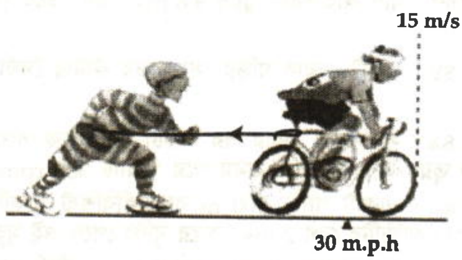
৪.১ বলের স্বজ্ঞামূলক ধারণা
Intuitive concept of force

প্রত্যেক বস্তু যে অবস্থায় আছে সেই অবস্থায় থাকতে চায়। অর্থাৎ স্থির বস্তু স্থির থাকতে চায় আর গতিশীল বস্তু গতিশীল থাকতে চায়। বস্তুর এই নিজস্ব অবস্থা বজায় রাখতে চাওয়ার প্রবণতাই হলো জড়তা। বস্তুর এই স্থিতিশীল বা গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন ঘটাতে হলে বল প্রয়োগ করতে হবে।

সংজ্ঞা : পদার্থ যে অবস্তায় আছে, চিরকাল সেই অবস্থায় থাকতে চাওয়ার যে প্রবণতা বা সেই অবস্থা বজায় রাখতে চাওয়ার যে ধর্ম তাকে জড়তা বলে।

একটি ফুটবলকে কিক করলে তা সহজে সামনের দিকে এগিয়ে যায়। আবার একই আকৃতির একটি লোহার বলে আঘাত করে তাকে একইভাবে সচল করা যায় না। একটি জেট প্লেনকে একা ঠেলে নড়ানো যায় না [চিত্র ৪.১(ক)]

চিত্র ৪.১ (ক)



চিত্র ৪.১ (খ)

কিন্তু নির্দিষ্ট বেগে চলন্ত একটি সাইকেলকে পেছন দিক থেকে টেনে থামানো যায় [চিত্র ৪.১(খ)]। এই উদাহরণগুলো থেকে বোঝা যায় যে বস্তুর ভর যত বেশি তার স্থিতি বা গতির অবস্থা পরিবর্তন করা তত কঠিন। অতএব যে বস্তুর ভর

যত বেশি হয় তার জড়তাও তত বেশি হয়। অর্থাৎ ভর হচ্ছে পদার্থের জড়তার পরিমাপ। অন্য কথায় কোনো একটি বস্তুর তার বেগের পরিবর্তনকে বাধা দেওয়ার পরিমাপই হচ্ছে ভর।

উক্ত ঘটনা থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, বস্তু স্থির থাকলে তা গতিশীল করতে বা গতিশীল থাকলে তা স্থির করতে বস্তুর ওপর বাইরে থেকে স্পর্শীয়ভাবে কিছু একটা প্রয়োগ করতে হবে। আমাদের দৈনন্দিন কাজকর্মে কখনো কোনো বস্তুকে পাশে ঠেলে রাখি, কখনো টান দিয়ে, কখনো বা উঁচু করে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে নিয়ে যাই। সকল ক্ষেত্রে বল প্রয়োগের জন্য বল প্রয়োগকারীর এবং বস্তুর প্রত্যক্ষ সংস্পর্শ প্রয়োজন। অর্থাৎ যে বল সৃষ্টির জন্য দুটি বস্তুর প্রত্যক্ষ সংস্পর্শ প্রয়োজন তাকে বলা হয় **স্পর্শ বল**। স্পর্শ বলের উদাহরণ হলো—ঘর্ষণ বল, সংঘর্ষের ফলে সৃষ্ট বল, টানা বল ইত্যাদি। এক্ষেত্রে বলা যায় **কোনো স্থিতিশীল বস্তুকে গতিশীল করতে এবং গতিশীল বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন করতে বস্তুর ওপর যা প্রযুক্ত করতে হয় তাকেই বল বলে।**

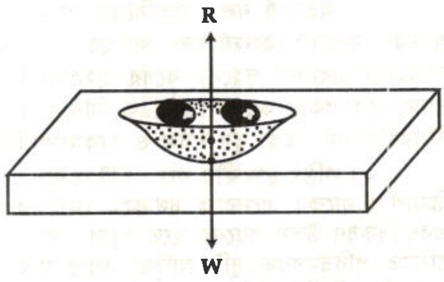
এমনিভাবে প্রকৃতিতেও অনেক ঘটনা ঘটছে যার কারণে দুটি বস্তু একে অপরকে আকর্ষণ করছে বা পরস্পরকে বিকর্ষণ করছে। আবার দুটি বস্তু পাশাপাশি না থাকলেও একে অপরের দ্বারা আকর্ষিত হতে পারে। যেমন গাছের একটি আম পাশের আমকে আকর্ষণ করছে কি না বা ওই আমটিকে পৃথিবী আকর্ষণ করছে কি না তা সহজে বুঝতে পারি না। যখন আমটি গাছ থেকে পড়ে তখন দেখা যায় পৃথিবীর আকর্ষণে বা আমের ভরের কারণে তা দ্রুত মাটি স্পর্শ করছে। এ ধরনের আকর্ষণ বল হলো **মহাকর্ষ বল**।

আবার মেঝের ওপর দিয়ে একটি বাক্সকে টানা হলে মেঝে এবং বাক্সের মাঝে একটি বল কাজ করে যা বাক্সের গতিকে বাধা দেয়। এই বাধা প্রদানকারী বলই হলো **ঘর্ষণ বল**। এই ঘর্ষণ বল এবং প্রতিক্রিয়া বলের অনুপাতই হলো **ঘর্ষণ গুণাঙ্ক** (μ)। $\therefore \ \mu = \frac{f}{R}$।

গতীয় ঘর্ষণের ক্ষেত্রে f_k এবং স্থিতি ঘর্ষণের ক্ষেত্রে f_s হয় এবং প্রতিক্রিয়া $R =$ বস্তুর ওজন $= mg$, হেলানো তলের ক্ষেত্রে $R = mg \cos \theta$ হয়।

পরমাণুর কেন্দ্রে নিউক্লিয়াসের মধ্যে নিউক্লিয়নগুলো পাশাপাশি অবস্থান করে। এক্ষেত্রে তাদের মধ্যে এক ধরনের আকর্ষণের জন্যই তারা বিচ্ছিন্ন হয় না। এ ধরনের আকর্ষণের বিষয়টিই হলো **নিউক্লীয় বল**।

বাস্তবে এমন কোনো বস্তু নেই যার ওপর বাইরে থেকে কোনো বল ক্রিয়া না করে। কিন্তু বস্তুর ওপর বাইরে থেকে ক্রিয়ারত দুই বা ততোধিক বলের লব্ধি যদি শূন্য হয়, তা হলে বস্তুর ওপর ওই বলগুলোর ক্রিয়ার কোনো প্রভাব পড়ে না। যেমন একটি টেবিলের ওপর দুই দিক থেকে দুটি সমান ও বিপরীতমুখী বল একই রেখায় প্রয়োগ করে একটি টেবিলকে সরাবার চেষ্টা করলে বল দুটির লব্ধি সমান হওয়ায় টেবিলটি স্থির থাকবে। আবার টেবিলের ওপর একটি পাত্র রেখে দিলে তার ওজন (W) নিচের দিকে ক্রিয়া করবে। আবার টেবিল কর্তৃক প্রতিক্রিয়া R ওপরের দিকে টানছে। এক্ষেত্রে W = R হওয়ায় টেবিলের ওপর পাত্রটি স্থির আছে [চিত্র ৪.২]। **এসব বল সবই স্পর্শ বল।**



চিত্র ৪.২

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা বল সম্পর্কে ধারণা করতে পারি। অর্থাৎ **বস্তুর ওপর কিছু প্রয়োগ না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থির থাকতে চায় আর গতিশীল বস্তু চিরকাল সমবেগে সরল পথে চলতে চায়। এই ধর্মই হলো বস্তুর জড়তা।** তা হলে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, **বাইরে থেকে যে প্রভাব (influence) ক্রিয়া করলে কোনো বস্তুর স্থিতি বা গতির অবস্থার বা জড়তার পরিবর্তন ঘটে তাকে বল বলে।** কোনো বস্তুর ভর যত বেশি হয় তার জড়তা তত বেশি হয়। জড়তা বেশি হলে স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়।

সংজ্ঞা : যে বাহ্যিক কারণ স্থির বস্তুকে গতিশীল বা গতিশীল বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাবার চেষ্টা করে তাকে বল বলে।

কাজ :

- পিচঢালা রাস্তার ওপর থেমে থাকা একটি সিএনজি চালিত বেবি টেক্সিকে জোরে ঠেলা দাও। কী দেখতে পেলে ? বেবি টেক্সিটা কিছুটা সামনের দিকে এগিয়ে গেল।
- এবার রাস্তায় থেমে থাকা একটি ট্রাককে আগের মতো ঠেলা দাও। আদৌ এটি সরবে না। কয়েকজন মিলে এবার ট্রাকটিকে ঠেলা দাও। দেখবে ট্রাকটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে। এই দুই ক্ষেত্রে গতির ভিন্নতার কারণ কী?

বেবি টেক্সি এবং ট্রাকের মধ্যে ট্রাকের ভর অনেক বেশি। ফলে এর জড়তাও অনেক বেশি। তাই ট্রাককে গতিশীল করতে বেবি টেক্সি অপেক্ষা বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়।

বলের বৈশিষ্ট্য বা বল গতির ওপর কী কী প্রভাব বিস্তার করে তার একটি তালিকা তৈরি করা হলো :

~~(১)~~ প্রযুক্ত বল কোনো স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে পারে। অর্থাৎ বল ত্বরণ সৃষ্টি করতে পারে।
~~(২)~~ বল প্রয়োগের ফলে গতিশীল বস্তুর বেগ হ্রাস বা বৃদ্ধি পায় বা বস্তুর বিকৃতি ঘটাতে পারে।
~~(৩)~~ প্রযুক্ত বল গতিশীল বস্তুর বেগের তথা গতির দিক পরিবর্তন করতে পারে।
~~(৪)~~ বল জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে।

একক : বলের এস. আই. একক নিউটন। এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে বলের একক পাউন্ডাল।

1 পাউন্ডাল : যে বল 1 পাউন্ড ভরবিশিষ্ট কোনো একটি বস্তুতে প্রযুক্ত হয়ে 1 ফুট/সে^{2} ত্বরণ সৃষ্টি করে তাকে 1 পাউন্ডাল বলে।

মাত্রা : বলের মাত্রা, $[F] = [MLT^{-2}]$

m ভরের কোনো বস্তুর ওপর বল F প্রয়োগ করে a ত্বরণের সৃষ্টি করলে আমরা পাই,

$$F = ma \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.1)$$

ভর এবং ত্বরণের গুণফল দ্বারা বল পরিমাপ করা হয়।

৪.১.১ বলের প্রকারভেদ
Kinds of forces

A-11

প্রকৃতিতে আমরা বিভিন্ন ধরনের বলের সঙ্গে পরিচিত হলেও এবং এদের বিভিন্ন নামকরণ থাকলেও সব বল কিন্তু মৌলিক বল নয়। **যেসব বল মূল বা অকৃত্রিম অর্থাৎ অন্য কোনো বল থেকে উৎপন্ন হয় না বরং অন্যান্য বলে এসব বলের প্রকাশ ঘটে তাকে মৌলিক বল বলে।**

মৌলিকতা অনুসারে প্রকৃতিতে চার ধরনের বল আছে। অন্য যেকোনো ধরনের বলকে এই চারটি বলের যে কোনো একটি বা একাধিক বল দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায়। মৌলিক বলগুলো হলো :

১। **মহাকর্ষ বল** (Gravitational force)
২। **তড়িৎ-চুম্বকীয় বল** (Electromagnetic force) [MAT: 13-14 DAT: 21-22]
৩। **সবল নিউক্লীয় বল** (Strong nuclear force)
৪। **দুর্বল নিউক্লীয় বল** (Weak nuclear force)

১। **মহাকর্ষ বল** : মহাবিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুর মধ্যে এক ধরনের আকর্ষণ বল ক্রিয়াশীল রয়েছে। এই আকর্ষণ বলকে **মহাকর্ষ বল** বলা হয়। এই বলের পরিমাণ ক্রিয়াশীল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। বিজ্ঞানীরা ধারণা করেন যে বস্তুদ্বয়ের মধ্যে **গ্রাভিটন** (Graviton) নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা এই মহাকর্ষ বল ক্রিয়াশীল হয়। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভরশীল নয়। **ইহা খুব দুর্বল ও আকর্ষণধর্মী বল।** এই বলের পাল্লা অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। [MAT: 16-17]

২। **তড়িৎ-চুম্বকীয় বল** : দুটি আহিত বা চার্জিত বস্তুর মধ্যে এবং দুটি চুম্বক পদার্থের মধ্যে এক ধরনের বল ক্রিয়াশীল থাকে। এদেরকে যথাক্রমে কুলম্বের তড়িৎ এবং চৌম্বক বল বলা হয়। তড়িৎ এবং চৌম্বক বল আকর্ষণ এবং বিকর্ষণ উভয় ধরনের হতে পারে। তড়িৎ এবং চৌম্বক বল পরস্পর ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কিত। বস্তুত আপেক্ষিক গতিতে পরিভ্রমণরত দুটি আহিত কণার মধ্যে ক্রিয়াশীল বলই হচ্ছে **তড়িৎ-চুম্বকীয় বল**। যখন তড়িৎ আধান বা চার্জগুলো গতিশীল হয়, তখন তারা চৌম্বক ক্ষেত্র সৃষ্টি করে। আবার পরিবর্তী (varying) চৌম্বক ক্ষেত্র তড়িৎ ক্ষেত্রের উৎস হিসেবে কাজ করে। ধারণা করা হয় যে, **ভরহীন, চার্জহীন ফোটন** নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের মাধ্যমে এই বল কার্যকর হয়। মহাকর্ষ বলের ন্যায় তড়িৎচৌম্বক বলের পাল্লাও অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত, এই বলের ক্রিয়ার জন্য কোনো মাধ্যমের প্রয়োজন হয় না। [MAT: 23-24,22-23,12-13 DAT: 16-17]

স্থিতিস্থাপক বল, আণবিক গঠন, রাসায়নিক বিক্রিয়া ইত্যাদিতে তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের প্রকাশ ঘটে [DAT: 17-18]

৩। **সবল নিউক্লীয় বল** : একটি পরমাণুর নিউক্লিয়াস প্রোটন ও নিউট্রন দ্বারা গঠিত। এদেরকে সমষ্টিগতভাবে বলা হয় নিউক্লিয়ন (Nucleon)। নিউক্লিয়াসের মধ্যে সমধর্মী ধনাত্মক আধানযুক্ত প্রোটনগুলো খুব কাছাকাছি থাকায় এদের মধ্যে কুলম্বের বিকর্ষণ বল প্রবল হওয়া উচিত এবং নিউক্লিয়াস ভেঙ্গে যাওয়ার কথা। কিন্তু বাস্তবে অনেক নিউক্লিয়াসই স্থায়ী। নিউক্লিয়নের মধ্যে যে মাধ্যাকর্ষণ বল কাজ করে তা এত নগণ্য যে এই বল কুলম্বের বিকর্ষণ বলকে প্রতিমিত (balance) করতে পারে না। সুতরাং নিউক্লিয়াসে অবশ্যই অন্য এক ধরনের সবল বল কাজ করে যা নিউক্লিয়াসকে ধরে রাখে। এই বলকে বলা হয় **সবল নিউক্লীয় বল**। বিজ্ঞানীদের ধারণা যে নিউক্লিয়নের মধ্যে **মেসন** (Meson) নামে এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা এই বল ক্রিয়াশীল হয়। এই বল আকর্ষণধর্মী, স্বল্প পাল্লা-বিশিষ্ট (short range), চার্জ নিরপেক্ষ এবং নিউক্লিয়াসের বাইরে ক্রিয়াশীল নয়।

৪। **দুর্বল নিউক্লীয় বল** : প্রকৃতিতে বেশ কিছু মৌলিক পদার্থ (elements) রয়েছে যাদের নিউক্লিয়াস স্বতঃস্ফূর্তভাবে ভেঙ্গে যায় (যেমন ইউরেনিয়াম, থোরিয়াম ইত্যাদি)। এই সমস্ত নিউক্লিয়াসকে বলা হয় **তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস**। তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে তিন ধরনের রশ্মি বা কণা নির্গত হয় যাদেরকে আলফা রশ্মি (α-rays), বিটা রশ্মি (β-rays) এবং গামা রশ্মি (γ-rays) বলা হয়।

তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে যখন বিটা কণা নির্গত হয় তখন একই সঙ্গে শক্তিও নির্গত হয়। কিন্তু পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে দেখা যায় যে, নিউক্লিয়াস থেকে যে পরিমাণ শক্তি নির্গত হয় তা বিটা কণার গতিশক্তির চেয়ে বেশি। স্বাভাবিকভাবেই বিজ্ঞানীদের মাঝে প্রশ্ন ওঠে যে β-কণা যদি শক্তির সামান্য অংশ বহন করে, তবে অবশিষ্ট শক্তি যায় কোথায় ? 1930 সালে **ডব্লিউ. পাউলি** (W. Pauli) প্রস্তাব করেন যে অবশিষ্ট শক্তি অন্য এক ধরনের কণা বহন করে যা β-কণার সঙ্গেই নির্গত হয়। এই কণাকে বলা হয় নিউট্রিনো (neutrino)। এই β-কণা এবং নিউট্রিনো কণার নির্গমন চতুর্থ একটি মৌলিক বলের কারণে ঘটে যাকে বলা হয় **দুর্বল নিউক্লীয় বল**। এই বল সবল নিউক্লীয় বা তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের তুলনায় খুবই দুর্বল। এই বলের কারণে অনেক নিউক্লিয়াসের ভাঙ্গন প্রক্রিয়া সংঘটিত হয়। ধারণা করা হয় যে, **বোসন** নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের মাধ্যমে এই বল কার্যকর হয়। [MAT: 23-24]

জেনে রাখ :

I. সবল নিউক্লীয় বলের কারণে প্রোটন ও নিউট্রন একত্রে আবদ্ধ হয়ে নিউক্লিয়াস গঠন করে। এই বলের বাহক কণিকা হলো মেসন, গ্লুওন।

II. দুর্বল নিউক্লীয় বলের কারণে বিটা ক্ষয় হয়। এই বলের বাহক কণিকা W ও Z বোসন।

III. তড়িৎ চৌম্বক বলের কারণে ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের সাথে আবদ্ধ হয়ে পরমাণু গঠন করে। এই বলের বাহক কণিকা ফোটন।

IV. মহাকর্ষ বল নক্ষত্রগুলোকে একত্রিত করে গ্যালাক্সি গঠন করে। এই বলের বাহক কণিকা গ্রাভিটন।

৪.১.২ মৌলিক বলসমূহের তীব্রতার তুলনা
Comparison of the intensities of the fundamental forces

চারটি মৌলিক বলের পরিমাপের আপেক্ষিক সবলতা তুলনা করলে দেখা যায় যে সবচেয়ে শক্তিশালী বল হচ্ছে সবল নিউক্লীয় বল এবং সবচেয়ে দুর্বল হলো মহাকর্ষ বল।

সবল এবং দুর্বল উভয় ধরনের নিউক্লীয় বলের ক্রিয়ার পাল্লা (range) খুবই স্বল্প (very short)। এগুলো নিউক্লিয়াসের পৃষ্ঠের বাইরে ক্রিয়াশীল হয় না। পক্ষান্তরে মহাকর্ষ এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের পাল্লা প্রায় অসীম।

চারটি মৌলিক বলের আপেক্ষিক সবলতা সম্বন্ধে ধারণা লাভের জন্য যদি মহাকর্ষ বলের সাপেক্ষে সবল নিউক্লীয় বলের মান 10^{41} ধরা হয়, তবে দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িৎ-চুম্বকীয় বল এবং মহাকর্ষ বলের আপেক্ষিক সবলতার মান হবে যথাক্রমে 10^{30}, 10^{39} ও 1। আবার সবল নিউক্লীয় বলের সাপেক্ষে মহাকর্ষ বলের মান 10^{-41} হলে দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িৎ চৌম্বক বল ও সবল নিউক্লীয় বলের মান হবে যথাক্রমে 10^{-11}, 10^{-2}, 1। [MAT: 21-22]

চারটি মৌলিক বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য বিজ্ঞানীরা বহু বছর ধরে চেষ্টা চালিয়ে যাচ্ছেন। প্রফেসর আব্দুস সালাম, ওয়াইনবার্গ ও গ্লাসো তিনজন বিজ্ঞানী দীর্ঘদিন গবেষণা করে দুর্বল নিউক্লীয় বল এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করেছেন যা **সালাম-ওয়াইনবার্গের তত্ত্ব** নামে পরিচিত। মহাকর্ষ বলের পাল্লা অসীম, তড়িৎ চুম্বকীয় বলের পাল্লা অসীম, সবল নিউক্লীয় বলের পাল্লা 10^{-15} m, দুর্বল নিউক্লীয় বলের পাল্লা 10^{-16} m।

৪.১.৩ ভরবেগ
Momentum

মনে কর, দুটি বস্তুর মধ্যে কোনো কারণে সংঘর্ষ ঘটল। সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয় কোনদিকে যাবে তা কীসের দ্বারা নির্ধারণ করবে ? এদের ভর দ্বারা না এদের বেগ দ্বারা ? একটি গতিশীল সাইকেল অপেক্ষা একটি গতিশীল রিকশার ধাক্কা অনেক বেশি কেন ? গতিশীল সাইকেল অপেক্ষা গতিশীল রিকশা থামানো কঠিন কেন ? এসব ঘটনার কারণ হলো ভরবেগ।

তাহলে ভরবেগ কী ? বলা যায় ভর ও বেগের সমন্বয়ে কোনো গতিশীল বস্তুতে সৃষ্ট গতির পরিমাণই হলো বস্তুর ভরবেগ। ভর স্থির রেখে বেগ বাড়ালে বস্তুর ভরবেগও বাড়ে। একই বস্তু বেশি বেগে চললে তার ভরবেগ বেশি হয়। বেগ যতগুণ বেশি হয় বস্তুটিকে একই সময়ে থামাতে আগের থেকে ততগুণ বেশি বল প্রয়োগ করতে হয়। একটি গাড়ি যদি দ্বিগুণ বেগে চলে, তা হলে গাড়িটিকে থামাতে আগের থেকে দ্বিগুণ বল প্রয়োগ করতে হয়। রাইফেলের গুলির ভর খুব কম, কিন্তু বেগ অত্যন্ত বেশি, ফলে ভরবেগ বেশি হওয়ায় রাইফেলের গুলির আঘাত প্রচণ্ড হয়।

সংজ্ঞা : বস্তুর ভর ও বেগের সমন্বয়ে বস্তুতে যে ধর্মের উদ্ভব হয় তাকে বস্তুর ভরবেগ বলে। বস্তুর ভর ও বেগের গুণফল দ্বারা ভরবেগ পরিমাপ করা হয়। গতি জড়তা ভরবেগের সমানুপাতিক। ইহা একটি ভেক্টর রাশি।

একক : ভরবেগের এস. আই. একক kg-ms^{-1}

মাত্রা : [P] = [MLT^{-1}]

৪.২ নিউটনের গতিসূত্র
Newton's laws of motion

1687 সালে স্যার আইজ্যাক নিউটন তাঁর বিখ্যাত ও অমর গ্রন্থ *ন্যাচারালিস ফিলোসোফিয়া প্রিন্সিপিয়া ম্যাথেমেটিকা*-তে বস্তুর ভর, গতি ও বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে তিনটি সূত্র প্রকাশ করেন। এই তিনটি সূত্র নিউটনের গতিসূত্র নামে পরিচিত।

প্রথম সূত্র (First law) : বাহ্যিক বল প্রয়োগে বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন করতে বাধ্য না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থিরই থাকবে এবং গতিশীল বস্তু সমবেগে অর্থাৎ সমদ্রুতিতে সরলপথে চলতে থাকবে।

দ্বিতীয় সূত্র (Second law) : বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যেদিকে ক্রিয়া করে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।

তৃতীয় সূত্র (Third law) : প্রত্যেক ক্রিয়ারই একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : স্থির মোটর গাড়িতে বসে থাকা কোনো আরোহী ভেতর থেকে ঠেলে গাড়িটি গতিশীল করতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

মোটর গাড়ির ভেতরে বসা কোনো আরোহী গাড়ির ওপর বল প্রয়োগ করলে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র অনুসারে গাড়ি ও আরোহীর ওপর সমান ও বিপরীত বল ক্রিয়াশীল হয়। এই দুই ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বলের প্রভাবে গাড়ি ও আরোহীর সমন্বয়ে গঠিত সিস্টেমের মোট ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না। ফলে গাড়িও গতিশীল হয় না। তাই গাড়িটি স্থিরই থাকবে।

৪.২.১ প্রথম গতিসূত্রের আলোচনা
Discussion of the first law of motion

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানতে পারি যে, বস্তুর ওপর কোনো বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে বস্তুটি নিজের অবস্থানের পরিবর্তন করতে পারে না। বস্তুটি স্থিতিশীল অবস্থায় থাকলে সর্বদাই স্থিতিশীল, আবার গতিশীল অবস্থায় থাকলে সর্বদাই একই সরলরেখা বরাবর সুষম বেগে গতিশীল থাকতে চায়। বস্তুর এই বিশেষ ধর্মের জন্য বস্তু তার স্থিতিশীলতা বা গতীয় অবস্থা পরিবর্তন করার চেষ্টাকে বাধা দেয়। বস্তুর এই বিশেষ ধর্মকে জড়তা (inertia) বলা হয়। প্রথম সূত্র থেকে বস্তুর এই জড়তার ধর্ম জানা যায়। তাই একে **জড়তা বা জাড্যের সূত্র (law of inertia)** বলে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : প্রযুক্ত বলের অবর্তমানে একটি বস্তু কী বক্রপথে চলতে পারে?

বক্রপথ বরাবর গতিশীল বস্তুর সর্বদা একটি ত্বরণ থাকে। নিউটনের গতি সূত্রানুযায়ী কোনো বস্তুর ওপরে বল প্রযুক্ত না হলে কণাটির ত্বরণ থাকা সম্ভব নয়। সুতরাং প্রযুক্ত বলের অবর্তমানে একটি বস্তু বক্রপথে চলতে পারে না।

৪.২.২ নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র
Newton's second law of motion

সূত্র : ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এই বল যেদিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।

এই সূত্রের সাহায্যে বলের অভিমুখ, পরিমাণ, গুণগত বৈশিষ্ট্য, ত্বরণের সঙ্গে বলের সম্পর্ক, একক বল, বলের একক ও বলের নিরপেক্ষ নীতি সম্বন্ধে জানতে পারা যায়।

$\vec{F} = m\vec{a}$ সমীকরণ প্রতিপাদন (ক্যালকুলাস পদ্ধতিতে)

মনে করি কোনো একটি বস্তুর ভর m এবং এটি $\vec{v}_0$ সমবেগে চলছে [চিত্র ৪.৩]।

চিত্র ৪.৩

ধরি একটি ধ্রুব বল (constant force) $\vec{F}$ এই বস্তুর ওপর তার গতির দিকে t সময় ধরে ক্রিয়া করল। ফলে বস্তুর বেগ পরিবর্তিত হয়ে $\vec{v}$ হলো।

কাজেই $\vec{v}$ বেগে গতিশীল বস্তুটির ভরবেগ $\vec{P} = m\vec{v}$ ... ... (4.2)

সুতরাং ভরবেগের পরিবর্তনের হার $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক

$\therefore \quad \vec{F} \propto \frac{d\vec{P}}{dt} = k\frac{d\vec{P}}{dt} = k\frac{d}{dt}(m\vec{v})$

$\therefore \quad \vec{F} = km\frac{d\vec{v}}{dt} = km\vec{a}$ ... ... (4.3) $\left[\text{এখানে } k = \text{ ধ্রুবক, } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}\right]$

একক বলের সংজ্ঞা থেকে নিম্নোক্তভাবে $k = 1$ দেখানো যায়।

যখন $m = 1$ একক, $|\vec{a}| = 1$ একক, তখন $|\vec{F}| = 1$ একক।

$\therefore$ সমীকরণ (4.4)-এ মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই,

$1 = k.1 \times 1$

$\therefore \quad k = 1$

$\therefore \quad \vec{F} = m\vec{a}$ ... ... (4.4)

বস্তুটির ওপর একটি বল প্রযুক্ত না হয়ে যদি $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots \vec{F}_n$ ইত্যাদি বল প্রযুক্ত হয় তাহলে বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল নিট বল $= \sum\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \ldots + \vec{F}_n$

$\therefore$ নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হলো $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ ... ... [4.4(a)]

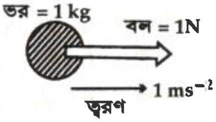
এখানে ত্বরণের দিক নিট বলের বরাবর। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রের সাহায্যে একক বলের সংজ্ঞা পাওয়া যায়।

একক ভরের কোনো বস্তুর ওপর একক ত্বরণ সৃষ্টি করতে যে বল প্রযুক্ত হয়, তাকে একক বল বলে। অর্থাৎ,

এস. আই. পদ্ধতিতে, $m = 1$ kg

$|a| = 1 \text{ ms}^{-2}$ হলে,

F = 1 N, [চিত্র ৪·৪]



চিত্র ৪·৪

সুতরাং সমীকরণ (4.3) অনুযায়ী আমরা পাই,

$\vec{F} = m\vec{a}$ ... ... (4.5)

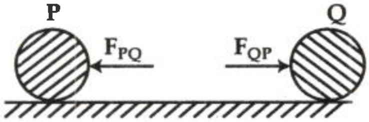
অর্থাৎ **বল = ভর × ত্বরণ**

এটিই হলো বলের মান নির্দেশক সমীকরণ।

জেনে রাখ : নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র হতে বলের একক, একক বলের সংজ্ঞা, বলের অভিমুখ, বলের নিরপেক্ষ নীতি ইত্যাদি জানা যায়।

৪·২·৩ তৃতীয় গতিসূত্রের আলোচনা
Discussion of third law of motion

নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী প্রত্যেক ক্রিয়ার সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া রয়েছে। ধরা যাক, P ও Q দুটি বস্তু রয়েছে। P বস্তু কর্তৃক Q বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল $\vec{F}_{QP}$ [চিত্র ৪·৫]। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে Q বস্তুটিও P বস্তুটির ওপর একটি প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। Q বস্তু কর্তৃক P বস্তুর ওপর প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বল $\vec{F}_{PQ}$ হলে আমরা পাই, $\vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{QP}$।



চিত্র ৪·৫

উল্লেখ্য, ক্রিয়া বল এবং প্রতিক্রিয়া বল সর্বদা জোড়ায় জোড়ায় উপস্থিত থাকে। যতক্ষণ ক্রিয়া স্থায়ী হয়, ততক্ষণই প্রতিক্রিয়া স্থায়ী হয়। ক্রিয়া না থাকলে প্রতিক্রিয়াও থাকে না।

উদাহরণ : যখন একটি ক্রিকেট বলকে ব্যাট দ্বারা আঘাত করা হয়, তখন বলটি সামনের দিকে উচ্চ বেগে গতিশীল হয়। বলটির দ্বারা ব্যাটে প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বলের দরুন ব্যাট পিছনের দিকে গতিশীল হয়।

৪.৩ বলের নিরপেক্ষ নীতি
Independent principle of force

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে সময়ের সাথে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তন বলের ক্রিয়া অভিমুখে সংঘটিত হবে। কাজেই বলের ক্রিয়া অভিমুখে বস্তুতে যে ভরবেগ থাকবে সময়ের সাথে তা-ই শুধু পরিবর্তিত হবে। একাধিক বলের ক্ষেত্রেও একের ক্রিয়া অন্যের দ্বারা প্রভাবিত হবে না। বস্তুর ওপর বলের ক্রিয়ার এই বৈশিষ্ট্যকে **বলের নিরপেক্ষ নীতি বা ভৌত অনির্ভরশীলতা বলা হয়।**

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা যা জানতে পারলাম তা হলো :

(i) বস্তুর ত্বরণ প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক হয়।

(ii) বলের ক্রিয়া বন্ধ হয়ে গেলে বস্তুটির ত্বরণ বা মন্দন থাকে না।

(iii) বলের অভিমুখই ত্বরণের অভিমুখ।

(iv) বস্তুর ওপর বল ক্রিয়া করলে বস্তুটি ত্বরণ নিয়ে চলতে থাকে।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১

১। একটি বস্তু স্থিরাবস্থায় ছিল। 15 N-এর একটি বল এর ওপর 4 সেকেন্ড ধরে কাজ করে এবং তারপর আর কোনো কাজ করল না। এরপর বস্তুটি সমবেগে 9 সেকেন্ডে 54 m দূরত্ব গেল। বস্তুটির ভর বের কর।

[RUET Admission Test, 2012-13]

এখানে,
$F = 15\text{ N}$
$t_1 = 4\text{ s}$
$t_2 = 9\text{ s}$
$s = 54\text{ m}$
$v_0 = 0$ (যেহেতু বস্তু স্থির)

যেহেতু বলটি বস্তুর ওপর 4s ক্রিয়ার পর আর ক্রিয়া করে না সেহেতু বস্তুটি শেষ 9s সময় সমবেগে যাবে।

$$\therefore v = \frac{s}{t_2} = \frac{54}{9} = 6\text{ ms}^{-1}$$

আমরা জানি, $v = v_0 + at_1$

বা, $6 = 0 + a \times 4$

বা, $6 = 4a$ বা, $a = \frac{6}{4}$

$\therefore a = 1{\cdot}5\text{ ms}^{-2}$

আবার, $F = ma$

বা, $15 = m \times 1{\cdot}5$ বা, $m = \frac{15}{1{\cdot}5}$

$\therefore m = 10\text{ kg}$

২। 800 kg ভরের একটি গাড়ি 24 ms⁻¹ বেগে চলছিল। একটি বিরুদ্ধ বল প্রয়োগে গাড়িটিকে 60 m দূরে থামানো হলো। বিরুদ্ধ বলের মান ও কত সময় পরে গাড়িটি থামবে নির্ণয় কর।

এখানে,
$m = 800\text{ K}$
$u = 24\text{ ms}^{-1}$
$s = 60\text{ m}$
$F = ?$
$t = ?$
$v = 0$

আমরা জানি,

$v^2 = u^2 + 2as$

বা, $0 = (24)^2 + 2a \times 60$

বা, $a = -\frac{24 \times 24}{2 \times 60}$

$= -4{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$

অর্থাৎ মন্দন $= 4{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$

গাড়ির ওপর প্রযুক্ত বল,

$F = ma = 800 \times 4{\cdot}8$

$= 3840\text{ N}$

আবার,

$v = u + at = 24 + (-4{\cdot}8)\,t$

বা, $t = \frac{24}{4{\cdot}8} = 5\text{ sec}$

৩। একটি বস্তুর ওপর 7N মানের একটি বল প্রয়োগ করা হলে বস্তুটি $3\ ms^{-2}$ ত্বরণ প্রাপ্ত হয়। বস্তুটির ভর কত ? বস্তুটির ওপর 5N মানের আর একটি বল 7N মানের বলের সাথে 60° কোণে প্রয়োগ করলে বস্তুটির ত্বরণ কত হবে ? [চ. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৩]

প্রথম অংশ :

আমরা জানি,

$$F = ma$$
$$\therefore 7 = m \times 3$$
$$\therefore m = \frac{7}{3} = 2.33\ kg$$

এখানে,
$F = 7\ N$
$a = 3\ ms^{-2}$
$m = ?$

দ্বিতীয় অংশ :

মনে করি, লব্ধি বল R

এখন, $R = (P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore R = (7^2 + 5^2 + 2 \times 7 \times 5 \times \cos 60°)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(49 + 25 + 2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (74 + 35)^{\frac{1}{2}} = (109)^{\frac{1}{2}} = 10.44\ N$$

এখানে,
$P = 7N$
$Q = 5N$
$\alpha = 60°$

আবার, $R = ma'$

$$\therefore a' = \frac{R}{m} = \frac{10.44}{2.33}\ ms^{-2}$$
$$= 4.48\ ms^{-2}$$

এখানে,
$R = 10.44N$
$m = 2.33\ kg$
$a' = ?$

উত্তর : বস্তুটির ভর 2.33 kg এবং ত্বরণ $4.48\ ms^{-2}$

৪। 980 N ওজনের একটি বস্তুকে $1\ ms^{-2}$ ত্বরণ দিতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ?

আমরা জানি,

$$W = mg$$
$$\text{বা, } m = \frac{W}{g} = \frac{980}{9.8} = 100\ kg$$

এখানে,
বস্তুর ওজন, $W = 980\ N$
ত্বরণ, $a = 1\ ms^{-2}$
$F = ?$

আবার আমরা জানি,

$$F = ma$$
$$\therefore F = 100 \times 1 = 100\ N$$

৫। 4 kg ভরের একটি বস্তুকে $10\ ms^{-2}$ ত্বরণে গতিশীল করতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ? [পথের ঘর্ষণ বল $2.5\ N\ kg^{-1}$] [ব. বো. ২০০১; JU-A Admission Test : 2022-23]

আমরা জানি, কার্যকর বল,

$$F = P - F_k$$
$$\therefore 40 = P - 10$$
$$\text{বা, } P = 50\ N$$

∴ প্রযুক্ত বল = 50N

এখানে,
বস্তুর ভর, $m = 4\ kg$
ত্বরণ, $a = 10\ ms^{-2}$
∴ কার্যকর বল, $F = ma = 4 \times 10 = 40N$
ঘর্ষণ বল = $2.5\ N\ kg^{-1}$
∴ মোট ঘর্ষণ বল, $F_K = 2.5 \times 4 = 10N$
প্রযুক্ত বল, $P = ?$

৬। 40 g ভরের একটি গুলি $400\ ms^{-1}$ প্রাথমিক বেগে একটি দেওয়ালকে $4 \times 10^4\ N$ গড় বলের সাহায্যে ভেদ করে $40\ ms^{-1}$ বেগে তা দেওয়াল থেকে নির্গত হয়। দেওয়ালটির বেধ কত ? অন্য একটি গুলি একই প্রাথমিক বেগ ও একই বল নিয়ে দেওয়ালটিকে ভেদ করতে পারে না। গুলিটির সর্বোচ্চ ভর কত ?

প্রথম অংশ :

দেওয়ালের মধ্যে গুলিটির মন্দন,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4 \times 10^4}{0.04} = 1 \times 10^6\ ms^{-2}$$

আবার,

$$v^2 = v_0^2 - 2ax$$
$$\text{বা, } x = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} = \frac{(400)^2 - (40)^2}{2 \times 1 \times 10^6} = 7.92 \times 10^{-2}\ m$$

এখানে,
প্রাথমিক বেগ, $v_0 = 400\ ms^{-1}$
$m = 40\ g = 0.04\ kg$
$F = 4 \times 10^4\ N$
চূড়ান্ত বেগ, $v = 40\ ms^{-1}$
দেওয়ালের বেধ, $x = ?$

দ্বিতীয় অংশ :

ধরা যাক, দ্বিতীয় গুলিটির ভর $= m_1$ এবং চূড়ান্ত বেগ $v = 0$

$\therefore$ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মন্দন, $a_1 = \frac{v_0^2}{2x}$

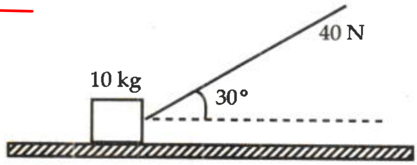
এবং গুলিটির ভর, $m_1 = \frac{F}{a_1} = \frac{F}{\frac{v_0^2}{2x}} = \frac{F \times 2x}{v_0^2}$

বা, $m_1 = \frac{4 \times 10^4 \times 2 \times 7{\cdot}92 \times 10^{-2}}{(400)^2}$

$= \frac{4 \times 10^2 \times 2 \times 7{\cdot}92}{4 \times 4 \times 10^4}$

$= 0{\cdot}0396 \text{ kg} = 39{\cdot}6 \text{ g}$

৭। **10 kg ভরের স্থির বস্তুর ওপর 40 N বল অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়াশীল। বস্তুর ওপর খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়াশীল বল নির্ণয় কর।**



এখানে 40 N বলকে অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশে বিভাজন করে পাই,

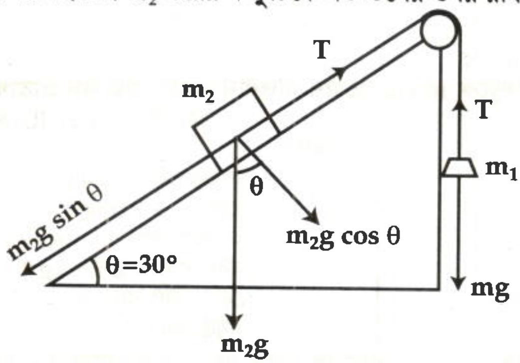
40 cos 30° ও 40 sin 30°

$\therefore$ উল্লম্ব বলগুলো বিবেচনা করে পাই,

অর্থাৎ খাড়া নিচে দিকে ক্রিয়াশীল বল $= mg - 40 \sin 30° = 10 \times 9{\cdot}8 - 40 \sin 30°$

$= 98 - 20 = 78 \text{ N}$

৮। **ভূমির সাথে 30° কোণে আনত একটি মসৃণ তলের শীর্ষে একটি ঘর্ষণবিহীন কপিকল যুক্ত আছে। একটি সুতায় $m_1 = 2$ kg ভরের একটি বস্তু খাড়াভাবে ঝুলিয়ে কপিকলের ওপর দিয়ে নিয়ে এর অপর প্রান্তের সাথে $m_2 = 3$ kg ভরের অপর একটি বস্তু যুক্ত করা হলো। m_2 ভরের বস্তুটিকে নত তলের ওপর রাখলে, এদের ত্বরণ কত হবে ?**



ধরি সুতার টান T ও নির্ণেয় ত্বরণ $= a$

উল্লম্ব তল বরাবর m_2g ওজনের অংশক $= m_2g \sin\theta$

$\therefore \quad m_1g - T = m_1a \quad \dots \quad \dots \quad (i)$

$T - m_2g \sin\theta = m_2a \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$m_1g - m_2g \sin\theta = (m_1 + m_2)\, a$

$\therefore \quad a = \frac{(m_1 - m_2 \sin\theta)g}{m_1 + m_2}$

প্রশ্নমতে, $a = \dfrac{(2 - 3 \times \frac{1}{2}) \times 9{\cdot}8}{2 + 3} = 0{\cdot}98 \text{ ms}^{-2}$

ও সুতার টান, $T = m_1 g - m_1 a$

$= m_1(g - a) = 2(9{\cdot}8 - 0{\cdot}98)$

$= 17{\cdot}64 \text{ N}$

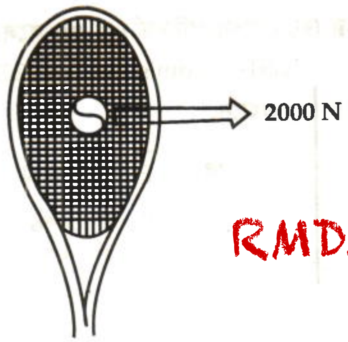
কাজ : ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয় কেন?

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে ত্বরণ কম হলে প্রযুক্ত বল কম হবে। বেগের পরিবর্তন ধ্রুব হলে, এই পরিবর্তনে যত বেশি সময় নেওয়া হবে, ত্বরণের মান তত কম হবে। তাই ক্রিকেট খেলায় ক্যাচ ধরার সময় খেলোয়াড় হাতটাকে পিছনে টেনে নেয়, যাতে বেগের নির্দিষ্ট পরিবর্তনে বেশি সময় লাগে, ফলে ত্বরণ এবং প্রতিক্রিয়া বল কম মানের হয়।

৪.৪ ঘাত বল
Impulsive force

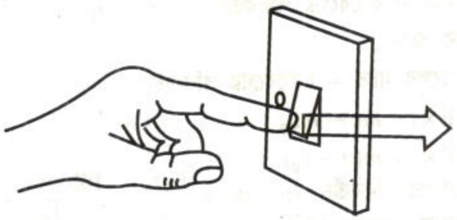
সংঘর্ষ, বিস্ফোরণ, আকস্মিক আঘাত প্রভৃতি ক্ষেত্রে এ ধরনের বল ক্রিয়া করে। ক্যারম খেলার স্ট্রাইকার দিয়ে গুটিকে আঘাত করা, ক্রিকেট বা টেবিল টেনিস খেলার ব্যাট দিয়ে বলকে আঘাত করা, ফুটবলকে কিক করা, হাতুড়ি দিয়ে পেরেক ঠোকা, বাদ্যযন্ত্রের তারে আঘাত করা প্রভৃতি বিশেষ ধরনের বল। একে **ঘাত বল** (Impulsive force) বলে। ঘাত বল এত ক্ষুদ্র সময়ের জন্য ক্রিয়া করে যে ওই সময়ে বস্তুর সরণ পরিহার করা যায়। কিন্তু যেহেতু বলের মান খুব বেশি সুতরাং সেখানে হঠাৎ বেগের পরিবর্তন ঘটে এবং তার সাথে ভরবেগেরও পরিবর্তন ঘটে। সঠিকভাবে ঘাত বল জানা এবং পরিমাপ করা যায় না। এর প্রয়োজনও নেই। যদি ভরবেগের পরিবর্তন পরিমাপ করা যায় অর্থাৎ যদি বলের ঘাত জানা থাকে, তবে বলের মোট ফল জানা যাবে। এই কারণে, **এই ধরনের বলকে ঘাত বল বলে।** অর্থাৎ **খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।** [DAT: 21-22]

উদাহরণ : ধরা যাক, একটি র‍্যাকেট দ্বারা টেনিস বলকে আঘাত করলে প্রচণ্ড একটি বল টেনিস বলের ওপর



(ক) টেনিস বলের ওপর বল

চিত্র ৪.৬(ক)



(খ) আলো জ্বালাতে সুইচের ওপর বল

চিত্র ৪.৬(খ)

আরোপিত হয়। এক্ষেত্রে টেনিস বল এবং র‍্যাকেটের মধ্যকার সংঘর্ষের সময় খুব কম হয়। এই ধরনের বল ঘাত বল [চিত্র ৪.৬(ক)]। আবার ইলেকট্রিক সুইচ যখন অফ বা অন করা হয় তখনো এই ঘাত বল ক্রিয়াশীল হয় [চিত্র ৪.৬(খ)]।

৪.৫ বলের ঘাত
Impulse of force

কোনো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফলকে ওই বলের ঘাত (impulse of force) বলে। $\vec{F}$ বল কোনো বস্তুর ওপর t সময় ধরে ক্রিয়া করলে বলের ঘাত,

[DAT: 18-19]

$$\vec{J} = \vec{F} \times t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.6)$$

$$= \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{t} \times t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \text{ভরবেগের পরিবর্তন}$$

∴ বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি, $\vec{F}$ ধ্রুব বল কোনো একটি বস্তুর ওপরে dt সময় ক্রিয়া করে। তা হলে ঘাত বল, $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt} \times dt = \int_{\vec{p_1}}^{\vec{p_2}} d\vec{P} = \left[\vec{P}\right]_{\vec{p_1}}^{\vec{p_2}} = \vec{P_2} - \vec{P_1} = \Delta\vec{P}$

∴ বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।

৪.৫.১ বলের ঘাত ও ঘাত বলের মধ্যে পার্থক্য

Difference between impulse of a force and impulsive force

১। বলের ঘাত হলো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফল। কিন্তু ঘাত বল হলো একটি বৃহৎ মানের অত্যন্ত ক্ষণস্থায়ী বল।

২। ঘাত বল বলের ঘাত সৃষ্টি করে। এই বল বেশি হলে বলের ঘাতও বৃদ্ধি পাবে। তাই বলা হয় যে ঘাত বল হচ্ছে কারণ এবং বলের ঘাত এর ফল।

৩। ঘাত বলের একক এবং বলের একক একই; অর্থাৎ নিউটন। কিন্তু বলের ঘাত একক ভরবেগের এককের অনুরূপ, অর্থাৎ $kgms^{-1}$

৪। বলের ঘাতের জন্য বায়ুতে ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে; কিন্তু ঘাত বলের ফলে বস্তুতে খুবই অল্প সময়ে বৃহৎ ত্বরণ সৃষ্টি হয়।

৫। ঘাত বলের মাত্রা $[MLT^{-2}]$ এবং বলের ঘাতের মাত্রা $[MLT^{-1}]$

কাজ : কম্বল থেকে ধুলো ঝাড়ার জন্য লাঠি দিয়ে কম্বলকে আঘাত করা হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

কম্বলকে লাঠি দিয়ে আঘাত করলে ধুলোকণাগুলো স্থির জড়তার জন্য স্থির থাকলেও ঘাত বলের জন্য কম্বলের সুতা হঠাৎ গতিশীল হয়, ফলে ধুলোকণা কম্বল থেকে আলাদা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.২

১। 16 N-এর একটি বল 4 kg ভরের ওপর 4 s ক্রিয়া করে। বস্তুটির (ক) বেগের পরিবর্তন ও (খ) বলের ঘাত নির্ণয় কর। [GST-A Admission Test, 2020-21]

(ক) মনে করি বেগের পরিবর্তন $= \vec{v} - \vec{v_0}$

আমরা জানি,

বলের ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন

∴ $F \times t = mv - mv_0$

বা, $F \times t = m(v - v_0)$

∴ বেগের পরিবর্তন, $(v - v_0) = \frac{F \times t}{m} = \frac{16N \times 4\,s}{4\,kg} = 16\ ms^{-1}$

(খ) আবার আমরা জানি,

বলের ঘাত, $J = F \times t$

∴ $J = 16N \times 4\,s$

$= 64\,Ns$

এখানে,

বল, $\vec{F} = 16\,N$

$m = 4\,kg$

$t = 4\,s$

২। 0·05 kg ভরের একটি বস্তু 0·2 ms^{-1} অনুভূমিক বেগে একটি খাড়া দেওয়ালে ধাক্কা দিয়ে 0·1 ms^{-1} বেগে বিপরীত দিকে ফিরে গেল। বলের ঘাত বের কর। [ব. বো. ২০০৬]

ধরি বলের ঘাত = J

আমরা পাই, $J = F \times t$ ও $F = \frac{m(v - v_0)}{t}$

∴ $J = m(v - v_0)$

$= 0·05 \times (-\ 0·1 - 0·2)$

$= -\ 0·015\ kg\text{-}ms^{-1}$ (ঋণচিহ্ন প্রমাণ করে যে, J ও v-এর অভিমুখ অভিন্ন)।

∴ $|J| = 0·015\ kg\text{-}ms^{-1}$

এখানে,

$m = 0·05\ kg$

$v_0 = 0·2\ ms^{-1}$

$v = -\ 0·1\ ms^{-1}$ (আদি বেগের সাপেক্ষে শেষ বেগ বিপরীতমুখী হেতু ঋণচিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে)।

৩। একজন সাইকেল চালক 8 ms^{-1} বেগে চলাকালে সাইকেল চালানো বন্ধ করে লক্ষ করেন যে 49 m দূরত্ব অতিক্রমের পর সাইকেলটি থেমে যায়। সাইকেলের টায়ার ও রাস্তার মধ্যকার ঘর্ষণ বল ও 2 sec সময়ে বলের ঘাত নির্ণয় কর। [আরোহীসহ সাইকেলের ভর = 147 kg]

ধরি ঘর্ষণ বল = F ও F-এর জন্য সৃষ্ট মন্দন = a

আমরা পাই, $v^2 = v_0^2 - 2as$

বা, $a = \dfrac{v_0^2 - v^2}{2s}$ ... ... (i)

∴ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$F = ma = \frac{m(v_0^2 - v^2)}{2s}$$

$$= 147\text{ kg}\ \frac{\{(8\text{ ms}^{-1})^2 - 0\}}{2 \times 49\text{ m}} = 96\text{ N}$$

এখানে, $v = 0$
$v_0 = 8\text{ ms}^{-1}$
$m = 147\text{ kg}$
$s = 49\text{ m}$

∴ ঘর্ষণ বল, $F = 96$ N এবং 2 sec সময়ে বলের ঘাত $= F \times t = 96 \times 2 = 192$ N-s

৪। 10 ms^{-1} বেগে আগত 150 g ভরের একটি ক্রিকেট বলকে একটি ব্যাট দিয়ে আঘাত করা হলো। বলটি 18 ms^{-1} বেগে ফিরে গেল। ব্যাটে-বলে সংঘাতের স্থায়িত্বকাল 0·01 s হলে ব্যাট দ্বারা ক্রিকেট বলের ওপর প্রযুক্ত গড় বলের মান বের কর। [BUET Admission Test, 2019-20]

আমরা জানি,

$$F \times t = mv - mu$$

$$F = \frac{m(v-u)}{t}$$

$$= \frac{0{\cdot}15 \times (-18-10)}{0{\cdot}01} = -420\text{ N}$$

∴ $|F| = 420$ N

এখানে,
আদিবেগ, $v_0 = 10\text{ ms}^{-1}$
ক্রিকেট বলের ভর, $m = 150$ g $= 0{\cdot}150$ kg
শেষ বেগ, $v = -18\text{ ms}^{-1}$
গড় বল, F = ?
$t = 0{\cdot}01$ s

৫। দুটি বিলিয়ার্ড বল যার প্রত্যেকটির ভর 0·04 kg সরলরেখা বরাবর বিপরীত দিক থেকে 5 ms^{-1} বেগে এসে সংঘর্ষ ঘটায় এবং একই বেগে বিপরীত দিকে চলে যায়। একটি বল কর্তৃক অন্যটির ওপর বলের ঘাত কত ?

একটি বলের প্রাথমিক ভরবেগ,

$$P_1 = mv_0$$

এবং সংঘর্ষের পরে ওই বলের ভরবেগ,

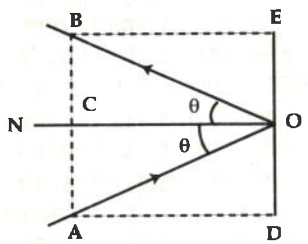
$$P_2 = mv$$

∴ ভরবেগের পরিবর্তন, $P_1 - P_2 = mv_0 - mv$

এখানে,
$m = 0{\cdot}04$ kg
$v_0 = 5\text{ ms}^{-1}$
$v = -5\text{ ms}^{-1}$

অতএব বলের ঘাত, $J = mv_0 - mv = m(v_0 - v)$
$= 0{\cdot}04\{5-(-5)\}$
$= 0{\cdot}4\text{ kgms}^{-1}$

৬। 0·20 kg ভরের একটি ক্রিকেট বল 20 ms^{-1} বেগে ছুটে যাচ্ছিল। ব্যাটের সাহায্যে বলটিকে 60° কোণে একই বেগে বিক্ষিপ্ত করলে বলটির ওপর কত ঘাত প্রযুক্ত হবে ?



চিত্র অনুযায়ী, বলটি AO বরাবর $u = 20\text{ ms}^{-1}$ চলমান অবস্থায় ব্যাটের গায়ে O বিন্দুতে আঘাত করে এবং একই বেগে OB বরাবর ছুটে যায়।

প্রাথমিক বেগ AO-এর সমকৌণিক উপাংশদ্বয়,

AC = DO = $u \sin\theta$ (DO বরাবর) এবং AD = CO = $u\cos\theta$ (CO বরাবর)

চূড়ান্ত বেগ OB-এর সমকৌণিক উপাংশদ্বয়,

OE = $u\sin\theta$ (OE বরাবর) এবং OC = $u\cos\theta$ (OC বরাবর)

সুতরাং ব্যাটের গা OE বরাবর বেগের পরিবর্তন,

$= u\sin\theta - u\sin\theta = 0$; অর্থাৎ OE বরাবর ভরবেগের পরিবর্তনও শূন্য

ব্যাটের সমকোণে ভরবেগের পরিবর্তন $= mu\cos\theta - (-mu\cos\theta)$
$= 2\,mu\cos\theta$

∴ বলের ঘাত $= 2\,mu\cos\theta$
$= 2 \times 0{\cdot}20 \times 20 \times \cos 30°$
$= 2 \times 0{\cdot}20 \times 20 \times 0{\cdot}866$
$= 6{\cdot}928 \text{ kg ms}^{-1}$

এখানে,
$m = 0{\cdot}20 \text{ kg}$
$u = 20 \text{ ms}^{-1}$
$\theta = \frac{60°}{2} = 30°$

৭। 10 kg ভরের পড়ন্ত বস্তুর ত্বরণ কত ? যখন বাতাসের বাধা 78 N। [$g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$]

[Admission Test : RUET 2014-15; JU-A 2022-23 (মান ভিন্ন); RU-C 2022-23]

আমরা জানি,

$ma = mg -$ বাতাসের বাধা

$$\therefore \quad a = \frac{mg - 78}{m}$$
$$= \frac{10 \times 9{\cdot}8 - 78}{10} = \frac{98 - 78}{10}$$
$$= 2{\cdot}0 \text{ ms}^{-2}$$

৮। 25 g ভরের একটি বুলেট 100 cms^{-1} বেগে, 15 cm পুরু একটি কাঠের দেয়ালে প্রবেশ করে ও দেয়াল ভেদ করে 75 cms^{-1} বেগে বেরিয়ে যায়। বুলেটের গড় বল কত ? [RUET Admission Test, 2008-09]

যেহেতু $v_0 > v$ কাজেই বুলেটটির মন্দন হয়েছে।

আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

বা, $$a = \frac{v_0^2 - v^2}{2\,s}$$

আবার,

$$F = ma = m\left(\frac{v_0^2 - v^2}{2\,s}\right)$$
$$= 25 \times 10^{-3}\left(\frac{1^2 - (0{\cdot}75)^2}{2 \times 0{\cdot}15}\right)$$
$$= 0{\cdot}0365 \text{ N}$$

এখানে,
$m = 25 \text{ g} = 25 \times 10^{-3} \text{ kg}$
$v_0 = 100 \text{ cm s}^{-1} = 1 \text{ ms}^{-1}$
$v = 75 \text{ cm s}^{-1} = 0{\cdot}75 \text{ ms}^{-1}$
$s = 15 \text{ cm} = 0{\cdot}1 \text{ m}$

৪.৬ নিউটনের গতির সূত্রগুলোর মধ্যে সম্পর্ক
Relation between Newton's laws of motion

নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হলে সূত্রগুলো সম্পর্কে সম্যক ধারণা অবশ্যই থাকতে হবে এবং সূত্রগুলো কী কী বিষয় নিয়ে আলোচনা করে সে সম্পর্কেও আমাদের জ্ঞান থাকা আবশ্যক।

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, বাইরে থেকে কোনো প্রভাব ক্রিয়া না করলে কোনো বস্তু নিজের অবস্থার পরিবর্তন চায় না। স্থির বস্তু স্থির থাকবে আবার গতিশীল বস্তু গতিশীল অবস্থায় সরল পথে চলতে থাকবে। বস্তুর জড়তা ধর্মের কারণে এরূপ ঘটে। এই জড়তার বিরুদ্ধে কিছু করতে হলে অর্থাৎ স্থির বস্তুকে গতিশীল করতে হলে আবার গতিশীল বস্তুর গতির পরিবর্তন ঘটাতে হলে তার ওপর বল প্রয়োগ করতে হবে। এই ধারণা থেকে নিউটনের গতির ২য় সূত্র প্রয়োগ করতে পারি। কোনো বস্তুর ভর যত বেশি হয় তার ভরবেগও তত বেশি হবে। মনে করি গতিশীল অবস্থায় একটি বস্তুর ভর m এবং বেগ v; আর একটি বস্তুর ভর 2 m কিন্তু বেগ একই অর্থাৎ বেগ v। তা হলে প্রথম বস্তুর ভরবেগ $= mv$ এবং দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগ $= 2\,mv$। বাধা দিয়ে অর্থাৎ বল প্রয়োগ করে বস্তু দুটিকে যদি একই সময়ের মধ্যে থামানো হয় তবে দ্বিতীয়টির ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রথমটির দ্বিগুণ হবে। দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা জানি যে, প্রযুক্ত বল বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সমানুপাতিক হয়। অতএব দ্বিতীয় বস্তুটিকে একই সময়ের মধ্যে থামাতে গেলে প্রথম বস্তুর থেকে দ্বিগুণ বল প্রয়োগ করতে হয়। আবার যদি সমান দুটি বল (F) বস্তু দুটির ওপর প্রয়োগ করা হয় তা হলে প্রথম বস্তুর ত্বরণ a_1 এবং দ্বিতীয় বস্তুর ত্বরণ a_2 হলে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে $F = ma_1$ এবং $F = 2\,ma_2$ হবে।

সুতরাং দেখা যায় যে, বস্তুর জড়তার সাথে ভরবেগের ও ত্বরণের মধ্যে একটি সম্পর্ক বিদ্যমান যার মাধ্যমে নিউটনের ১ম ও ২য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায় বা এক সূত্র হতে অন্য সূত্রে রূপান্তর করা যায়।

অন্যভাবে বস্তু দুটিকে যদি F_1 ও F_2 বলে একই সরলরেখা বরাবর প্রয়োগ করা হয়, তা হলে চলতে চলতে কোনো এক সময় বস্তু দুটি সংঘর্ষে লিপ্ত হতে পারে। যখনই সংঘর্ষে লিপ্ত হয় তখন ২য় বস্তুটি ১ম বস্তুর ওপর সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। এক্ষেত্রে যে বলের কারণে দ্বিতীয় বস্তু আঘাতপ্রাপ্ত হয়, তাকে **ক্রিয়া বল** বলে আর এই বস্তুটি আঘাতপ্রাপ্তির পর বিপরীত দিকে প্রথম বস্তুর ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে **প্রতিক্রিয়া বল** বলে। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী জানা যায় এই ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান।

উপরের ঘটনা থেকে লক্ষ করা যায় যে, বস্তুর জড়তা বল প্রয়োগে ত্বরণ সৃষ্টি এবং ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার সকল কর্মকাণ্ডই নিউটনের গতির প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্রের পারস্পরিক সম্পর্কিত ঘটনা।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৩

১। 5 kg ভরের একটি হাতুড়ি 5 m উঁচু থেকে একটি পেরেকের ওপর আপতিত হলো এবং $\frac{1}{20}$ সেকেন্ডে স্থির হলো। পেরেকের ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ($g = 10\ \text{ms}^{-2}$)

এখানে,
$m = 5\ \text{kg}$
$s = 5\ \text{m}$
$g = 10\ \text{ms}^{-2}$
$t = \frac{1}{20}\ \text{s}$
$\text{F} = ?$

হাতুড়ির প্রাথমিক বেগ, $u = 0$

পেরেকের ওপর পড়ার মুহূর্তে হাতুড়ির বেগ v হলে, আমরা পাই,

$$v^2 = u^2 + 2gs = 0 + 2 \times 10 \times 5 = 100$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{100} = 10\ \text{ms}^{-1}$$

হাতুড়িটি $\frac{1}{20}$ সেকেন্ডে স্থির হয়।

সুতরাং হাতুড়িটির গতির জন্য পেরেকের ওপর প্রযুক্ত বল,

$$\text{F} = \frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}} = \frac{m(v - u)}{t}$$

$$= \frac{5\,(10 - 0)}{\frac{1}{20}} = 50 \times 20 = 1000\ \text{N}$$

২। 8 cm ব্যাসের একটি হোস পাইপ অনুভূমিকভাবে একটি খাড়া দেওয়ালের ওপর 8 ms^{-1} বেগে পানি ফেলছে। আঘাতের পর দেওয়ালের লম্ব দিকে পানির বেগ শূন্য হলে দেওয়ালে কত বল ক্রিয়া করে ? (পানির ঘনত্ব 1000 kg m^{-3})

এখানে,
$d = 8\ \text{cm}$
$r = \frac{8}{2}\ \text{cm} = 4\ \text{cm} = 4 \times 10^{-2}\ \text{m}$
$v = 8\ \text{ms}^{-1}$
$\rho = 1000\ \text{kgm}^{-3}$
$\text{F} = ?$

ধরা যাক, হোস পাইপের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $= \text{A}\ \text{m}^2 = \pi r^2\ \text{m}^2$
এবং নির্গত পানির বেগ $= 8\ \text{ms}^{-1}$
অতএব প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ পানি দেওয়ালে আঘাত করে তার ভর,

$$m = \text{A} \times v \times \rho = 3{\cdot}14 \times (4 \times 10^{-2})^2 \times 8 \times 1000$$

আঘাতের পর দেওয়ালের লম্ব দিকের পানির বেগ $= 0$

$\therefore$ প্রতি সেকেন্ডে দেওয়ালে আঘাতকারী পানির ভরবেগের

$$\text{পরিবর্তন} = \text{A}v^2\rho - 0 = \text{A}v^2\rho = \pi r^2 \times v^2 \times \rho$$

$\therefore$ দেওয়ালে প্রযুক্ত বল,

$$\text{F} = \text{A}v^2\rho = \pi r^2 v^2 \rho = 3{\cdot}14 \times (4 \times 10^{-2})^2 \times 8^2 \times 1000 = 3{\cdot}14 \times 16 \times 10^{-4} \times 64 \times 1000 = 321{\cdot}5\ \text{N}$$

৪.৬.১ নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক
Mutual relation of Newton's laws of motion

গাণিতিকভাবে নিউটনের গতিসূত্রগুলোর মধ্যে নিম্নোক্ত উপায়ে পারস্পরিক সম্পর্ক স্থাপন করা যায়।

■ **২য় সূত্র এবং ১ম সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :**

নিউটনের গতির ২য় সূত্র থেকে জানি ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক

অর্থাৎ $\frac{m\vec{v} - m\vec{v_0}}{t} \propto \vec{\text{F}}$ $\quad \therefore \quad \frac{m(\vec{v} - \vec{v_0})}{t} \propto \vec{\text{F}}$ $\quad$ বা, $m\vec{a} \propto \vec{\text{F}}$

বা, $m\vec{a} = k\vec{\text{F}}$, $k = 1$ হলে

$\vec{\text{F}} = m\vec{a}$, এখানে $\vec{\text{F}} =$ প্রযুক্ত বল, $\vec{a} =$ ত্বরণ, $\vec{v_0} =$ আদিবেগ, $\vec{v} =$ শেষ বেগ

বাইরে থেকে বল প্রযুক্ত না হলে $\vec{\text{F}} = 0$ হয় এবং $\vec{a} = 0$ হয়।

কিন্তু বস্তুর ভর শূন্য হয় না তাই $m \neq 0$, সুতরাং $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ অর্থাৎ $\vec{v} =$ ধ্রুবক ... (4.7)

তাই বলা যায় বাহ্যিক বলের ক্রিয়া না থাকলে বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না। স্থির বস্তু স্থির আর গতিশীল বস্তুর গতির কোনো পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ বাহ্যিক বলের অনুপস্থিতিতে বস্তুকণার ভরবেগ সব সময় সমান বা ধ্রুব থাকে।

■ ১ম সূত্র এবং ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :

নিউটনের গতির ১ম সূত্র থেকে আমরা জানি বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে ভরবেগ ধ্রুব থাকে।

অর্থাৎ ভরবেগ, $\vec{P} = m\vec{v}$ = ধ্রুবক ... ... (4.8)

t-এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই

$$\therefore \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d(\vec{v})}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.9)$$

আবার দুটি বস্তুর মধ্যে একটি বস্তু যখন অপরটির ওপর বল প্রয়োগ করে তখন লব্ধি ভরবেগের পরিবর্তনের হারের মান সমান ও বিপরীত হয়।

$$\therefore \frac{d\vec{P_1}}{dt} = -\frac{d\vec{P_2}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v_1}) = -\frac{d}{dt}(m_2\vec{v_2}) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [4.9(a)]$$

বা, $m_1\vec{a_1} = -m_2\vec{a_2}$ বা, $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$, **অর্থাৎ ক্রিয়া বল = প্রতিক্রিয়া বল।**

∴ [4.9(a)] এই সমীকরণ দ্বারা নিউটনের গতির ১ম ও ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যায়।

■ ২য় সূত্র এবং ৩য় সূত্রের মধ্যে সম্পর্ক :

নিউটনের গতির ২য় সূত্র থেকে আমরা জানি, ভরবেগের পরিবর্তনের হারই হলো প্রযুক্ত বল। ঘাত বল বিবেচনা করলে লেখা যায়,

ঘাত বল = ভরবেগের পরিবর্তন

এক্ষেত্রে যে বলের কারণে ঘাত সৃষ্টি হয় বিপরীত ক্রমে সেই বলের কারণে প্রতিঘাত সৃষ্টি হয়। এক্ষেত্রে বলা যায়

ক্রিয়া = প্রতিক্রিয়া

ইহাই নিউটনের ৩য় সূত্র।

৪·৬·২ নিউটনের গতিসূত্রের ব্যবহার

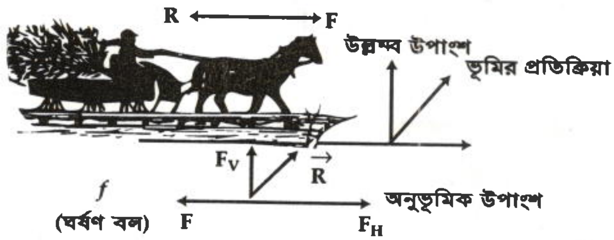
Applications of Newton's laws of motion

একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করে তখন দ্বিতীয় বস্তুটিও প্রথম বস্তুটির ওপর একটি সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। এই ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সংক্রান্ত বলের বিবরণ আমরা নিউটনের তৃতীয় সূত্র থেকে জেনেছি। প্রকৃতিতে বল সব সময় জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে। প্রকৃতিতে একক বিচ্ছিন্ন বল বলে কিছু থাকতে পারে না। দুটি বলের একটি অপরের পরিপূরক। এদের একটি ক্রিয়া অপরটি প্রতিক্রিয়া বল। ক্রিয়া বল যতক্ষণ থাকে প্রতিক্রিয়া বলও ততক্ষণ স্থায়ী হয়। নিউটনের গতিসূত্রের কয়েকটি ব্যবহারিক প্রয়োগ উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা করা হলো।

১। ঘোড়ার গাড়ির চলাচল :

ঘোড়ার গাড়ি রাস্তায় যখন চলে তখন ঘোড়ার কাঁধে বেল্ট বা হাতলের ওপর F বল প্রয়োগ করে গাড়িটিকে সামনের দিকে নিয়ে যায়; সাথে সাথে গাড়িও ঘোড়াকে পেছনের দিকে সমান ও বিপরীতমুখী F বলে টানতে থাকে। স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন করা যায় যে, গাড়িটি সামনের দিকে কী করে এগোয় ? নিচের চিত্রটি লক্ষ কর।

আরোহীসহ গাড়িটি সামনের দিকে এগোয় কী করে? : গাড়িটিকে সামনের দিকে চালাবার জন্য ঘোড়া মাটির ওপর তির্যকভাবে বল প্রয়োগ করে। সঙ্গে সঙ্গে মাটি ঘোড়ার ওপর সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া বল R প্রয়োগ করে।



চিত্র ৪·৭

এই বলকে অনুভূমিক দিকে এবং উল্লম্ব দিকে যথাক্রমে F_H এবং F_V উপাংশে বিশ্লেষণ করা যায়। উল্লম্ব উপাংশ F_V ঘোড়ার ওজনকে প্রশমিত করে। এখন যদি অনুভূমিক উপাংশ F_H ঘোড়ার ওপর গাড়ি দ্বারা পেছনের দিকে প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বল (R)-এর চেয়ে বেশি হয়, তা হলে $F_H - R$ বলের ক্রিয়ায় ঘোড়া সামনের দিকে এগিয়ে যায় অর্থাৎ গাড়িটি সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪·৭]।

এখন গাড়ির গতি পৃথকভাবে বিবেচনা করলে দেখা যায় যে, এর ওপর দুটি বল ক্রিয়া করছে—
(i) মাটির সংস্পর্শে থাকার দরুন চাকার ওপর ঘর্ষণ বল f; এই বল গাড়ির গতিকে বাধা দেয়।
(ii) ঘোড়া দ্বারা প্রযুক্ত বল F; এই বল গাড়িকে সামনের দিকে এগিয়ে নিতে চেষ্টা করে।

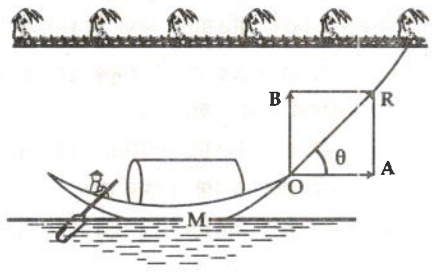
২। নৌকার গুণ টানা :

মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়; যথা—অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ [চিত্র ৪.৮]।

অনুভূমিক উপাংশ = F cos θ; এর দিক OA বরাবর।

উল্লম্ব উপাংশ = F sin θ; এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ F cos θ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ F sin θ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ F sin θ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ-এর মান তত কম হবে ফলে F sin θ-এর মান কম হবে এবং F cos θ-এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।



চিত্র ৪.৮

কাজ : নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে নৌকার গতি কীভাবে বৃদ্ধি পায় ?

৩। অ্যাথলেটের লং জাম্প দেওয়া :

একজন অ্যাথলেট লং জাম্প দেওয়ার পূর্বে বেশ কিছু দূর থেকে দৌড় দেয়। এর উদ্দেশ্য হলো গতি জড়তা অর্জন করা যার দরুন সে জাম্প দেওয়ার পর বেশ খানিকটা দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৪

১। 65 kg ভরের এক ব্যক্তি ভূপৃষ্ঠের 5 m ওপর থেকে লাফিয়ে পড়ল। ভূমি স্পর্শ করার সময় হাঁটু ভাঁজ না করলে তার শরীর মাত্র $\frac{1}{8}$ s–এ স্থির হয়। তবে ভূমি স্পর্শ করার সময় হাঁটু ভাঁজ করলে তার শরীর স্থির হতে 1 s সময় নেয়। উভয় ক্ষেত্রে ভূপৃষ্ঠ ব্যক্তিটির ওপর কত বল প্রয়োগ করে ? ($g = 10\ ms^{-2}$)

স্থিরাবস্থা থেকে লাফ দিয়ে ভূপৃষ্ঠে পড়ার মুহূর্তে বেগ v হলে,

$$v^2 = 0 + 2 \times 10 \times 5 \qquad [\because v^2 = u^2 + 2gs]$$
$$= 100$$
$$\therefore \quad v = 10\ ms^{-1}$$

সুতরাং, ভরবেগের পরিবর্তন $= mv - mu$
$= 65 \times 10 - 0$
$= 650$ Ns

এখানে,
$m = 65$ kg
$s = 5$ m
$g = 10\ ms^{-2}$
$t_1 = \frac{1}{8}$ s
$t_2 = 1$ s

হাঁটু ভাঁজ না করলে, ব্যক্তির ওপর প্রযুক্ত বল $= \dfrac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$

$$= \frac{650}{\frac{1}{8}} = 650 \times 8 = 5200\ \text{N}$$

হাঁটু ভাঁজ করে লাফ দিলে, ব্যক্তির ওপর প্রযুক্ত বল $= \dfrac{650}{1} = 650$ N

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে হাঁটু ভাঁজ করে লাফ দিলে শরীর স্থিরাবস্থায় আসতে বেশি সময় নেয়, ফলে লোকটি বাধাজনিত বল কম অনুভব করে।

৪। বন্দুক থেকে গুলি ছোড়া :

বন্দুক থেকে গুলি ছুড়লে গুলিটি প্রচণ্ড বেগে সামনে ছুটে যায়। বন্দুকটি গুলির ওপর যদি F বল প্রয়োগ করে, তা হলে গুলিটিও বন্দুকের ওপর সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। এই প্রতিক্রিয়া বলের জন্য বন্দুকটিও পেছন দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.৯]।

চিত্র ৪.৯

ভরবেগ দিয়েও এর কারণ ব্যাখ্যা করা যায়। গুলি ছোড়ার আগে বন্দুক ও গুলি উভয়েই স্থির থাকে। অতএব বন্দুকের ভরবেগ শূন্য এবং গুলির ভরবেগ শূন্য। সুতরাং তাদের মোট আদি ভরবেগ শূন্য। গুলি ছোঁড়ার পর বারুদের বিস্ফোরণের ফলে গুলি একটি বেগে সামনের দিকে যায়। ফলে এটি সামনের দিকে একটি ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। ভরবেগের নিত্যতা অনুসারে গুলি ছোড়ার পরেও তাদের মোট ভরবেগ শূন্য হবে। ফলে বন্দুককেও গুলির সমান ও বিপরীতমুখী একটি ভরবেগ লাভ করতে হবে। ফলে বন্দুককে অবশ্যই পেছনের দিকে গতিপ্রাপ্ত হতে হবে [চিত্র ৪.৮]। তাই বন্দুক পিছনের দিকে ধাক্কা দেয়।

মনে করি M ভরের একটি বন্দুক হতে m ভরের একটি গুলি $\vec{v}$ বেগে বের হয়ে গেল। আবার মনে করি গুলি ছোড়ার পর বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ = $\vec{V}$।

$\therefore$ গুলি ছোড়ার আগে তাদের মোট ভরবেগ = 0

গুলি ছোড়ার পর তাদের মোট ভরবেগ = বন্দুকের ভরবেগ + গুলির ভরবেগ = $M\vec{V} + m\vec{v}$

কিন্তু ভরবেগের নিত্যতা সূত্র অনুসারে আগের ও পরের ভরবেগ সমান।

$\therefore \quad M\vec{V} + m\vec{v} = 0$

বা, $\quad m\vec{v} = -M\vec{V} = M(-\vec{V})$

বা, $\quad \vec{V} = \dfrac{-m\vec{v}}{M} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.10)$

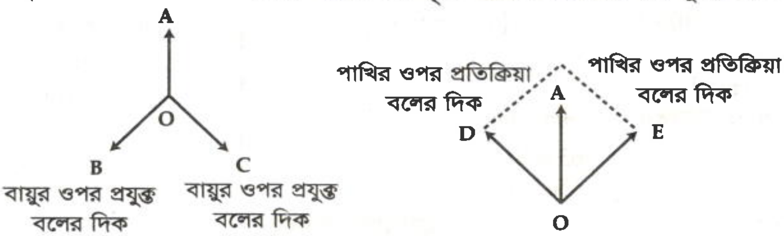
এই বেগে বন্দুককে পিছনের দিকে ধাক্কা দেয়। এই বেগই হলো বন্দুকের **প্রতিক্ষেপ বেগ।**

সমীকরণ (4.10) অনুযায়ী গুলির ভর × গুলির বেগ = বন্দুকের ভর × বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ।

এই সমীকরণ থেকে আরও বলা যায়, গুলির বেগ > বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ।

৫। পাখির আকাশে ওড়া :

একটি পাখি যখন OA বরাবর উড়ে যায় তখন পাখিটি তার ডানা দুটি দিয়ে বায়ুর ওপর OB এবং OC অভিমুখে বল প্রয়োগ করে। একই সঙ্গে বায়ুও OE এবং OD অভিমুখে পাখিটির ওপর প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে [চিত্র ৪.১০]। এই প্রতিক্রিয়া বল দুটি পাখিটির ওপর ক্রিয়া করায় পাখির গতি সৃষ্টি করে। প্রতিক্রিয়া বল দুটির লব্ধি হলো OA, ফলে



চিত্র ৪.১০

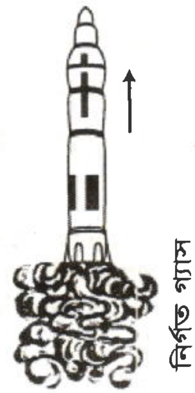
পাখিটি OA বরাবর উড়ে যেতে পারে। এখন পাখিটি যদি এক ডানা দিয়ে অন্যটির তুলনায় কম বল প্রয়োগ করে, তখন প্রতিক্রিয়া বলের লব্ধি OA বরাবর ক্রিয়া করে না। বরং যেদিকে ডানা দ্বারা কম বল প্রযুক্ত হয় সেদিকে হেলে যায়, ফলে পাখিটির চলার দিক পরিবর্তিত হয়। বায়ুশূন্য স্থানে ডানায় প্রতিক্রিয়া বল ক্রিয়াশীল হয় না, ফলে পাখি বায়ুশূন্য স্থানে উড়তে পারে না।

অনুধাবনমূলক কাজ : বায়ুশূন্য স্থানে পাখি উড়তে পারে না কেন ?

৬। মহাশূন্যে অভিযান তথা রকেটের গতি :

মহাশূন্যে অভিযানকালে যখন রকেট ওপরের দিকে ধাবিত হয় তখন যদি তোমরা রকেটের দিকে তাকাও তা হলে এর পেছন দিয়ে সাদা মেঘের মতো ধোঁয়া নির্গত হতে দেখবে। কেন এমন ধোঁয়া দেখা যায় তার কারণ বলতে পারবে কী ? জ্বালানি দহনের ফলে অতি উচ্চ চাপে গ্যাস উৎপন্ন হয়। এই গ্যাসের কুণ্ডলী আমরা পৃথিবী থেকে অনেক সময় দেখতে পাই। এই গ্যাস রকেট-এর পেছনে একটি সরু নলের মধ্য দিয়ে তীব্র বেগে বেরিয়ে আসে। এর ফলে যে প্রচণ্ড বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া বল সৃষ্টি হয়, সেই বলের ক্রিয়ায় রকেট তীব্র বেগে সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.১১]।

কৃত্রিম উপগ্রহের বহুল ব্যবহার অত্যাধুনিক যোগাযোগ ব্যবস্থার উন্নয়নে এবং মহাকাশ গবেষণায় বিরাট অবদান রেখেছে। এর মূলে রয়েছে রকেট চালনার ক্রমাগত উন্নতি সাধন। ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী রকেটও সমান কিন্তু বিপরীতমুখী ভরবেগ প্রাপ্ত হয় এবং উচ্চ বেগে ওপরে উঠে যায়। জ্বালানি হিসেবে রকেটে সাধারণত তরল হাইড্রোজেন এবং দহনের জন্য তরল অক্সিজেন থাকে। বিশেষ প্রক্রিয়ায় এবং নিয়ন্ত্রিত হারে তরল হাইড্রোজেন ও অক্সিজেনকে দহন প্রকোষ্ঠে প্রবেশ করানো হয়। জ্বালানির দহন ক্রিয়ার ফলে উৎপন্ন উচ্চ চাপের গ্যাস অত্যন্ত উচ্চ বেগে রকেটের নিচের দিকে নির্গমন পথ দিয়ে বেরিয়ে আসে এবং রকেট দ্রুত বেগে সামনের দিকে এগিয়ে চলে।



চিত্র ৪.১১

মনে করি, একটি রকেট মহাশূন্যে গতিশীল। ফলে বাতাসের বাধা এবং অভিকর্ষের প্রভাব উপেক্ষা করা যায়। যেহেতু রকেট থেকে গ্যাস নির্গমনের ফলে গ্যাসের গতির বিপরীত দিকে রকেটের ওপর একটি বল বা ধাক্কার সৃষ্টি হয়, ফলে রকেট দ্রুত গতিতে সামনের দিকে এগিয়ে যায়। ফলে রকেটের সাহায্যে মুক্তি বেগ ($11.2\ kms^{-1}$) অর্জন করে অভিকর্ষজ ত্বরণের বাধা কাটিয়ে মহাশূন্যে ভূ-উপগ্রহ স্থাপনসহ নানাবিধ অভিযান সফল হয়েছে।

ধরা যাক প্রযুক্ত ধাক্কা $= F$
রকেটের ভর $= M$
Δt সময়ে নির্গত গ্যাসের ভর $= \Delta m$
গ্যাসের নির্গত বেগ $= v_r$
Δt সময় ব্যবধানে গ্যাসের ভরবেগের পরিবর্তন $= (\Delta m)v$
ভরবেগের নিত্যতার সূত্র অনুযায়ী,
Δt সময়ে ভরবেগের পরিবর্তন = রকেটের ওপর প্রযুক্ত বলের ঘাত সমান

$\therefore \quad (\Delta m)v = F \times \Delta t$

$F = \left(\dfrac{\Delta m}{\Delta t}\right) v_r$; এখানে $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ = জ্বালানি ব্যবহারের হার

রকেটের তাৎক্ষণিক ত্বরণ a হলে, $F = Ma$

$$a = \frac{F}{M} = \frac{1}{M}\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) v \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (4.11)$$

এই ত্বরণে রকেট সামনের দিকে এগিয়ে চলে।

অভিকর্ষের প্রভাব : ওপরের আলোচনায় অভিকর্ষজ বলের প্রভাব উপেক্ষা করা হয়েছে। রকেটের ওপর নিম্নমুখী পৃথিবীর টান বিবেচনা করলে পৃথিবী সাপেক্ষে রকেটের ত্বরণের রাশিমালা হবে—

$$a = \frac{1}{M}\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) v_r - g \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad 4.11(a)$$

সমীকরণ (4.11) থেকে দেখা যায়,

- রকেটের ভর কমালে ত্বরণ বৃদ্ধি পায়।
- রকেটের ত্বরণ বৃদ্ধি করতে হলে গ্যাস নির্গমনের হার বাড়াতে হবে।
- গ্যাসের আপেক্ষিক বেগ বৃদ্ধি করলে ত্বরণও বৃদ্ধি পাবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৫

১। 5 kg ভরবিশিষ্ট একটি বন্দুক থেকে 500 ms^{-1} বেগে 6g ভরের গুলি ছুড়লে বন্দুকটির প্রতিক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর।

গুলি ছোড়ার আগে গুলি ও বন্দুক উভয়ই স্থির ছিল। সুতরাং, এদের ভরবেগের মান শূন্য ছিল।
ধরা যাক, গুলি ছোড়ার পর গুলির বেগ $= v$ এবং বন্দুকের বেগ $= V$
গুলির ভর $= m$ এবং বন্দুকের ভর $= M$
ভরবেগ সূত্রানুযায়ী,

$0 = MV + mv$

বা, $0 = 5 \times V + \dfrac{6}{1000} \times 500$

বা, $V = -\dfrac{3}{5} = -0.60\ ms^{-1}$

সুতরাং, বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ $0.6\ ms^{-1}$

২। একটি রকেট প্রতি সেকেন্ডে 0·07 kg জ্বালানি খরচ করে। রকেট থেকে নির্গত গ্যাসের বেগ 100 kms^{-1} হলে রকেটের ওপর কত বল ক্রিয়া করে ? (এখানে অভিকর্ষ বলের প্রভাব উপেক্ষা করা যেতে পারে)।

দেয়া আছে,

প্রতি সেকেন্ডে জ্বালানি খরচ,

$$\frac{dm}{dt} = 0{\cdot}07 \text{ kg s}^{-1}$$

এবং নির্গত গ্যাসের বেগ, $v_r = 100 \text{ kms}^{-1} = 1 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$

আমরা জানি, $F = v_r\, dm/dt - mg$

অভিকর্ষ বলের প্রভাব না থাকলে $(g = 0)$, রকেটের ওপর ক্রিয়াশীল বল,

$$F = v_r \frac{dm}{dt} = 1 \times 10^5 \text{ ms}^{-1} \times 0{\cdot}07 \text{ kg}$$

$$= 7 \times 10^3 \text{ N}$$

এখানে,

$\frac{dm}{dt} = 0{\cdot}07 \text{ kg s}^{-1}$

$v = 100 \text{ kms}^{-1} = 1 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$

$F = ?$

৩। একটি রকেট উর্ধ্বমুখী যাত্রার প্রথম 2 সেকেন্ডে এর ভরের $\frac{1}{50}$ অংশ হারায়। রকেট হতে নিষ্ক্রান্ত গ্যাসের গতিবেগ 2500 ms^{-1} হলে রকেটের ত্বরণ বের কর।

আমরা জানি,

$$m\frac{dv}{dt} = v_r \frac{dm}{dt} - mg$$

বা, $\frac{dv}{dt} = a = \frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g$

বা, $a = \frac{2500 \text{ ms}^{-1}}{m} \cdot \frac{m}{50 \times 2 \text{ s}} - 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

$= 25 \text{ ms}^{-2} - 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

$= 15{\cdot}2 \text{ ms}^{-2}$

এখানে,

$dm = \frac{m}{50}$

$dt = 2 \text{ sec}$

$v_r = 2500 \text{ ms}^{-1}$

$g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^2$

$a = ?$

৪। একটি রকেটের প্রাথমিক ভর 4000 kg। রকেট থেকে 15 kgs^{-1} হারে গ্যাস নির্গত হচ্ছে। গ্যাসের আপেক্ষিক বেগ 8 kms^{-1} হলে 2 মিনিট পরে রকেটটির ত্বরণ কত ?

আমরা জানি,

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v_r}{M}\frac{dm}{dt}$

$\therefore\ a = \frac{8 \times 10^3}{2200} \times 15$

$= 54{\cdot}5 \text{ ms}^{-2}$

এখানে,

প্রাথমিক ভর, $M_0 = 4000 \text{ kg}, = \frac{dm}{dt} = 15 \text{ kgs}^{-1}$

$t = 2 \text{ min} = 2 \times 60 \text{ s}$

$\Delta M = \frac{dm}{dt} \times t = 15 \times 2 \times 60$

2 মিনিট পরে ভর, $M = M_0 - \Delta M$

$= 4000 - 15 \times 2 \times 60$

$= 2200 \text{ kg}$

$v_r = 8 \text{ kms}^{-1} = 8 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$

$a = ?$

৫। 1000 kg ভরের একটি রকেটকে উল্লম্বভাবে উৎক্ষেপণ করতে হবে। জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের নির্গমন বেগ 800 ms^{-1}।

(i) কী হারে গ্যাস নির্গত হলে রকেটটি নিজের ওজনকে অতিক্রম করে ঠিক উড়তে সক্ষম হবে ?

(ii) কী হারে গ্যাস নির্গত হলে রকেটটি শুরুতে অভিকর্ষজ ত্বরণের দ্বিগুণ ত্বরণ পাবে ?

(i) রকেটটি নিজের ওজন অতিক্রম করে উড়তে সক্ষম হবে যদি জ্বালানি দহনে উৎপন্ন গ্যাসের নির্গমনের ফলে সৃষ্ট ঘাত রকেটের ওজনের সমান হয়; অর্থাৎ $u\frac{dm}{dt} = mg$ হয়।

$$\therefore\ \frac{dm}{dt} = \frac{mg}{u} = \frac{1000 \times 9{\cdot}8}{800} \text{ kgs}^{-1} = 12{\cdot}25 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ জ্বালানি দহনের ন্যূনতম হার হবে $12{\cdot}25 \text{ kgs}^{-1}$

(ii) রকেটের উর্ধ্বমুখী ত্বরণ a হলে,

$$ma = m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} - mg$$

বা, $a = \frac{u}{m}\frac{dm}{dt} - g$

বা, $\frac{dm}{dt} = \frac{m}{u}(a + g)$

প্রশ্নানুসারে, $a = 2g$

$$\therefore \quad \frac{dm}{dt} = \frac{m}{u} \times (2g + g) = \frac{m}{u} \times 3g$$

$$= \frac{1000}{800} \times 3 \times 9{\cdot}8 \text{ kgs}^{-1} = 36{\cdot}75 \text{ kgs}^{-1}$$

$\therefore$ $36{\cdot}75 \text{ kgs}^{-1}$ হারে গ্যাস নির্গত হতে হবে।

৪.৭ নিউটনের গতিসূত্রের অবদান
Contribution of Newton's laws of motion

নিউটনের সূত্রাবলির ওপর ভিত্তি করে যে বলবিদ্যার সৃষ্টি এবং উন্নয়ন হয়েছে তাকে নিউটনীয় বলবিদ্যা (Newtonian mechanics) বা সনাতন বলবিদ্যা (Classical mechanics) বলা হয়। এই বলবিদ্যার সাহায্যে পৃথিবীর বিভিন্ন বস্তুর গতি, অসীম আকাশের তারকা এবং গ্রহের গতি বিশ্লেষণ করা যায়। নিউটনের গতিসূত্র ব্যবহার করে আমরা এই সমস্ত বস্তুর গতির নিখুঁত সমাধান পাই। নিউটনীয় বলবিদ্যা বা সনাতন বলবিদ্যা এই সমস্ত বস্তুর গতি বিশ্লেষণে অপূর্ব সাফল্য অর্জন করেছে। এই কারণে বলা হয় যে, **নিউটনীয় বলবিদ্যা আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানের ভিত্তি স্থাপন করেছে।**

নিউটনীয় বলবিদ্যায় ধরা হয়েছে যে বস্তুর ভর ও দৈর্ঘ্য বস্তুর বেগের ওপর নির্ভর করে না। এ ছাড়া ধরে নেয়া হয়েছে যে পরিমাপ্য যন্ত্রপাতির কার্যনীতি এগুলোর গতির দ্বারা প্রভাবিত হয় না। এই বলবিদ্যায় স্থান ও সময় উভয়ই অপরিবর্তনীয় ধরা হয়েছে এবং কোনো কিছুরই সাপেক্ষে আপেক্ষিক নয়। নিউটনের প্রথম গতিসূত্রে শুধুমাত্র জড়তা কোনো প্রসঙ্গের সাপেক্ষে সঠিকভাবে প্রকাশ করা যায়। এই কারণে, নিউটনীয় বলবিদ্যায় একটি নির্দিষ্ট পরম স্থিতি প্রসঙ্গ বিবেচনা করা হয়।

কিন্তু বিজ্ঞানী আইনস্টাইন বিশদ গবেষণার পর এই সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, এই মহাবিশ্বে পরম স্থিতি বলে কিছু নেই। সব কিছুই গতিশীল। কিন্তু একটি নির্দিষ্ট বস্তুর সাপেক্ষে অপর একটি বস্তু স্থির রয়েছে। তিনি আরও প্রমাণ করেন, যেকোনো প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রকাশ করা হোক না কেন তা অপরিবর্তনীয় থাকে। এটিই আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্বের মৌলিক ধারণা। সবক্ষেত্রেই প্রযোজ্য হওয়ার জন্য বিজ্ঞানী আইনস্টাইন নিউটনীয় গতির অনেক সমীকরণ পরিবর্তন করেছেন। তিনি এ সমস্ত পরিবর্তনগুলো বিভিন্ন পরীক্ষণ দ্বারা প্রমাণ করেন। এগুলোর মধ্যে একটি হলো যে, বস্তুর ভর দ্রুতির ওপর নির্ভর করে। সুতরাং বলের প্রয়োগে বস্তুতে যে ত্বরণ সৃষ্টি হয় তা ধ্রুব থাকে না অর্থাৎ ত্বরণ এর দ্রুতির ওপর নির্ভর করে। এ ছাড়া একটি বস্তুর দৈর্ঘ্য এবং সময় অবকাশও গতির ওপর নির্ভর করে। বিভিন্ন পরিমাপের পরীক্ষালব্ধ ফলাফলও গতির ওপর নির্ভরশীল। আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্ব পদার্থবিজ্ঞানের অনেক নতুন ধারণার সৃষ্টি করেছে এবং সনাতন অনেক ধারণার পরিবর্তন ঘটিয়েছে। বস্তুর গতিবেগ যখন আলোর বেগের কাছাকাছি পৌঁছায় তখন নিউটনীয় বলবিদ্যা আর কার্যকর থাকে না। এ ধরনের উচ্চ গতিবেগ অথবা গতি বর্ণনায় আপেক্ষিক বলবিদ্যার প্রয়োজন হয়।

অণু-পরমাণুর গতি বিশ্লেষণে নিউটনীয় বলবিদ্যা কার্যকর নয়, এ ধরনের ক্ষুদ্র কণার গতি বিশ্লেষণে (যেমন অণু, পরমাণু, ইলেকট্রন, প্রোটন ইত্যাদি) কোয়ান্টাম বলবিদ্যার প্রয়োজন হয়। এর অর্থ এই নয় যে সনাতন বলবিদ্যা সেকেলে হয়ে গেছে।

বাস্তবিক পক্ষে, নিউটনের প্রথম সূত্র প্রসঙ্গ কাঠামোর সঙ্গে সম্পর্কিত। কেননা কোনো প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে একটি বস্তুর পরিমাপ্য ত্বরণ ওই প্রসঙ্গের ওপর নির্ভর করে। প্রথম সূত্র বলে যে, যদি কাছাকাছি কোনো বস্তু না পাওয়া যায়, তবে একগুচ্ছ প্রসঙ্গ কাঠামো পাওয়া যেতে পারে। সেখানে কণাটির কোনো ত্বরণ থাকে না। প্রযুক্ত বলের অবর্তমানে বস্তু স্থিতি অবস্থায় অথবা সমরৈখিক গতিতে থাকে—এই গুণ জড়তা ভিন্ন অন্য কিছু নয়।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রে আমরা জেনেছি যে একটি বস্তুর ত্বরণ এর ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। এখন আমাদের প্রশ্ন, একই বল অন্য বস্তুতে ভিন্নতর হবে কি না; অবশিষ্ট গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন হলো, বিভিন্ন বস্তুতে ক্রিয়াশীল একই বল ভিন্নতর হবে কি না; অর্থাৎ, একই মানের বল বিভিন্ন বস্তুতে কী ধরনের ক্রিয়া করে এই সূত্র থেকে এর আঙ্গিক উত্তর পেতে পারি। নিউটনের তৃতীয় সূত্র থেকে আমরা শিখতে পারি যে, একক বল হলো শুধু ত্রুটিমুক্ত দুটি

বস্তুর মধ্যে মিথস্ক্রিয়ার অভিমুখ। এ ছাড়া, এই দুটি বলের মান সমান কিন্তু বিপরীতমুখী। সুতরাং, কোনো অন্তরীত বা বিচ্ছিন্ন বলের অস্তিত্ব নেই এবং এটি পাওয়া অসম্ভব। পদার্থবিজ্ঞান কতগুলো অনমনীয় তত্ত্বের সংমিশ্রণ নয়, বরং এটি অনবরত উন্নয়নশীল বিজ্ঞান। লক্ষণীয় যে 1660 সালে পদার্থবিজ্ঞান নিউটনীয় বলবিদ্যার দ্বারা, 1870 সালে ম্যাক্সওয়েলের তড়িৎ চুম্বকীয় তত্ত্ব, 1906 সালে আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্ব এবং 1925 সালে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে পূর্ণতা পেতে থাকে।

বিগত কয়েক দশকে কোয়ান্টাম বলবিদ্যার সাহায্যে ক্ষুদ্র কণা যেমন ইলেকট্রন, প্রোটন এবং অন্যান্য মৌলিক কণাসমূহের গুণাগুণ পরিমাপ করা সম্ভব হয়েছে। নিউটনীয় বলবিদ্যা এ সমস্ত দ্রুতগতির কণার গতি বর্ণনা করতে পারেনি। নিউটনীয় বলবিদ্যা $\frac{v}{c} \ll 1$ সীমায় কঠিন বিষয়গুলো ব্যাখ্যা করতে খুবই উপযোগী; কিন্তু উচ্চ দ্রুতির মৌলিক কণাগুলোর সংঘর্ষ, ক্ষয় এবং মিথস্ক্রিয়া ব্যাখ্যা করতে পারে না। তথাপি নিউটনীয় বলবিদ্যার গুরুত্ব কোনোভাবেই কম নয়। নিউটনীয় বলবিদ্যাকে সাধারণ বলবিদ্যা কণাসমূহের আলোর বেগের কাছাকাছি বর্ণনা করে তার একটি বিশেষ রূপ হিসেবে ধরা যেতে পারে। দৈনন্দিন জীবনে আমরা যে সমস্ত বস্তু বিবেচনা করি তার ভর ইলেকট্রনের ভরের তুলনায় অনেক বেশি (ইলেকট্রনের ভর, $m = 9{\cdot}1 \times 10^{-31}$kg)। এটি আকর্ষণীয় বিষয় যে খুবই কাছাকাছি কণাসমূহের ধারণাই হলো সনাতন বলবিদ্যার ভিত্তি।

এই বলবিদ্যা বা নিউটনের গতির সমীকরণসমূহ দ্বারা কণার অবস্থান এবং তাদের বেগ একই সঙ্গে সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করা সম্ভব নয়, অনিশ্চয়তা থাকে। এই নিশ্চয়তা **হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি** (Heisenberg's uncertainty princple) হিসেবে পরিচিত যা নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$\Delta x \cong \frac{h}{m\Delta v_x}$ এখানে h = প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবক।

নিউটনীয় বলবিদ্যা সাধারণ আপেক্ষিকতার একটি বিশেষ রূপ যা ক্ষুদ্র কণার গতি-প্রকৃতি ব্যাখ্যা করতে সাহায্য করে। হাইজেনবার্গ, স্রোডিঞ্জার, বার্ন 1925–1926 সনে এবং ডিরাক 1927 সনে এবং অন্য বিজ্ঞানীরা তা ব্যাখ্যা করতে সমর্থ হন।

৪·৮ নিউটনের গতিসূত্রের সীমাবদ্ধতা
Limitations of Newton's laws of motion

নিউটনের গতিসূত্র বৃহৎ আকৃতির বস্তুর জন্য প্রযোজ্য। যেসব কণার ভর খুবই কম যেমন ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন ইত্যাদির ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়।

ক্ষুদ্র ভর (10^{-31} kg) বিশিষ্ট সকল কণার বেগ বেশি হয়, অর্থাৎ প্রায় আলোর বেগের কাছাকাছি হয় ফলে গতিশীল অবস্থায় এরা তরঙ্গ রূপে আচরণ করে। এসব বস্তুর ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। এসব ক্ষেত্রে আপেক্ষিকতা তত্ত্ব প্রযোজ্য।

আবার বস্তুর ত্বরণ যখন খুব কম ($< 10^{-10}$ ms^{-2}) হয় তখন নিউটনের গতিসূত্র প্রয়োগে ভালো ফল পাওয়া যায় না। এক্ষেত্রে বল ত্বরণের সমানুপাতিক হয়। নিউটনের গতিসূত্র কেবলমাত্র বল ত্বরণের সমানুপাতিক ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

কোনো বস্তু স্থির কাঠামোতে বা সমবেগে চলমান হলে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য হয়। অন্যথায় প্রযোজ্য হবে না।

নিউটনের গতির সূত্র প্রয়োগ করা যায় যখন বস্তুর বেগ আলোর বেগের তুলনায় অনেক কম থাকে। আলোর বেগের কাছাকাছি বেগসম্পন্ন বস্তুর গতির ক্ষেত্রে নিউটনের সূত্র প্রয়োগ করা যায় না। এক্ষেত্রে আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার সূত্র ব্যবহার করা হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : 4 kg ভরের একটি বস্তুকে একটি স্প্রিং তুলা যন্ত্র থেকে ঝুলিয়ে দেওয়া হলো এবং একই ভরের অপর একটি বস্তুকে একটি সাধারণ তুলা যন্ত্রের সাহায্যে প্রতিমিত (balanced) করা হলো। তুলা যন্ত্র দুটিকে একটি লিফটের ভেতর রাখা হলো। এখন লিফটটি ত্বরণসহ ওপরে উঠতে থাকলে তুলা দুটির পাঠের কোনো পরিবর্তন হবে কি? ব্যাখ্যা কর।

তুলা দুটির পাঠের পরিবর্তন হবে।

ব্যাখ্যা : আমরা জানি, স্প্রিং তুলা যন্ত্র বস্তুর ওজন পরিমাপ করে। এখন, যেহেতু লিফটটি ত্বরণসহ ওপরে উঠছে তাই বস্তুর ওজন বৃদ্ধি পাবে। ফলে স্প্রিং তুলার পাঠ বৃদ্ধি পাবে। পক্ষান্তরে, সাধারণ তুলা যন্ত্রের সাহায্যে বস্তুর ভর পরিমাপ করা হয়। যেহেতু ভরের কোনো পরিবর্তন হয় না তাই সাধারণ তুলা যন্ত্রের পাঠের কোনো পরিবর্তন ঘটবে না।

৪.৯ বল, ক্ষেত্র ও ক্ষেত্র প্রাবল্যের ধারণা
Concept of force, field and field intensity

পূর্বের অনুচ্ছেদে বল কী এবং এর প্রকারভেদ সম্পর্কে ধারণা প্রদান করা হয়েছে। আমরা জেনেছি, '**যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।**' বল একটি ভেক্টর রাশি।

বলের প্রকৃতি (Nature of Force) :

মহাকর্ষ বল দুটি বস্তুর মধ্যকার আকর্ষণ বল। দুটি চার্জিত বস্তু পরস্পরকে আকর্ষণ করে যখন চার্জ দুটি বিপরীতধর্মী হয় অর্থাৎ একটি ধনাত্মক বা অপরটি ঋণাত্মক হয় এবং বিকর্ষণ করে যখন চার্জ দুটি সমধর্মী হয়। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের ওপর নির্ভর করে না। কিন্তু তড়িৎ বল মাধ্যমের ওপর নির্ভরশীল।

ক্ষেত্র (Field) :

একটি চার্জের চারদিকে বিস্তৃত অঞ্চল জুড়ে এর প্রভাব লক্ষ করা যায়। ওই অঞ্চলে অন্য একটি চার্জ আনলে, সেটি বল অনুভব করে। আবার দ্বিতীয় চার্জ প্রথম চার্জের ওপর বল প্রয়োগ করে। অর্থাৎ চার্জ দুটির মধ্যে ক্রিয়াশীল বল পারস্পরিক। এখন চার্জের মান বাড়লে বল বাড়বে। আবার চার্জ দুটির মধ্যে দূরত্ব বাড়লে বলের মান কমে যায়।

অনুরূপভাবে, একটি বস্তুর চারদিকের অঞ্চল জুড়ে এর প্রভাব লক্ষ করা যায়। ওই অঞ্চলে অপর একটি বস্তু থাকলে সেটি বল অনুভব করে। এই বল মহাকর্ষীয় বল। এই বল পারস্পরিক; অর্থাৎ একে অপরের ওপর ক্রিয়াশীল হয়। এখন বস্তুর ভর বৃদ্ধি পেলে বলের মান বাড়ে। আবার বস্তুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব বাড়লে বলের মান কমে।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, দুটি বস্তুর মধ্যে কিংবা দুটি চার্জের মধ্যে ক্রিয়াশীল বল সংস্পর্শ ছাড়াই দূর থেকে ক্রিয়া করে। কিন্তু প্রশ্ন জাগে যে চার্জ দুটির মধ্যে কোনো ভৌত সংযোগ ছাড়াই কীভাবে বল ক্রিয়া করে। বিখ্যাত বিজ্ঞানী **মাইকেল ফ্যারাডে** প্রথম অনুধাবন করেন যে, চার্জের চারদিকে এক ধরনের আলোড়ন সৃষ্টি হয় যার ফলে ওই অঞ্চলে কোনো চার্জ স্থাপন করলে সেটি বল অনুভব করে। তিনি এই আলোড়নের নাম দেন তড়িৎ ক্ষেত্র। সুতরাং তড়িৎ ক্ষেত্রের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সংজ্ঞা : কোনো একটি চার্জ চারদিকে যে অঞ্চল জুড়ে তার প্রভাব বিস্তার করে সেই অঞ্চলকে ওই চার্জের তড়িৎ ক্ষেত্র বলে।

অনুরূপ, মহাকর্ষ বিষয়ক আলোচনায় মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের ধারণা প্রয়োগ করা হয়। এ ধারণা অনুযায়ী, **"কোনো বস্তুর চারদিকে যে স্থান জুড়ে তার আকর্ষণ বল অনুভূত হয়, সে স্থানকে ওই বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে।"** অতএব, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র মহাকর্ষীয় বল সঞ্চালনের মধ্যস্থতাকারী হিসেবে ক্রিয়া করে।

ক্ষেত্র প্রাবল্য (Field Intensity) :

তড়িৎ ক্ষেত্র বা মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের সর্বত্র এর প্রভাব সমান নয়। চার্জিত বা আহিত বস্তুর কাছাকাছি তড়িৎ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একটি চার্জ যতটুকু বল অনুভব করে দূরে তার চেয়ে কম বল অনুভব করবে। আবার চার্জিত বস্তুর চার্জের পরিমাণ বেশি হলে ওই একই বিন্দুতে কম চার্জের বস্তু অপেক্ষা বেশি বল অনুভূত হবে। তড়িৎ ক্ষেত্রের এই দুর্বলতা বা সবলতা একটি তড়িৎ রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একে তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তড়িৎ প্রাবল্য বলে।

সংজ্ঞা : তড়িৎ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক আধান বা চার্জের ওপর ক্রিয়াশীল বলকে তড়িৎ ক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তড়িৎ প্রাবল্য বলে।

এখন তড়িৎ বল $\vec{F}$ হলে এবং চার্জ q_0 হলে সংজ্ঞানুসারে তড়িৎ প্রাবল্য,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \text{বা,} \quad \vec{F} = q_0\vec{E}$$

এটি ভেক্টর রাশি। এর একক হলো NC^{-1}

অনুরূপ, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের সকল বিন্দুতে একই বল ক্রিয়াশীল নয়। অর্থাৎ মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ভিন্নতর হয়। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে প্রাবল্য বা তীব্রতা নির্ণয় করতে ওই বিন্দুতে একক ভরের একটি বস্তু বিবেচনা করা হয়। একক ভরের বস্তুটি যে বল লাভ করে তা দিয়েই মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য পরিমাপ করা হয়।

সংজ্ঞা : মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ভরের একটি বস্তু স্থাপন করলে তার ওপর যে বল প্রযুক্ত হয়, তাকে ওই ক্ষেত্রের দরুন ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য বলে।

অতএব, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তুর ওপর $\vec{F}$ বল ক্রিয়া করলে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য হবে,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.12)$$

প্রাবল্যের মান ও দিক দুই-ই আছে। প্রাবল্যের অভিমুখই মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের অভিমুখ নির্দেশ করে। এর একক হলো Nkg^{-1}

৪.১০ রৈখিক ভরবেগের নিত্যতা
Conservation of linear momentum

রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার নীতি পদার্থবিজ্ঞানের অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। নিউটনের গতিসূত্র থেকে এই নীতি পাওয়া যায়। কতগুলো বস্তু পরস্পরের ওপর বল (ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া) প্রয়োগ করতে পারে এবং তার প্রভাবে সচল হতে পারে, কিন্তু বাইরে থেকে কোনো বল প্রয়োগ না করলে তাদের মোট ভরবেগ সবসময় অপরিবর্তিত থাকে। তোমরা লক্ষ করে থাকবে চেয়ারে বসে থাকা অবস্থায় কোনো লোক চেয়ারের ওপর বল প্রয়োগ করে চেয়ারটি তুলতে পারে না। এর কারণ কী ব্যাখ্যা করতে পারবে ? চেয়ার ও লোকটি স্থির বলে এদের মোট ভরবেগ শূন্য। এখন লোকটি চেয়ারকে তুলতে চেষ্টা করলে অর্থাৎ চেয়ারের ওপর উপরের দিকে বল প্রয়োগ করলে চেয়ারটি লোকটির ওপর নিচের দিকে সমান প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করবে। কিন্তু এই বল দুটিই হলো চেয়ার ও লোকটির মধ্যে ক্রিয়াকৃত বল, যেহেতু বাইরে থেকে কোনো বল প্রয়োগ হচ্ছে না। তাই চেয়ার ও লোকটির মোট ভরবেগ শূন্যই থাকবে। ফলে চেয়ার ওপরে উঠবে না। একইভাবে চেয়ারে বসে থাকা কোনো ব্যক্তি হাত দিয়ে ওপরের দিকে চুল টেনে নিজেকে ওপরের দিকে তুলতে পারবে না। আবার গাড়ি বন্ধ হয়ে গেলে যাত্রীরা যদি গাড়ির মধ্যে থেকে গাড়িকে ঠেলতে থাকে তাহলেও গাড়ি চলবে না। এই সকল প্রশ্নের উত্তর রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্র বা সংরক্ষণ নীতি থেকে পাওয়া যায়।

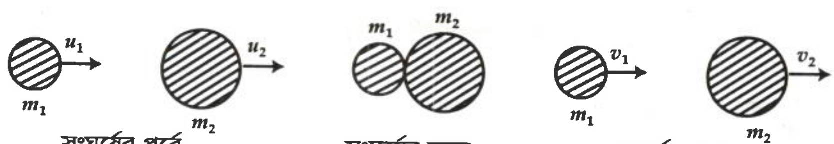
নিউটনের **গতির তৃতীয় সূত্র** থেকে আমরা ভরবেগের নিত্যতার সূত্র সম্পর্কে জানতে পারি। ভরবেগের নিত্যতার সূত্র ছোট-বড় পার্থিব বা মহাজাগতিক সব বস্তুর ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য। নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানি কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত নিট বল যদি শূন্য হয়, তা হলে চলমান একটি বস্তু সরল পথে সমদ্রুতিতে চলতে থাকে অর্থাৎ এর বেগ ধ্রুব থাকে। সময়ের সাপেক্ষে বেগ $\vec{v}$ ধ্রুব থাকলে ভরবেগ $\vec{p} = m\vec{v}$ ও সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুব থাকে।

৪.১১ ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা নিত্যতার সূত্র
Conservation principle of momentum

নিউটনের **গতির দ্বিতীয় সূত্র** থেকে আমরা জানি যে, কোনো বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক। সুতরাং বস্তুটির ওপর কোনো বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ওই বস্তুর রৈখিক ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে। এটিই হলো **রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা নিত্যতার সূত্র।**

সূত্র : কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

ব্যাখ্যা : মনে করি m_1 ও m_2 ভরসম্পন্ন দুটি বস্তু যথাক্রমে u_1 ও u_2 বেগে একই সরলরেখা বরাবর চলার সময় সংঘর্ষ ঘটল। সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি যথাক্রমে v_1 ও v_2 বেগে একই সরলরেখা বরাবর চলতে লাগল [চিত্র ৪.১২]।



চিত্র ৪.১২

সুতরাং সংঘর্ষের পূর্বে বস্তু দুটির মোট ভরবেগ $= m_1u_1 + m_2u_2$

এবং সংঘর্ষের পরে এদের মোট ভরবেগ $= m_1v_1 + m_2v_2$

এখন বাহ্যিক কোনো বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.13)$$

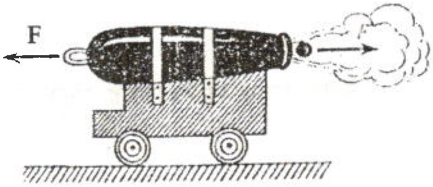
অতএব, মোট রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষিত বা অপরিবর্তিত থাকে।

৪.১২ রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি বা ভরবেগের নিত্যতার সূত্রের উদাহরণ

Example of conservation principle of linear momentum or conservation principle of momentum

কীভাবে রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্র কার্যকর হচ্ছে নিচের উদাহরণগুলো থেকে তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।

উদাহরণ ১। কামান থেকে গোলা ছুড়লে গোলাটি প্রচণ্ড বেগে সামনে ছুটে যায়। গুলি ছোড়ার পূর্বে কামান ও গুলি স্থির ছিল, ফলে ভরবেগ শূন্য ছিল। কিন্তু গুলি ছোড়ার পর গোলাটি একটি ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। কামানটি গোলার ভরবেগের সমান কিন্তু বিপরীতমুখী একটি ভরবেগ লাভ করে। এই কারণেই কামানটি পেছন দিকে গতিপ্রাপ্ত হয় অর্থাৎ পিছু হটে [চিত্র ৪.১৩]।



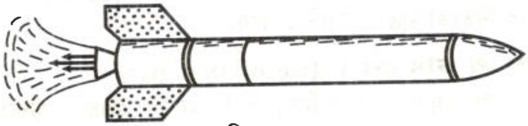
চিত্র ৪.১৩

চিত্র ৪.১৪

উদাহরণ ২। আরোহী নৌকা থেকে লাফিয়ে নামলে নৌকাটি পিছিয়ে যায়। লাফ দেবার আগে নৌকা ও আরোহী স্থির ছিল বলে ওদের মোট ভরবেগ শূন্য ছিল। সামনে লাফ দেওয়ায় আরোহী সচল হয়ে ভরবেগ লাভ করে। ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী মোট ভরবেগ শূন্য থাকে। তাই নৌকাটিতে সমান ও বিপরীতমুখী ভরবেগ সৃষ্টি হয়। ফলে নৌকাটি সচল হয়ে পিছিয়ে যায় [চিত্র ৪.১৪]।

নিজে কর : নৌকা থেকে লাফ দেওয়ার সময় নৌকার পেছনে সরে যাবার কারণ ব্যাখ্যা কর।

উদাহরণ ৩। জ্বালানি দহনের ফলে উৎপন্ন গ্যাস তীব্র বেগে পেছনের দিকে বেরিয়ে যায় বলে রকেট বা জেট প্লেন সমান ভরবেগ নিয়ে সামনের দিকে এগিয়ে যায় [চিত্র ৪.১৫]।



চিত্র ৪.১৫

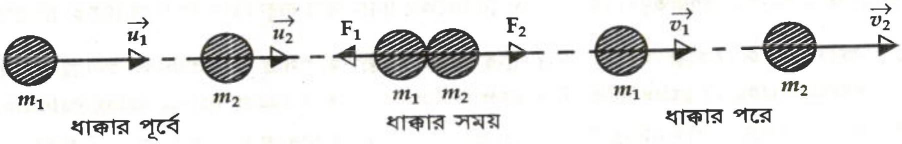
৪.১৩ ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের সত্যতা যাচাই

Verification of conservation law of momentum

গাণিতিক পদ্ধতি :

গাণিতিকভাবে ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণশীলতা যাচাই করা যায়।

মনে করি কোনো একটি সরল রেখায় m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তুকণা যথাক্রমে $\vec{u}_1$ ও $\vec{u}_2$ বেগে একই দিকে চলছে [চিত্র ৪.১৬]। এখানে $\vec{u}_1 > \vec{u}_2$। কোনো এক সময়ে প্রথম বস্তুকণাটি পেছনের দিক হতে দ্বিতীয় বস্তুকণাটিকে ধাক্কা দিল এবং এর পর বস্তুকণা দুটি একই সরলরেখায় ও একই দিকে যথাক্রমে $\vec{v}_1$ ও $\vec{v}_2$ বেগে চলতে লাগল।



চিত্র ৪.১৬

মনে করি ধাক্কাজনিত ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার কার্যকাল t। তা হলে,

বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি $= m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$

বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি $= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

ভরবেগের নিত্যতা সূত্রানুসারে প্রমাণ করতে হবে যে, $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

প্রমাণ :

প্রথম বস্তুকণার ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1}{t}$

$= $ প্রতিক্রিয়া বল $= \vec{F}_1$

$= $ প্রথম বস্তুকণার ওপর দ্বিতীয় বস্তুকণার প্রতিক্রিয়া বল।

দ্বিতীয় বস্তুকণার ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2}{t}$

$= $ ক্রিয়া বল $= \vec{F}_2$

$= $ দ্বিতীয় বস্তুকণার ওপর প্রথম বস্তুকণার প্রযুক্ত বল।

কিন্তু বস্তুকণা দুটির ভরবেগের পরিবর্তনের হার (অর্থাৎ ক্রিয়া বল ও প্রতিক্রিয়া বল) সমান ও বিপরীত। অর্থাৎ

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\therefore \quad \frac{m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2}{t} = -\frac{m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1}{t}$$

বা, $m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2 = -m_1\vec{v}_1 + m_1\vec{u}_1$

বা, $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ .... $=$ একটি ধ্রুব ভেক্টর

$\therefore$ বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি $=$ বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি।

অর্থাৎ $\sum m\vec{v} = $ ধ্রুব ভেক্টর। ... ... (4.14)

সুতরাং **দুটি বস্তুর মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াজনিত বলের ফলে মোট ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না, একটি বস্তু যে পরিমাণ ভরবেগ হারায়, অপরটি ঠিক সমপরিমাণ ভরবেগ লাভ করে অর্থাৎ ধাক্কার আগে ও পরে মোট ভরবেগ একই থাকে।** অতএব ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি প্রমাণিত হলো।

বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বা পশ্চাৎ বেগ (Recoil of a gun)

বন্দুক থেকে গুলি ছোড়া এবং বন্দুকের পিছন দিকে ধাক্কা অনুভূত হওয়ার ঘটনাই বন্দুকের প্রতিক্ষেপ।

ধরা যাক, গুলির ভর $= m_1$ এবং গুলির বেগ $= v_1$

এবং বন্দুকের ভর $= m_2$ এবং গুলির বেগ $= v_2$

গুলি ছোড়ার আগে এদের মোট ভরবেগ $= 0$ এবং গুলি ছোড়ার পর এদের মোট ভরবেগ $= m_1v_1 + m_2v_2$

ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে পাই,

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2$$

বা, $v_2 = -\dfrac{m_1}{m_2}v_1$ ... ... (i)

এই v_2 হলো বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বা পশ্চাৎ বেগ (Recoil velocity)। সমীকরণ (i)-এর ডান পক্ষের ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা বোঝা যায় যে v_1 ও v_2 পরস্পর বিপরীতমুখী। অর্থাৎ গুলি যে দিকে বেরিয়ে যায় বন্দুক তার বিপরীত দিকে গতিপ্রাপ্ত হয়।

৪·১৩·১ ক্যালকুলাসের সাহায্যে রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রের যাচাই
Verification of principle of conservation of linear momentum using calculus

ধরা যাক, m_1 ভরের একটি বস্তুর রৈখিক ভরবেগ $\vec{P}_1$ এবং m_2 ভরের অন্য একটি বস্তুর রৈখিক ভরবেগ $\vec{P}_2$। সংঘর্ষকালে m_1 বস্তুটি m_2 বস্তুর ওপর $\vec{F}_{21}$ বল এবং m_2 বস্তুটি m_1 বস্তুর ওপর $\vec{F}_{12}$ বল প্রয়োগ করে।

এখন নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার, নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুসারে, $\vec{F}_{12} = m_1$ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{d\vec{P}_1}{dt}$

এবং $\vec{F}_{21} = m_2$ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{d\vec{P}_2}{dt}$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$\therefore \quad \frac{d\vec{P}_2}{dt} = -\frac{d\vec{P}_1}{dt}$$

বা, $\frac{d\vec{P}_2}{dt} + \frac{d\vec{P}_1}{dt} = 0$

বা, $\frac{d}{dt}(\vec{P}_2 + \vec{P}_1) = 0$

বা, $\vec{P}_2 + \vec{P}_1 =$ ধ্রুবক ... ... (ii)

এটিই রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

৪.১৩.২ রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র

Newton's third law of motion from the principle of conservation of linear momentum

চিত্র ৪.১৬–এ বর্ণিত m_1 ও m_2 ভরের বস্তুদ্বয়ের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে রৈখিক ভরবেগ সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী লেখা যায়,

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

বা, $m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2 = -(m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1)$

বা, $\frac{m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{u}_2}{t} = -\frac{m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{u}_1}{t}$ [উভয়পক্ষে t দ্বারা ভাগ করে]

বা, m_2 বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= -$ (m_1 বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার)

বা, m_1 বস্তু কর্তৃক m_2 বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল $= -$ (m_2 বস্তু কর্তৃক m_1 বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল)

$\therefore \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ $\therefore$ ক্রিয়া $= -$ প্রতিক্রিয়া।

সুতরাং, ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া পরস্পরের সমান ও বিপরীতমুখী। **এটিই নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র।**

অনুসন্ধানমূলক কাজ : জানালার কাচে ঢিল মারলে কাচটি টুকরো টুকরো হয়ে ভেঙ্গে যায়; কিন্তু বন্দুকের গুলি দিয়ে ওই অংশে আঘাত করলে একটি ছোট গর্ত হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

একটি গুলির গতিবেগ ঢিলের গতিবেগ অপেক্ষা অনেক বেশি। ঢিলটির গতিবেগ কম হওয়ায় ঢিলের সঙ্গে কাচের সংঘর্ষের সময় অপেক্ষাকৃত বেশি হয়। ফলে এর গতিশক্তি সমগ্র কাচে ছড়িয়ে পড়ে। এই কারণে কাচটি টুকরো টুকরো হয়ে ভেঙ্গে যায়। পক্ষান্তরে গুলির গতিবেগ অনেক বেশি হওয়ায় কাচের সঙ্গে গুলির সংঘর্ষের সময় অনেক কম হয়। তাই এটির গতিশক্তি শুধুমাত্র সংঘর্ষের জায়গায় সীমাবদ্ধ থাকে। ফলে কাচে গুলির পরিমাপ অনুযায়ী ছোট গর্ত হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৬

১। 4 kg ভরের একটি পাখি একটি আম গাছে বসে আছে। পাখিটিকে 200 ms^{-1} বেগে 20 g ভরের একটি বুলেট অনুভূমিকভাবে আঘাত করল। বুলেটটি পাখির মধ্যে রয়ে গেলে পাখিটির অনুভূমিক বেগ কত হবে নির্ণয় কর।

[CKRUET Admission Test, 2020-21]

আমরা জানি,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

বা, $4 \times 0 + 0.02 \times 200 = 4 \times v_1 + 0.02 \times 0$

বা, $0 + 4 = 4v_1 + 0$

বা, $4v_1 = 4$

$\therefore v_1 = 1 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,

পাখির ভর, $m_1 = 4$ kg

গুলির ভর, $m_2 = 20$ g $= 0.02$ kg

পাখির আদিবেগ, $u_1 = 0$

গুলির আদিবেগ, $u_2 = 200$ ms^{-1}

পাখির শেষ বেগ, $v_1 = ?$

গুলির শেষ বেগ, $v_2 = 0$

২। 1200 kg ভরের একটি গাড়ি $20\ ms^{-1}$ বেগে **চলছিল। গাড়িটি চলতে চলতে থেমে থাকা 800 kg ভরের অন্য একটি স্থির গাড়িকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর গাড়ি দুটি একত্রিত অবস্থায় 50 m পথ অগ্রসর হয়ে থেমে গেল।** বাধাদানকারী বলের মান কত? [চ. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); RU Admission Test, 2016-17 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\ v$$

বা, $1200 \times 20 + 800 \times 0 = (1200 + 800)\ v$

বা, $24000 = 2000\ v$

$\therefore$ $v = 12\ ms^{-1}$

আবার $v_2{}^2 = v^2 + 2as$

বা, $0 = (12)^2 + 2 \times a \times 50$

বা, $0 = 144 + 100\ a$

বা, $100\ a = -144$

$\therefore$ $a = -1{\cdot}44\ ms^{-2}$

এখানে,
প্রথম বস্তুর ভর, $m_1 = 1200$ kg
দ্বিতীয় বস্তুর ভর, $m_2 = 800$ kg
প্রথম বস্তুর বেগ, $v_1 = 20\ ms^{-1}$
দ্বিতীয় বস্তুর বেগ, $v_2 = 0$
মিলিত বেগ, $v = ?$
শেষ বেগ, $v' = 0$
দূরত্ব, $s = 50$ m
বাধাদানকারী বল, $F = ?$

$\therefore$ বাধাদানকারী বল, $F = ma = 2000 \times -1{\cdot}44 = -2880$ N

৩। **6 kg ভরের একটি বন্দুক হতে $0{\cdot}01$ kg ভরের একটি গুলি $300\ ms^{-1}$ বেগে বের হয়ে গেল। বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ নির্ণয় কর।** [ম. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১১; Admission Test : CU 2018-19; JU 2016-17; IU 2017-18; AGRI 2020-21 (মান ভিন্ন); RU 2021-22 (মান ভিন্ন)]

মনে করি, বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ = V

ভরবেগের নিত্যতা সূত্র হতে আমরা পাই,

$$Mv + mV = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

বা, $Mv = -mV$

$\therefore$ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$v = \frac{-mV}{M} = \frac{0{\cdot}01\ kg \times 300\ ms^{-1}}{6\ kg} = 0{\cdot}5\ ms^{-1}$$

এখানে, $M = 6$ kg
$m = 0{\cdot}01$ kg
$v = 300\ ms^{-1}$
$V = ?$

৪। **8 kg ভরের একটি বন্দুকের নল থেকে 10 g ভরের একটি গুলি বের হলে বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বেগ $10\ ms^{-1}$ হয়। গুলিটি লক্ষ্যবস্তুর মধ্যে $0{\cdot}3$ m প্রবেশ করার পর থেমে যায়। গুলিটির ওপর প্রযুক্ত বাধা নির্ণয় কর।**

যেহেতু t গুলি ছোড়ার আগে বন্দুক ও গুলি উভয়ই স্থির ছিল ফলে এদের মোট ভরবেগের মান = 0

এবার বন্দুক ও গুলির ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং এদের বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2 হলে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী পাই,

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

বা, $0 = 8 \times 10 + \dfrac{10}{1000} \times v_2 = 80 + 1 \times 10^{-2}\ v_2$

বা, $v_2 = -\dfrac{80}{1 \times 10^{-2}} = -8 \times 10^3\ ms^{-1}$

$\therefore$ $v_2 = u =$ গুলির আদিবেগ $= -8 \times 10^3\ ms^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 8$kg
$m_2 = 10\ g = 1 \times 10^{-3}$ kg
$= 1 \times 10^{-2}$ kg
$v_1 = 10\ ms^{-1}$

লক্ষ্যবস্তুর মধ্যে $0{\cdot}3$ m প্রবেশ করার পর গুলির বেগ শূন্য হয়। গুলির মন্দন a হলে,

$v^2 = u^2 - 2as$ সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$0 = (-8 \times 10^3)^2 - 2a \times 0{\cdot}3$

বা, $a = \dfrac{(-8 \times 10^3)^2}{0{\cdot}6} = \dfrac{64 \times 10^6}{0{\cdot}6}$

$= 1{\cdot}067 \times 10^8\ ms^{-2}$

$\therefore$ বাধা, $P = 0{\cdot}01 \times 1{\cdot}067 \times 10^8 = 1{\cdot}067 \times 10^6$ N

এখানে,
$u = -8 \times 10^3\ ms^{-1}$
$s = 0{\cdot}3$ m
$m = 10\ g = 0{\cdot}01$ kg

৫। 2500 kg ভরের একটি গাড়ি এবং 40 $kmhr^{-1}$ বেগে ধাবমান 1×10^4 kg ওজনের একটি ট্রাকের সাথে সম্মুখ সংঘর্ষের পর ট্রাকের ওপর উঠে গেল। সংঘর্ষের পর গাড়িসহ ট্রাকটি 12 $kmhr^{-1}$ বেগে অগ্রসর হলে গাড়ির বেগ নির্ণয় কর।

সংঘর্ষটি পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক।

সুতরাং, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে,

$mu + MV = (m + M)v$

$\therefore$ $2500 \times u + 10000 \times 40 = (2500 + 10,000) \times 12$

বা, $2{\cdot}5 \times 10^3\, u + 400 \times 10^3 = 12{\cdot}5 \times 12 \times 10^3$

বা, $2{\cdot}5\, u + 400 = 12{\cdot}5 \times 12$

বা, $2{\cdot}5\, u = 12{\cdot}5 \times 12 - 400 = -250$

বা, $u = -\dfrac{250}{2{\cdot}5} = -100\ kmhr^{-1}$

এখানে,

গাড়ির ওজন, $m = 2500$ kg

ট্রাকের ওজন, $M = 1 \times 10^4$ kg $= 10000$ kg

ট্রাকের বেগ, $V = 40\ kmhr^{-1}$

গাড়িসহ ট্রাকের বেগ, $v = 12\ kmhr^{-1}$

গাড়ির বেগ, $u = ?$

অতএব, সংঘর্ষের আগে গাড়িটি বিপরীত দিক থেকে 100 $kmhr^{-1}$ বেগে গতিশীল ছিল।

কাজ : দেখাও যে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র প্রতিপাদন করা যায়।

বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র থেকে আমরা জানি যে কোনো সংস্থার (system) সংঘর্ষের আগে এবং পরে মোট ভরবেগ অপরিবর্তিত থাকে, অর্থাৎ

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

একটি বস্তুর প্রাথমিক ভরবেগ,

$P_1 = m_1u_1$

এবং সংঘর্ষের পরে ওই বস্তুর ভরবেগ,

$P_2 = m_1v_1$

$\therefore$ ভরবেগের পরিবর্তন, $P_1 - P_2 = m_1(u_1 - v_1)$

এখানে,

m_1 ও m_2 বস্তু দুটির ভর

u_1 ও u_2 এদের প্রাথমিক বেগ

v_1 ও v_2 এদের চূড়ান্ত বেগ

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তন, $P_1' - P_2' = m_2(u_2 - v_2)$

অতএব, $m_1(v_1 - u_1) = -m_2(v_2 - u_2)$

যদি ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া t সময় ধরে স্থায়ী হয় তবে,

$$m_1\frac{(v_1 - u_1)}{t} = -m_2\frac{(v_2 - u_2)}{t}$$

$\therefore$ $m_1a_1 = -m_2a_2$

বা, $F_1 = -F_2$

অর্থাৎ বস্তু দুটির পারস্পরিক ক্রিয়ার ক্ষেত্রে ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া বল পরস্পরের সমান এবং বিপরীত। **এটিই নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র।**

৪.১৪ নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ও ভরবেগের নিত্যতা

Newton's third law of motion and conservation of momentum

নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ছাড়া আর কিছুই নয়। একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করে তখন দ্বিতীয় বস্তুটিও প্রথম বস্তুর ওপর একটি সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। প্রথম বস্তু দ্বিতীয় বস্তুর ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাকে যদি ক্রিয়া (Action) ধরা হয়, তবে দ্বিতীয় বস্তু কর্তৃক প্রথম বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বলকে প্রতিক্রিয়া (Reaction) বলা হয়।

দুটি বস্তু স্থির থাকুক বা গতিশীল হোক একে অপরকে স্পর্শ করুক বা পরস্পর থেকে দূরে থাকুক নিউটনের তৃতীয় সূত্র সকল ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হবে।

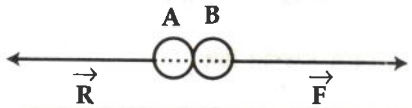
ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সম্পর্ক কার্যকারণ সম্পর্ক নয়। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া একে অপরের সরণে বা পরে ক্রিয়াশীল হয় না। বল দুটি সব সময় একসঙ্গে ক্রিয়া করে। ক্রিয়া যতক্ষণ স্থায়ী হয়, প্রতিক্রিয়াও ঠিক ততক্ষণ স্থায়ী হয়। ক্রিয়া বন্ধ হলে প্রতিক্রিয়াও বন্ধ হয়ে যায়।

প্রকৃতিতে বল সকল সময় জোড়ায় জোড়ায় ক্রিয়া করে। প্রকৃতিতে একক বিচ্ছিন্ন বল বলে কিছু থাকতে পারে না। আমরা যখন বলি, একটি বল ক্রিয়া করছে তখন আসলে দুটি ক্রিয়াশীল বলের মধ্যে একটির কথা বলি। এই দুটি বল একে অপরের পরিপূরক।

উপরিউক্ত আলোচনা হতে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র ও ভরবেগের নিত্যতা সূত্র সম্বন্ধে একটি ধারণা পাওয়া যায়। সূত্রটি হলো :

সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া রয়েছে। অর্থাৎ **প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক বলের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক বল রয়েছে।** এই সূত্রকে বস্তুসমূহের মধ্যে বলের পারস্পরিক ক্রিয়ার সূত্র বলা যায়। কাজেই ক্রিয়ামূলক বল $\vec{F}$ ও প্রতিক্রিয়ামূলক বল $\vec{R}$ হলে, $\vec{F} = -\vec{R}$। **অপরদিকে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ভিন্ন অন্য কোনো বল ক্রিয়া না করলে রৈখিক ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না।**

ব্যাখ্যা : নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে যদি একটি বস্তু A অপর একটি বস্তু B-এর ওপর বল প্রয়োগ করে, তা হলে B বস্তুও A বস্তুর ওপর সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করবে [চিত্র ৪.১৭]।



চিত্র ৪.১৭

A-এর দ্বারা প্রযুক্ত বল হলো **ক্রিয়া** এবং B-এর দ্বারা প্রযুক্ত বল হলো **প্রতিক্রিয়া**। কাজেই ক্রিয়া $\vec{F}$ ও প্রতিক্রিয়া $\vec{R}$ হলে, $\vec{F} = -\vec{R}$

ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া দুটি ভিন্ন বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয়। ক্রিয়া না থাকলে প্রতিক্রিয়াও থাকে না। ক্রিয়া বা প্রতিক্রিয়া বলের কার্যকাল t হলে $\vec{F} \times t = -\vec{R} \times t$ ... ... (4.15)

অর্থাৎ , **ক্রিয়াজনিত বলের ঘাত = —প্রতিক্রিয়াজনিত বলের ঘাত।**

এটি স্থির বা গতিশীল যেকোনো বস্তুর ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য।

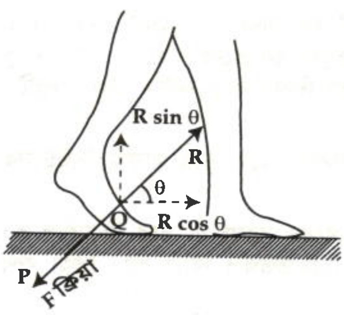
নিচে কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র এবং ভরবেগের নিত্যতা ব্যাখ্যা করা হলো।

উদাহরণ :

১। টেবিলের ওপর বই থাকা : একটি টেবিলের ওপর বই রাখা হলে বই-এর ওজন টেবিলের উপর লম্বভাবে চাপ প্রয়োগ করবে। এটিই ক্রিয়া। নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্রানুসারে টেবিল বই-এর ওপর ওপরের দিকে সমপরিমাণ বল প্রয়োগ করবে। এটি হলো প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান ও বিপরীত হওয়ায় বইটি টেবিলের ওপর সাম্যাবস্থায় থাকে।

২। বন্দুক হতে গুলি ছোড়া : যখন বন্দুক হতে শিকারী গুলি ছোড়ে তখন সে পেছন দিকে একটা ধাক্কা অনুভব করে। প্রাথমিক অবস্থায় বন্দুক ও গুলি উভয়েরই বেগ শূন্য থাকে। ফলে তাদের মিলিত ভরবেগও শূন্য থাকে। গুলি ছোড়া হলে তা সামনের দিকে একটা ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে বন্দুকটি গুলির সমান ও বিপরীত ভরবেগ প্রাপ্ত হবে অর্থাৎ বন্দুকটি সমান ভরবেগে পেছনের দিকে যাবে এবং শিকারী পেছন দিকে ধাক্কা অনুভব করবে [চিত্র ৪.৯]।

৩। নৌকা থেকে লাফ দেয়া : যখন আরোহী নৌকা হতে নদীর পাড়ে লাফিয়ে পড়ে, তখন নৌকাটিকে পেছনে ছুটে যেতে দেখা যায়। আরোহী নৌকার ওপর যে বল প্রয়োগ করে তাতে নৌকাটি পেছনে যায়। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে নৌকাও আরোহীর ওপর সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। ফলে আরোহী তীরে পৌঁছায়।



চিত্র ৪.১৮

৪। পায়ে হাঁটা : আমরা যখন পায়ে হেঁটে চলি তখন সামনের পা মাটির উপর লম্বভাবে নিচের দিকে একটা বল প্রয়োগ করে। এর নাম ক্রিয়া। মাটিও সামনের পায়ের তলার ওপর সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। এর নাম প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান এবং বিপরীত হওয়ায় সামনের পা স্থির থাকে।

কিন্তু পেছনের পা মাটির ওপর Q বিন্দুতে তির্যকভাবে $\vec{F}$ পরিমাণ বল QP বরাবর ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.১৮]। এই বল অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে মাটি পায়ের তলার ওপর সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে।

মনে করি প্রতিক্রিয়া বল $\vec{R}$। ফলে $\vec{R} = -\vec{F}$। প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক অংশক $R \cos \theta$ আমাদেরকে সামনের দিকে এগিয়ে নেয় এবং উল্লম্ব অংশক $R \sin \theta$ শরীরের ওজন বহন করতে সাহায্য করে।

কিন্তু পিচ্ছিল পথে চলা শক্ত হয়। কারণ পথ পিচ্ছিল হলে মাটির ওপর যথেষ্ট বল প্রয়োগ করা পায়ের পক্ষে সম্ভব হয় না। ফলে পায়ের ওপর মাটির প্রতিক্রিয়া বল এবং সাথে সাথে প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক অংশক কম হয়। এজন্যে পিচ্ছিল পথে চলা শক্ত হয়। মার্বেলের তৈরি মেঝে, বালুকাময় রাস্তায় হাঁটতে একই সমস্যা।

কাজ : গাড়ির টায়ারের বাইরের দিক খাঁজ যুক্ত করে তৈরি করা হয় কেন ?

গাড়ির টায়ারের বাইরের দিকে খাঁজযুক্ত করে তৈরি করা হয়। কারণ এতে গাড়িটি এর সঠিক গতির জন্য প্রয়োজনীয় ঘর্ষণ বল লাভ করে। এই খাঁজের ফলে টায়ার রাস্তাকে যথাযথভাবে আঁকড়ে ধরতে সমর্থ হয়। এভাবে আঁকড়ে ধরতে না পারলে গাড়িটি স্থিতিশীল অবস্থা হতে গতিশীল হতে পারত না। আবার গতিশীল অবস্থায় ব্রেক করা হলে টায়ার পিছলে যেত। তাই গাড়িটিকে যথাযথভাবে চালনা করার জন্য টায়ারের বাইরের দিক খাঁজযুক্ত করে তৈরি করা হয়।

কাজ : একটি বায়ু ভর্তি বেলুন খোলা অবস্থায় ছেড়ে দিলে খোলা মুখের বিপরীত দিকে ছুটতে দেখা যায় কেন ?

বেলুন সংকুচিত করলে বায়ুর ওপর একটি বল প্রয়োগ করে। ফলে খোলা মুখ দিয়ে বায়ু সজোরে বেরিয়ে আসে। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে এ সময় বায়ুও বেলুনের ওপর একটি বিপরীত বল প্রয়োগ করে। তাই বায়ু ভর্তি বেলুন মুখ খোলা অবস্থায় ছেড়ে দিলে খোলা মুখের বিপরীত দিকে ছুটতে দেখা যায়।

৫। লিফটে প্রতিক্রিয়া (Reaction in a lift) : লিফটে ওঠানামা করার সময় আমরা ওজনের পরিবর্তন অনুভব করি। স্থিরাবস্থা থেকে ত্বরণ নিয়ে লিফট যখন ওপরে উঠতে থাকে তখন একজন আরোহী নিজেকে অপেক্ষাকৃত ভারী অনুভব করে। আবার, লিফট হঠাৎ নিচে নামতে শুরু করলে আরোহীর তখন বিপরীত অনুভূতি হয় অর্থাৎ আরোহী হাল্কা অনুভব করে। লিফট যখন স্থির থাকে বা সমবেগে চলে অর্থাৎ ত্বরণ না থাকে তখন বস্তুর আপাত ওজনের কোনো পরিবর্তন হয় না। চলন্ত লিফটে আরোহীর ওজনের পরিবর্তন নিউটনের গতিসূত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।

চিত্র ৪.১৯

(i) লিফট যখন a ত্বরণে ওপরে উঠে : মনে করি m ভরের একজন আরোহী লিফটের মেঝেতে দাঁড়িয়ে আছে [চিত্র ৪.১৯]। ওই আরোহী লিফটের মেঝেতে mg পরিমাণ বল প্রয়োগ করে। লিফটের মেঝে আরোহীর ওপর উর্ধ্বমুখী প্রতিক্রিয়া বল R ক্রিয়া করে। এই প্রতিক্রিয়া বল R আরোহীর ওজন mg অপেক্ষা বেশি হলে আরোহী লিফটের সঙ্গে a ত্বরণে ওপরে উঠবে।

আরোহীর ওপর মোট উর্ধ্বমুখী বল $= R - mg$

এখন, নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী আমরা পাই,

$$R - mg = ma$$

বা, $$R = mg + ma = m(g + a) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

মেঝের এই প্রতিক্রিয়াই বস্তু বা ব্যক্তির কার্যকর ওজন। সুতরাং ওই আরোহীর ওজন,

$$W' = m(g + a)$$

সমীকরণ (i) থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রতিক্রিয়া বল আরোহীর ওজন (mg) অপেক্ষা বেশি হওয়ায় আরোহী নিজেকে তুলনামূলকভাবে ভারী মনে করবে।

লিফট মন্দন নিয়ে নামতে থাকলে আরোহীর ওজনের একইরকম বৃদ্ধি ঘটে।

(ii) যখন লিফট a ত্বরণে নিচে নামে : আরোহীর ওজন (mg) যখন লিফট দ্বারা প্রদত্ত প্রতিক্রিয়া বল R-এর চেয়ে বেশি হয় তখন আরোহী লিফটের সঙ্গে লিফটের ত্বরণ a সহ নিচে নামে [চিত্র ৪.১৮]। এক্ষেত্রে আরোহীর ওপর প্রযুক্ত মোট বল হবে, $mg - R$।

$$mg - R = ma$$

বা, $$R = m(g - a) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (ii) থেকে দেখা যায় যে আরোহীর ওপর লিফটের প্রতিক্রিয়া R আরোহীর ওজনের তুলনায় কম হওয়ায় আরোহী নিজেকে হাল্কা মনে করবে।

লিফট মন্দন নিয়ে ওপরে উঠলেও আরোহীর একই অনুভূতি হবে।

(iii) লিফট যখন স্থির থাকে বা সমবেগে ওঠানামা করে : লিফট যখন স্থির থাকে অথবা সমবেগে চলাচল করে তখন এর ত্বরণ $a = 0$; সুতরাং বস্তু বা আরোহীর ওপর প্রতিক্রিয়া বল $R = mg$। অর্থাৎ প্রতিক্রিয়া বল আরোহীর ওজনের সমান হয়। সুতরাং এক্ষেত্রে আরোহী বা বস্তুর ওজনের কোনো আপাত পরিবর্তন ঘটবে না।

(iv) লিফট যখন অবাধে নিচে নামে : লিফট যখন অবাধে নিচে নামে তখন এর ত্বরণ $a = g$। সুতরাং প্রতিক্রিয়া $R = 0$। অর্থাৎ এক্ষেত্রে লিফটের মেঝে আরোহীর ওপর কোনো ঊর্ধ্বমুখী বল প্রয়োগ করবে না। আরোহীও লিফটের মেঝেতে নিচের দিকে কোনো বল প্রয়োগ করবে না। সুতরাং, লিফটের মধ্যে আরোহী নিজেকে সম্পূর্ণ ভারহীন (Weightless) মনে করবে। [DAT: 24-25]

(v) লিফট যখন অভিকর্ষজ ত্বরণ অপেক্ষা বেশি ত্বরণে নিচে নামে : ধরা যাক, লিফট কোনোভাবে অভিকর্ষজ ত্বরণ g অপেক্ষা বেশি ত্বরণে (অর্থাৎ $a > g$) নিচের দিকে গতিশীল। এই অবস্থায় লিফটের গতি শুরু হওয়ার সাথে সাথে আরোহী বা বস্তুর সাথে লিফটের মেঝের সংস্পর্শ বিচ্ছিন্ন হয়। ফলে আরোহীর ঊর্ধ্বমুখী গতি থাকবে যতক্ষণ পর্যন্ত না আরোহীর মাথা লিফটের ছাদ স্পর্শ করে। তখন লিফটের ছাদ আরোহীর ওপর নিচের দিকে প্রতিক্রিয়া বল R প্রয়োগ করে। অতএব নিউটনের দ্বিতীয় গতি সূত্রানুসারে লেখা যায়,

$$R + mg = ma$$

বা, $$R = m(a - g) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

এখন আরোহী ছাদের সংস্পর্শে থেকে লিফটের সাথে নিচে নামতে থাকে। নিউটনের তৃতীয় গতি সূত্রানাসারে আরোহীও লিফটের ছাদের গায়ে ওপরের দিকে $m(a - g)$ বল প্রয়োগ করে। সুতরাং, এক্ষেত্রে আরোহীর ওজন ওপরের দিকে ক্রিয়া করে। এই ঘটনাকে **অতিভারহীনতা** (super weightlessness) বলা হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৭

১। একটি লিফটের ছাদে আটকানো একটি স্প্রিং তুলার হুক থেকে 3·0 kg ভর ঝুলছে। লিফটটি যখন (i) 0·25 ms^{-2} ত্বরণে ওপরে উঠছে, (ii) 0·2 ms^{-2} ত্বরণে নিচে নামছে, (iii) 0·1 ms^{-1} সমবেগে উঠছে তখন স্প্রিং তুলার পাঠগুলো কী কী হবে ?

(i) এখানে লিফটের ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণ, $a = 0·25\ ms^{-2}$

∴ স্প্রিং তুলাতে কার্যকরী টান, $T = m(g + a) = 3·0\,(9·8 + 0·25)$

$= 3 \times 10·05 = 30·15\ N$

∴ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{30·15}{9·8} = 3·077\ kg$

এখানে,
$m = 3·0\ kg$
$a = 0·25\ ms^{-2}$
$g = 9·8\ ms^{-2}$

(ii) লিফটের নিম্নমুখী ত্বরণ, $a = 0·2\ ms^{-2}$

∴ স্প্রিং তুলাতে কার্যকরী টান, $T = m(g - a) = 3·0\,(9·8 - 0·2)$

$= 28·8\ N$

∴ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{28·8}{9·8} = 2·939\ kg$

এখানে,
$a = 0·2\ ms^{-2}$

(iii) লিফটটি 0·1 ms^{-1} সমবেগে নিচে নামলে এর ত্বরণ হয় শূন্য। এক্ষেত্রে,

∴ স্প্রিং তুলাতে টান, $T = mg = 3·0 \times 9·8 = 29·4\ N$

∴ স্প্রিং তুলাতে পাঠ হবে, $\frac{T}{g} = \frac{3·0 \times 9·8}{9·8} = 3·0\ kg$

এখানে,
$v = 0·1\ ms^{-1}$

২। একটি লিফট 3 ms^{-2} ত্বরণে নিচে নামছে। লিফটের ফ্লোর থেকে 6·7 m দূরে অবস্থানকালে লিফট থেকে একটি বল ফেলা হলো। অভিকর্ষীয় ত্বরণ 9·8 ms^{-2} হলে কত সময় পরে বলটি ফ্লোরে আঘাত করবে ?

আমরা জানি,

বলের লব্ধি ত্বরণ, $a' = g - a = 9·8 - 3 = 6·8\ ms^{-2}$

আবার, $h = ut + \frac{1}{2}a't^2 = \frac{1}{2}a't^2$

∴ $t^2 = \frac{2h}{a'}$

বা, $t = \sqrt{\frac{2h}{a'}} = \sqrt{\frac{2 \times 6·7}{6·8}} = 1·40\ s$

এখানে,
লিফটের ত্বরণ, $a = 3\ ms^{-2}$
উচ্চতা, $h = 6·7\ m$
আদিবেগ, $u = 0$
আঘাতের সময়, $t = ?$

৩। 2400 kg ভরের একটি লিফট $2\cdot5\ ms^{-2}$ ত্বরণসহ ঊর্ধ্বে উঠছে। লিফটির দড়ির টান কত? ওই একই ত্বরণে লিফটটি নিচে নামলে দড়িতে তখন কত টান প্রযুক্ত হবে?

আমরা জানি, লিফটটি ঊর্ধ্বে তুলতে কার্যকরী টান,

$T = m(g+a)$

$\therefore\ T = 2400(9\cdot8 + 2\cdot5)$

$= 2400 \times 12\cdot3 = 29520\ N$

একই ত্বরণে লিফট নিচে নামলে,

$T = m(g-a)$

$\therefore\ T = 2400(9\cdot8 - 2\cdot5)$

$= 2400 \times 7\cdot3 = 17520\ N$

এখানে,
লিফটের ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণ, $a = 2\cdot5\ ms^{-2}$
লিফটির ভর, $m = 2400\ kg$
দড়ির টান, $T = ?$
$g = 9\cdot8\ ms^{-2}$

৪˙১৫ ভরবেগের নিত্যতার গাণিতিক ব্যাখ্যা
Mathematical explanation of conservation of momentum

নিউটনের গতির প্রথম সূত্র থেকে আমরা জানি যে, কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল যদি শূন্য হয়, তা হলে বস্তুটি সরল পথে ধ্রুব বেগে চলতে থাকে। সময়ের সাপেক্ষে বেগ $\vec{v}$ যদি ধ্রুব হয়, তা হলে ভরবেগও $\left(\vec{P} = m\vec{v}\right)$ সময়ের সাপেক্ষে ধ্রুব থাকে।

সূত্র : যখন কোনো ব্যবস্থার ওপর প্রযুক্ত বাহ্যিক বল শূন্য হয়, তখন ব্যবস্থাটির মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তু আছে। এই বস্তু সমষ্টির ওপর বাহ্যিক কোনো বল প্রযুক্ত হচ্ছে না। অতএব বস্তু দুটি কেবলমাত্র পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া বলের প্রভাবে চলছে। যদি m_1-এর ওপর m_2 দ্বারা প্রযুক্ত বল F_1 হয় তাহলে নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী m_2-এর ওপর m_1-এর সমান ও বিপরীতমুখী বল F_2 প্রয়োগ করবে অর্থাৎ

$$F_1 = -F_2 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.16)$$

ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল একই সময় ধরে প্রযুক্ত হয়।

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের বস্তু দুটির ভরবেগ যথাক্রমে P_1 এবং P_2। অতএব নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী,

$$F_1 = \frac{dP_1}{dt} \text{ এবং } F_2 = \frac{dP_2}{dt}$$

$\therefore$ সমীকরণ (4.16) থেকে পাই,

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{dP_2}{dt}$$

বা, $$\frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}(P_1 + P_2) = 0 \qquad \therefore\ P_1 + P_2 = \text{ধ্রুবক বা } P = \text{ধ্রুবক}$$

অর্থাৎ বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগ ধ্রুব থাকে। **এটাই ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি।**

উপরের আলোচনা হতে আমরা যেসব বিষয় জানতে পেরেছি তা হলো :

(১) নীতিটি প্রতিপাদন করার সময় ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বলের প্রকৃতি নিয়ে আলোচনা করা হয়নি।

(২) এই নীতি যেকোনো ধরনের পারস্পরিক ক্রিয়ার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

(৩) ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি। অর্থাৎ এই নীতি অনুযায়ী বিচ্ছিন্ন বস্তু সমষ্টির ভরবেগের পরিবর্তন কেবলমাত্র বাইরে থেকে বল প্রয়োগ দ্বারাই করা যায়।

(৪) এ নীতির সাহায্যে একাধিক বস্তুর মধ্যে পারস্পরিক ক্রিয়া সম্পর্কে জটিল সমস্যার সমাধান করা যায়।

হাতে-কলমে কাজ: তুমি রিকশার ওপর বসে রিকশার চালককে রিকশা চালাতে বলো। রিকশা চলতে থাকবে। এখন তোমার রিকশা সমতল রাস্তা থেকে যখন উঁচু রাস্তার দিকে চলবে তখন রিকশার গতি কমে যাবে। এবার তুমি গদি থেকে ওঠে দাঁড়িয়ে জোরে সামনের দিকে শরীরকে এগিয়ে নিয়ে রিকশার গদিতে বল প্রয়োগ করে বস। রিকশা সামনের দিকে আগের চেয়ে বেশি জোরে চলবে। কেন—ব্যাখ্যা কর।

উঁচু রাস্তার কারণে রিকশার বেগ কমে যায়, ফলে ভরবেগও কমে যায়। পুনরায় রিকশায় বল প্রয়োগ করার কারণে ভরবেগ সৃষ্টি হয়। ফলে রিকশা সামনে এগিয়ে যাবে। কিন্তু মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকবে।

৪.১৬ ঘূর্ণন গতি
Rotational motion

সময়ের পরিবর্তনের সাথে যখন কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন হয় তখন এর অবস্থাকে গতি বলে। যেমন গাড়ি, মানুষ ইত্যাদি। কোনো গতিশীল বস্তু যদি সরলরেখা বরাবর চলে তবে বস্তুটির গতিকে চলন গতি বলে। দালানের ছাদ থেকে কোনো বস্তু ছেড়ে দিলে অথবা সোজা পথে চলা কোনো গাড়ির গতি চলন গতি।

চিত্র ৪.২০

আবার **কোনো বস্তু যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের চতুর্দিকে বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে তবে বস্তুর ওই গতিকে ঘূর্ণন গতি বা আবর্ত বলে।** যেমন বৈদ্যুতিক পাখার গতি। যে অক্ষের চতুর্দিকে বস্তুটি ঘূর্ণায়মান হয় তাকে ঘূর্ণন অক্ষ (axis of rotation) বলে।

মনে করি একটি বস্তুকণা O বিন্দুতে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের বক্র তলে ঘুরছে [চিত্র ৪.২০]। বৃত্তাকার পথের তলটি হলো সমতল। একে ঘূর্ণন তল বলে। O বিন্দু দিয়ে ঘূর্ণন অক্ষ অঙ্কিত সরল রেখাটি ঘূর্ণন অক্ষ। r হলো ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ।

ঘূর্ণনের বৈশিষ্ট্যসমূহ : ঘূর্ণন গতির নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্য রয়েছে—

(i) কোনো বস্তুর ঘূর্ণন হলে তার প্রতিটি কণা কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে একই কোণে ঘুরে।

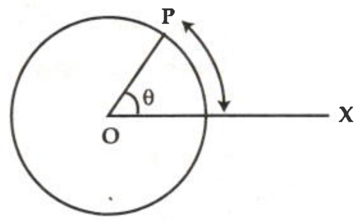
(ii) ঘূর্ণন অক্ষ সবসময় স্থির থাকে।

৪.১৭ ঘূর্ণন গতি সংক্রান্ত রাশিমালা
Terms related to rotational motion

৪.১৭.১ কৌণিক সরণ
Angular displacement

মনে করি, এই বইয়ের পাতার মতো যেকোনো একটি সমতলের ওপর একটি কণা কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O-এর চারদিকে বৃত্ত পথে ঘুরছে। এখানে ঘূর্ণাক্ষ বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দু দিয়ে যাবে এবং বৃত্তের তলের সঙ্গে লম্ব হবে [চিত্র ৪.২১]। যেকোনো মুহূর্তে কণাটির অবস্থান জানার জন্য ওই সমতলে একটি স্থির সরলরেখা OX কল্পনা করতে হয়। OX-কে নির্দেশ রেখা (reference line) বলে।

কণাটি নির্দেশ রেখা অতিক্রম করার মুহূর্ত থেকে সময় গণনা শুরু করলে মনে করি, t সময় পর কণাটির অবস্থান হলো P। স্পষ্টত OP ব্যাসার্ধ OX রেখার সঙ্গে যে θ কোণ উৎপন্ন করে তা জানলেই কণাটির অবস্থান সম্পূর্ণরূপে জানা যায়। θ কোণকে কণার কৌণিক সরণ (angular displacement) বলে। OP ব্যাসার্ধ ভেক্টর।



চিত্র ৪.২১

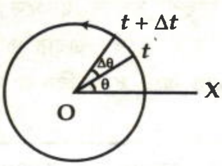
সংজ্ঞা : বৃত্তীয় গতিতে সচল কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে যে কোণে সরে যায়, তাকে ওই সময়ের অবকাশে কণাটির কৌণিক সরণ বলে।

রেডিয়ান এককে প্রকাশ করলে কৌণিক সরণ θ-এর সঙ্গে সংশ্লিষ্ট বৃত্তের চাপ s-এর সম্পর্ক খুবই সরল হয়। বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে লেখা যায়,

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.17)$$

৪.১৭.২ কৌণিক বেগ
Angular velocity

রৈখিক গতির মতো কৌণিক গতিও সম বা অসম (ত্বরিত) হতে পারে। **কৌণিক গতি অসম হলে কৌণিক সরণ এবং অতিক্রান্ত সময়ের অনুপাতকে কণার গড় কৌণিক বেগ (average angular velocity) বলে।**



চিত্র ৪.২২

একে ω অক্ষর দিয়ে প্রকাশ করা হয়। কৌণিক বেগ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে। কৌণিক সরণের মতো একই রীতি এখানে অনুসরণ করা হয়।

অতি ক্ষুদ্র সময়ের অবকাশ Δt তে কণার কৌণিক সরণ $\Delta\theta$ হলে [চিত্র ৪.২২] ওই সময়ের অবকাশে কণার গড় কৌণিক বেগ হবে,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.18)$$

কোনো নির্দিষ্ট মুহূর্তের কৌণিক বেগ জানতে হলে সময়ের অবকাশকে ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর করতে হয়। সময়ের অবকাশের সীমাস্থ মান শূন্য হলে ওই অবকাশে গড় কৌণিক বেগ তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগের (instantaneous angular velocity) সমান হয়।

সংজ্ঞা : অতি ক্ষুদ্র সময়ে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের তাৎক্ষণিক হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ (ω) বলে।

অর্থাৎ $\omega = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$

সাধারণত কৌণিক বেগ বলতে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বোঝায়।

কৌণিক বেগের মান স্থির থাকলে বৃত্তীয় গতিকে সমবৃত্তীয় গতি (uniform circular motion) বলে। সমবৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে t সময়ে কৌণিক সরণ θ হলে কৌণিক বেগের মান হয়,

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{অথবা} \quad \theta = \omega t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.19)$$

এই সমীকরণটি সমরৈখিক গতির সমীকরণ $s = vt$-এর অনুরূপ।

একক : সাধারণত কৌণিক বেগকে রেডিয়ান/সেকেন্ড (radian/sec বা সংক্ষেপে rad/s) এককে প্রকাশ করা হয়। যন্ত্রবিদ্যা বা ইঞ্জিনিয়ারিং-এ আরেকটি একক প্রচলিত আছে। এর নাম আবর্তন/মিনিট বা প্রতি মিনিটে আবর্তন সংখ্যা (revolution per minute, সংক্ষেপে rpm)।

কৌণিক বেগের মাত্রা : $[\omega] = \left[\dfrac{\text{রৈখিক বেগ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}\right] = \dfrac{[LT^{-1}]}{[L]} = [T^{-1}]$

একবার পূর্ণ আবর্তন করতে কণার যে সময় লাগে তাকে **পর্যায়কাল** (time period) বলে। একটি পূর্ণ আবর্তন বলতে 2π রেডিয়ান কৌণিক সরণ বোঝায়। সুতরাং পর্যায়কাল T হলে (4.19) সমীকরণ অনুযায়ী,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.20)$$

$\dfrac{1}{T}$ একক সময়ে পূর্ণ আবর্তনের সংখ্যা বোঝায়। একে **কম্পাঙ্ক** (frequency) বলে। কম্পাঙ্ককে 'n' দিয়ে সূচিত করলে আমরা পাই, $\omega = 2\pi n$। আবার সময় t এবং ঘূর্ণন সংখ্যা N হলে $\omega = \dfrac{2\pi N}{t}$

$$\therefore \quad \omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.21)$$

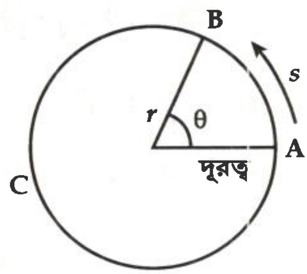
৪.১৮ কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular velocity and linear velocity

আমরা জানি, রৈখিক পথে নির্দিষ্ট দিকে কোনো একটি বস্তুর প্রতি সেকেন্ডের রৈখিক সরণই রৈখিক বেগ এবং বৃত্তাকার পথে কোনো একটি বস্তুর প্রতি সেকেন্ডের কৌণিক সরণই কৌণিক বেগ। রৈখিক বেগকে v_0 অথবা v এবং কৌণিক বেগকে ω দ্বারা প্রকাশ করা হয়। রৈখিক বেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্কজনিত সমীকরণটি এখন প্রতিপাদন করা হবে।

মনে করি একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধি বরাবর ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে [চিত্র ৪.২৩]। যদি T সেকেন্ডে কণাটি বৃত্তের সম্পূর্ণ পরিধি একবার ঘুরে আসে তবে কৌণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে,

$$\omega = \frac{\text{কৌণিক দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{বা, } T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.22)$$



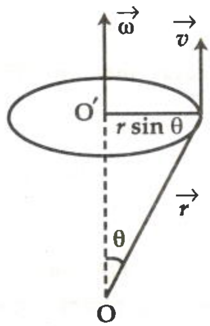
চিত্র ৪.২৩

আবার কৌণিক বেগ ω, কৌণিক সরণ θ হলে ঘূর্ণন সংখ্যা $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$

এখন যদি বৃত্তাকার পথে না ঘুরে কণাটি v বেগে একই সময়ে সরলরেখায় বৃত্তের পরিধির সমান পথ T সময়ে অতিক্রম করে, তবে

$$v = \frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে সময়}} = \frac{2\pi r}{T}$$

বা, $T = \frac{2\pi r}{v}$ ... ... (4.23)



চিত্র ৪.২৪

সমীকরণ (4.22) এবং সমীকরণ (4.23) হতে আমরা পাই, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$

বা, $\frac{1}{\omega} = \frac{r}{v}$

বা, $v = \omega r$ ... ... (4.24)

অর্থাৎ, রৈখিক বেগ = কৌণিক বেগ × বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

সমীকরণ (4.24)-এর ভেক্টর রূপ হলো : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$; এই তিনটি ভেক্টরের দিক চিত্র ৪.২৪-এ দেখানো হলো।

উল্লেখ থাকে যে, বৃত্তীয় গতি যদি অসম হয়, তবুও যেকোনো বিন্দুতে $v = \omega r$। বস্তুটি সমকৌণিক বেগে চললে ω = ধ্রুবক। অতএব $v \propto r$ অর্থাৎ রৈখিক বেগ ঘূর্ণন অক্ষ হতে দূরত্বের সমানুপাতিক।

উদাহরণ : ধান মাড়াইয়ের ক্ষেত্রে দূরবর্তী গরুকে সবচেয়ে বেশি বেগে হাঁটতে হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : মাঝে মাঝে বোলার কর্তৃক নিক্ষিপ্ত ক্রিকেট বল নিক্ষেপ বেগের চেয়ে বেশি বেগে ভূমি থেকে প্রতিফলিত হয়—ব্যাখ্যা কর।

ভূমি স্পর্শ করার সময় যদি ক্রিকেট বলটির স্পিন (spin) বা ঘূর্ণন থাকে তবে বলের স্পিন বা ঘূর্ণন গতিশক্তি ওর রৈখিক গতিশক্তির সঙ্গে যুক্ত হয়। ফলে সম্মিলিত গতিশক্তির জন্য ক্রিকেট বলটি নিক্ষেপ বেগ অপেক্ষা বেশি বেগে ভূমি থেকে প্রতিফলিত হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৮

১। একটি কণা 1·5 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 120 বার আবর্তন করে। এর (ক) রৈখিক বেগ, (খ) পর্যায়কাল এবং (গ) কৌণিক বেগ কত ? [রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০০১; ম. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]

এখানে,

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 1{\cdot}5$ m

আবর্তন বা কম্পন সংখ্যা, $n = \frac{120}{1\,\text{min}} = \frac{120}{60\,\text{s}} = 2\,\text{s}^{-1} = 2\,\text{Hz}$

আমরা জানি,

(ক) রৈখিক বেগ, $v = \omega r$

$\therefore\ v = 2\pi n r$
$= 2 \times 3{\cdot}14 \times 2 \times 1{\cdot}5$
$= 18{\cdot}854\ \text{ms}^{-1}$

(খ) পর্যায়কাল, $T = \frac{t}{N} = \frac{60}{120} = 0{\cdot}5$ s $\left[\because T = \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{N}{t}} = \frac{t}{N}\right]$

বা, $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$ s

(গ) কৌণিক বেগ, $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$

$= \frac{2 \times 3{\cdot}14}{0{\cdot}5} = 12{\cdot}56\ \text{rad s}^{-1}$

উত্তর : (ক) $18{\cdot}854\ \text{ms}^{-1}$, (খ) 0·5 s, (গ) $12{\cdot}56\ \text{rad s}^{-1}$

২। **একটি ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার, মিনিটের কাঁটার এবং ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।**

[DU (Technology) Admission Test, 2021-22, 2019-20]

যেহেতু সেকেন্ডের কাঁটা 60s-এ 1 বার পূর্ণবৃত্ত ঘুরে আসে, তাই সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক বেগ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$$
$$= 0{\cdot}105 \text{ rads}^{-1}$$

যেহেতু মিনিটের কাঁটা 60 min-এ 1 বার পূর্ণবৃত্ত ঘুরে আসে, তাই মিনিটের কাঁটার কৌণিক বেগ,

$$\omega = \frac{2\pi}{60 \times 60} = \frac{\pi}{1800} = 1{\cdot}74 \times 10^{-3} \text{ rads}^{-1}$$

যেহেতু ঘণ্টার কাঁটা 12 ঘণ্টায় 1 বার পূর্ণবৃত্ত ঘুরে আসে, তাই ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক বেগ,

$$\omega = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60} = \frac{\pi}{21600} = 1{\cdot}45 \times 10^{-4} \text{ rads}^{-1}$$

৪˙১৯. কৌণিক ত্বরণ
Angular acceleration

অনেক ক্ষেত্রে আবর্তনরত কণার কৌণিক বেগ বাড়ে বা কমে। কৌণিক বেগ পরিবর্তিত হলে বোঝা যায় যে কণাটি কৌণিক ত্বরণ নিয়ে চলছে।

আবর্তনরত কণার গড় **কৌণিক ত্বরণ** (average angular acceleration) বলতে কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে সময়ের সঙ্গে কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হার বোঝায়।

অতএব, অতি ক্ষুদ্র সময়ের অবকাশ Δt-তে কৌণিক বেগের পরিবর্তন $\Delta\omega$ হলে ওই অবকাশে গড় কৌণিক ত্বরণ হবে, $\vec{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ... ... (4.25)

সুতরাং কৌণিক ত্বরণের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায়,

সংজ্ঞা : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক ত্বরণ বলে।

ক্যালকুলাস-এর নিয়ম ব্যবহার করে পাই,

$$\alpha = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{বা, } \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \dots \quad \dots \quad (4.26)$$

কৌণিক ত্বরণ বলতে সাধারণত তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বোঝায়। এর একক রেডিয়ান/সেকেন্ড^2 (rad s^{-2})

আবর্তনরত কণার কৌণিক ত্বরণ ধ্রুবক হলে তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ যেকোনো সময়ের অবকাশে গড় কৌণিক ত্বরণের সমান হয়। এক্ষেত্রে t সময়ে কৌণিক বেগের বৃদ্ধি ω হলে, কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = \frac{\omega}{t}$

কৌণিক ত্বরণের মাত্রা, $[\alpha] = \left[\frac{\omega}{T}\right] = \left[\frac{T^{-1}}{T}\right] = [T^{-2}]$

গাণিতিক উদাহরণ ৪.৯

১। **একটি মোটর সাইকেল 400 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে সুষম গতিতে ঘুরছে। মোটর সাইকেলটি 30 sec এ একবার বৃত্ত পরিক্রম করলে এর রৈখিক ত্বরণ কত ?**

এখানে,
$r = 400$ m
T = 30 sec

মোটর সাইকেলের পর্যায়কাল, T = 30 sec

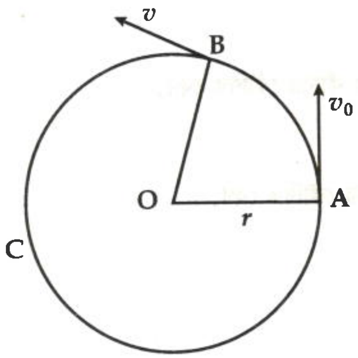
$\therefore$ কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{30}$ rad s^{-1}

$\therefore$ রৈখিক বেগ, $v = r\omega = 400 \times \frac{2\pi}{30} = 26{\cdot}67\pi$ ms^{-1}

অতএব রৈখিক ত্বরণ, $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(26{\cdot}67\pi)^2}{400} = \frac{(26{\cdot}67 \times 3{\cdot}14)^2}{400} = 17{\cdot}53$ ms^{-2}

৪·২০ কৌণিক ত্বরণ ও রৈখিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular accelaration and linear accelaration

মনে করি একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট [চিত্র ৪·২৫] বৃত্তের পরিধি বরাবর অসম বৃত্তাকার গতিতে আবর্তন করছে। বস্তুকণাটির t সময়ে রৈখিক বেগ = v, কৌণিক বেগ = ω, রৈখিক ত্বরণ = a এবং কৌণিক ত্বরণ = α।



চিত্র ৪·২৫

আমরা জানি,

$$v = \omega r \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4.27)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

এবং $a = \dfrac{dv}{dt}$

সমীকরণ 4.27-এর উভয় পক্ষকে t-এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{dv}{dt} = \omega\frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt}r = \frac{rd\omega}{dt} \quad [\because r = \text{ধ্রুবক}]$$

বা, $a = \alpha r \quad \left[\because \dfrac{d\omega}{dt} = \alpha\right]$

অর্থাৎ $\boxed{\text{রৈখিক ত্বরণ} = \text{কৌণিক ত্বরণ} \times \text{ব্যাসার্ধ}}$

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১০

১। পৃথিবী থেকে চাঁদের দূরত্ব 3·84 × 10⁵ km এবং চাঁদ পৃথিবীকে বৃত্তাকার কক্ষপথে 27·3 দিনে একবার প্রদক্ষিণ করে। চাঁদের কৌণিক এবং রৈখিক দ্রুতি নির্ণয় কর।

এখানে,
$r = 3{\cdot}84 \times 10^5$ km
T = 27·3 days
$= 27{\cdot}3 \times 24 \times 60 \times 60$ s
$\omega = ?$
$v = ?$

আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ এবং } v = r\omega$$

$$\therefore \omega = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{27{\cdot}3 \times 24 \times 60 \times 60} = 2{\cdot}662 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$$

এবং $v = r\omega = 3{\cdot}84 \times 10^5 \times 2{\cdot}662 \times 10^{-6} = 1{\cdot}022 \text{ kms}^{-1}$

উত্তর : চাঁদের কৌণিক বেগ $2{\cdot}662 \times 10^{-6}$ rad s^{-1} এবং রৈখিক দ্রুতি $1{\cdot}022$ kms^{-1}

২। একটি বৈদ্যুতিক পাখা মিনিটে 1500 বার বা 1500 rpm ঘুরে। সুইচ বন্ধ করার 4 মিনিট পর পাখাটি বন্ধ হয়ে যায়। পাখাটির কৌণিক ত্বরণ কত ? থেমে যাওয়ার আগে পাখাটি কত বার ঘুরবে ?
[চ. বো. ২০০৭; Admission Test : KUET 2019-20; RUET 2003-04 (মান ভিন্ন)]

এখানে,
আদি কৌণিক বেগ, $\omega_0 = 1500 \text{ rev min}^{-1} = \dfrac{1500 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 50\,\pi \text{ rads}^{-1}$
সময়, $t = 4$ মিনিট $= 4 \times 60$ s $= 240$ s
শেষ কৌণিক বেগ, $\omega = 0$
কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = ?$
কৌণিক সরণ, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

বা, $\alpha = \dfrac{\omega - \omega_0}{t} = \dfrac{0 - 50\pi \text{ rads}^{-1}}{240 \text{ s}} = -0{\cdot}654 \text{ rad s}^{-2}$

আবার,

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t$$

বা, $\theta = \left(\dfrac{50\pi \text{ rad s}^{-1} + 0}{2}\right) \times 240 \text{ s} = 6000\,\pi \text{ rad}$

$\therefore$ থেমে যাওয়ার আগে পাখাটির ঘূর্ণন সংখ্যা $N = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{6000\,\pi}{2\,\pi} = 3000$ rev.

উত্তর : $-0{\cdot}654$ rad s^{-2}; 3000 rev.

৩। একটি গাড়ির চাকার ব্যাসার্ধ 0.8 m এবং চাকাটি 12 π rads^{-1} কৌণিক বেগে চলছিল। ব্রেক কষে গাড়িটিকে 0.6 s সময়ে থামানো হলো। এই সময় অবকাশে গাড়িটি কতটা দূরত্ব অতিক্রম করবে?

আমরা জানি, গাড়ির কৌণিক মন্দন,

$$\alpha = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{12\pi - 0}{0.6}$$
$$= 20\,\pi \text{ rads}^{-2}$$

এ সময় অবকাশে চাকার কৌণিক সরণ,

$$\theta = \frac{\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{(12\,\pi)^2}{2 \times 20\,\pi} = \frac{144\,\pi^2}{40\,\pi} = 3.6\,\pi \text{ rad}$$

$\therefore$ রৈখিক সরণ, $s = r\theta = 0.8 \times 3.6\,\pi = 0.8 \times 3.6 \times 3.14 = 9$ m

এখানে,
$r = 0.8$ m
$\omega_0 = 12\,\pi$ rads^{-1}
$t = 0.6$ s
$\omega = 0$

৪.২১ কৌণিক ভরবেগ
Angular momentum

সংজ্ঞা : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর

এবং $\vec{P}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ

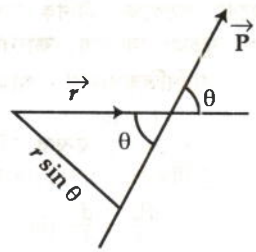
অতএব সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \hat{\eta}\, rP \sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.28)$$

এটি একটি ভেক্টর রাশি। এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক বা কৌণিক ভরবেগের দিক নির্দেশ করে।

মান ও দিক : কৌণিক ভরবেগের মান, $L = rP \sin\theta$

এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ [চিত্র ৪.২৬]। ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব হচ্ছে $r \sin\theta$। অতএব, কোনো বস্তুকণার ভরবেগ ও ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল কৌণিক ভরবেগের মান নির্দেশ করে।



চিত্র ৪.২৬

দিক : $\vec{r}$ ও $\vec{P}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$-এর দিক হবে ওই তলের লম্ব বরাবর। ক্রস গুণনের নিয়ম দ্বারা $\vec{L}$-এর দিক নির্ধারিত হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : কণাটি বৃত্তাকার পথে বৃত্তের কেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশীল হলে, $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$। সেক্ষেত্রে,

$$L = rP \sin\theta = rP = r(mv) = mr\,(r\,\omega) = mr^2\omega \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.29)$$

একক ও মাত্রা সমীকরণ : এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে কৌণিক ভরবেগের একক হচ্ছে kgm^{2}s^{-1} এবং মাত্রা সমীকরণ [L] = [ভরবেগ × দূরত্ব] = [MLT^{-1} L] = [ML^{2}T^{-1}]

৪.২২ কৌণিক ভরবেগ এবং কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular momentum and angular velocity

মনে করি একটি বস্তু ω কৌণিক বেগে একটি অক্ষের চারদিকে ঘুরছে। বস্তুটি অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি হলে আমরা লিখতে পারি,

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots \ldots + l_n$$ [এখানে $l_1, l_2 \ldots \ldots l_n$ পরস্পর সমান্তরাল।]

বা,
$$\begin{aligned} L &= r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 + \ldots \ldots + r_np_n \\ &= r_1m_1v_1 + r_2m_2v_2 + \ldots \ldots + r_nm_nv_n \\ &= r_1m_1\omega r_1 + r_2m_2\omega r_2 + \ldots \ldots \ldots \\ &= m_1r_1^2\omega + m_2r_2^2\omega + \ldots \ldots \ldots \\ &= \omega\,\Sigma\, mr^2 \\ &= I\omega \qquad [\because I = \Sigma\, mr^2] \end{aligned}$$

$I = \sum mr^2$; I বস্তুর জড়তার ভ্রামক

অর্থাৎ $L = I\omega$ ... ... (4.30)

এখানে, $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t}$

চিত্র ৪.২৭

সমীকরণ (4.30) হলো কৌণিক ভরবেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্ক। উক্ত সম্পর্ক হতে কৌণিক ভরবেগের অপর একটি সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা : ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে কোনো একটি বস্তুর জড়তার ভ্রামক এবং কৌণিক বেগের গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

কৌণিক ভরবেগের ভেক্টর রূপ : কৌণিক ভরবেগ একটি ভেক্টর রাশি। এই ভেক্টরের অভিমুখ ঘূর্ণাক্ষ বরাবর। একটি দক্ষিণাবর্তী স্ক্রুকে কণার আবর্তনের দিকে ঘোরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর সেদিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.২৭]।

জানার বিষয় : একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান। ($L = I\omega$, $\omega = 1$)

অনুধাবনমূলক কাজ : দেখাও যে, সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

আমরা জানি, ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক বেগ

বা, $L = I\omega$। কৌণিক বেগের মান একক হলে বা $\omega = I$ হলে $L = I$ হয়। তাই একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

৪.২৩ কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র
Law of conservation of angular momentum

কৌণিক গতির জন্য নিউটনের প্রথম সূত্র হতে আমরা জানি বাহ্যিক টর্কের ক্রিয়াতেই কেবলমাত্র বস্তুর কৌণিক বেগের তথা কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হয়। টর্কের ক্রিয়া না থাকলে বস্তুটি সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকে। অর্থাৎ সময়ের সাপেক্ষে কৌণিক বেগ ধ্রুব হয়। ফলে কৌণিক ভরবেগও ধ্রুব হয়। একে কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বলে। সুতরাং বলা যায়, **কোনো বস্তুর ওপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।**

গাণিতিক প্রমাণ : আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$L = I\omega$ ... ... (4.31)

এখানে L বস্তুর কৌণিক ভরবেগ, I জড়তার ভ্রামক এবং ω কৌণিক বেগ।

সমীকরণ (4.31)-কে সময়ের সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt}$$

কিন্তু $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$

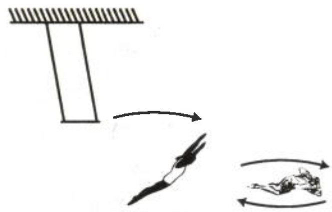
অতএব, $\frac{dL}{dt} = I\alpha = \tau$ [নিউটনের কৌণিক গতির ২য় সূত্র অনুসারে]

এখন $\tau = 0$, অর্থাৎ বস্তুর উপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে,

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \therefore L = \text{ধ্রুবক}$$

কাজেই, বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত বহিস্থ টর্কের লব্ধি শূন্য হলে অথবা, বাইরে থেকে কোনো টর্ক প্রযুক্ত না হলে কোনো অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হবে না। এটিই কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।

উদাহরণ : তোমরা সার্কাসে ট্রাপিজ খেলা দেখে থাকলে দেখবে খেলোয়াড়রা শূন্যে নানা রকম কসরত দেখায়। দোলনা থেকে লাফ দেয়ার সময় খেলোয়াড়ের হাত ও পা সোজা প্রসারিত থাকে। এই সময় তার কৌণিক বেগ খুব কম থাকে। এবার হাত ও পা গুটিয়ে বুকের কাছে আনলে খেলোয়াড়ের কৌণিক বেগ বেড়ে যায়; ফলে তার পক্ষে শূন্যে পরপর ডিগবাজি খাওয়া সম্ভব হয়। হাত পা গুটিয়ে নেয়ার জন্য খেলোয়াড়টির জড়তার ভ্রামক (I) কমে যায়; কিন্তু তার কৌণিক ভরবেগ $L = I\omega$ ধ্রুব থাকে বলে I কমে যাওয়ায় কৌণিক বেগ ω বেড়ে যায় [চিত্র ৪.২৮]।


চিত্র ৪.২৮

যাচাই কর : ডাইভিং বোর্ড থেকে লাফ দেয়ার সময় অথবা বরফের ওপর স্কেটিং করতে করতে পায়ের আঙ্গুলের ওপর ভর দিয়ে ঘোরার যে কসরত দেখানো হয় সেগুলোর ব্যাখ্যা দাও।

৪.২৪ জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ
Moment of inertia and radius of gyration

৪.২৪.১ জড়তার ভ্রামক
Moment of inertia

যখন কোনো দৃঢ় বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষে আবদ্ধ থাকে, তখন ওই বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করলে, আবদ্ধ থাকার কারণে বস্তুটি সরলরেখায় চলতে পারে না। বস্তুটি অক্ষের চারদিকে ঘুরে এবং বস্তুর প্রতিটি কণার কৌণিক সরণ হয়। অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর এ ধরনের গতিকে ঘূর্ণন বা আবর্ত গতি বলে। অক্ষ বস্তুর ভেতরে বা বাইরে থাকতে পারে।

সংজ্ঞা : একটি দৃঢ় বস্তু কোনো একটি স্থির অক্ষের চারদিকে আবর্তিত হতে থাকলে ওই অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তার ভ্রামক বলতে অক্ষ হতে প্রতিটি কণার দূরত্বের বর্গ ও এদের প্রত্যেকের ভরের গুণফলের সমষ্টিকে বুঝায়।

ব্যাখ্যা : মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু [চিত্র ৪.২৯]। এটি একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। যদি বস্তুটি m_1, m_2, m_3 .... m_n ভরের অসংখ্য বস্তুকণার সমষ্টি হয় এবং ভরগুলো ঘূর্ণন অক্ষ হতে যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 .... r_n দূরে অবস্থিত হয় তা হলে সংজ্ঞানুসারে ওই অক্ষ সাপেক্ষে,

প্রথম কণার জড়তার ভ্রামক $= m_1r_1^2$

দ্বিতীয় কণার জড়তার ভ্রামক $= m_2r_2^2$

তৃতীয় কণার জড়তার ভ্রামক $= m_3r_3^2$

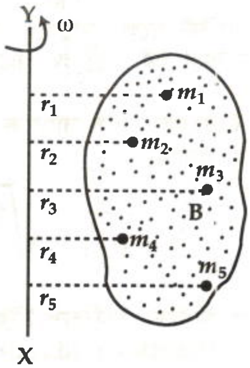
ও n-তম কণার জড়তার ভ্রামক $= m_nr_n^2$

অতএব সংজ্ঞানুসারে সমগ্র বস্তুটির ওই অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots\ldots\ldots m_nr_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.32)$$

বা, $I = Mr^2$



চিত্র ৪.২৯

[$\sum_{i=1}^{n}$ চিহ্ন দ্বারা রাশিগুলোর সমষ্টি বুঝানো হয়েছে।]

সমাকলনের সাহায্যে জড়তার ভ্রামক নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$I = \int r^2 dm \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.33)$$

এখানে dm হচ্ছে বস্তুটির অতি ক্ষুদ্র অংশের ভর এবং r হচ্ছে ঘূর্ণন অক্ষ হতে ওই ক্ষুদ্র অংশটির দূরত্ব।

জড়তার ভ্রামকের একক ও মাত্রা সমীকরণ (Unit and dimension of moment of inertia) :

এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে জড়তার ভ্রামকের একক কিলোগ্রাম-মিটার² (kg-m²) [MAT: 22-23]

এর মাত্রা সমীকরণ [I] = [ভর × দূরত্ব²] = [ML²]

জানার বিষয় : জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে—

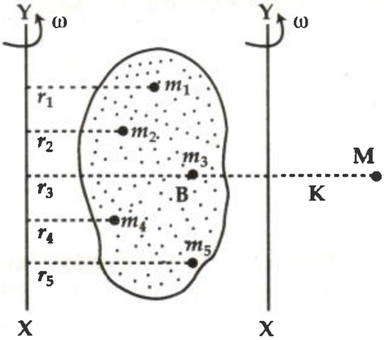
I. ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর।

II. দৃঢ় বস্তুর আকৃতির ওপর। [MAT: 21-22;DAT: 9-20]

III. ঘূর্ণন অক্ষের চারদিকে দৃঢ় বস্তুর ভরের বিন্যাসের ওপর।

৪.২৪.২ চক্রগতির ব্যাসার্ধ
Radius of gyration

সংজ্ঞা : **যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর মোট ভর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত আছে মনে করা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ওই বিন্দু ভরের জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ওই বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।** একে K দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।



চিত্র ৪.৩০

ব্যাখ্যা : মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু যা একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর সাপেক্ষে ঘুরছে। দৃঢ় বস্তুটি $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ ভরের অসংখ্য বস্তু কণার সমন্বয়ে গঠিত এবং কণাগুলো ঘূর্ণন অক্ষ থেকে যথাক্রমে $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots\ldots r_n$ দূরত্বে অবস্থিত।

এখন মনে করি, ঘূর্ণন অক্ষ থেকে K দূরত্বে [চিত্র ৪.৩০] একটি বিন্দুভর,

$M = \sum m_i = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots + m_n)$ অবস্থিত।

স্পষ্টতই, উভয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক একই হবে।

অর্থাৎ

$$MK^2 = \sum m_i r_i^2 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.34)$$

$$\therefore \quad K = \sqrt{\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2}{M}}$$

$$= \sqrt{\frac{I}{M}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.35)$$

নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0.2 m বলতে বুঝা যায় ওই অক্ষ হতে 0.2 m দূরে বস্তুটির সমগ্র ভর কেন্দ্রীভূত আছে বিবেচনা করে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করতে বস্তুটির মোট জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে।

উদাহরণ : ব্যাস সাপেক্ষে একটি নিরেট গোলকের জড়তা ভ্রামক $I = \frac{2}{5} MR^2$। অতএব, ব্যাস সাপেক্ষে এর চক্রগতির ব্যাসার্ধ,

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5} MR^2}{M}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\, R$$

৪.২৫ ঘূর্ণন গতিশক্তি
Rotational kinetic energy

মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু ω কৌণিক বেগে XY-অক্ষের চতুর্দিকে [চিত্র ৪.২৯] বৃত্তাকার পথে সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। এই ঘূর্ণনের জন্য বস্তুটির কিছু গতিশক্তি থাকে। এই গতিশক্তিকে ঘূর্ণন বা আবর্ত গতিশক্তি বলে।

ধরা যাক, m_1 কণার রৈখিক বেগ v_1, অতএব $v_1 = \omega r_1$

m_2 কণার রৈখিক বেগ v_2, অতএব $v_2 = \omega r_2$

m_3 কণার রৈখিক বেগ v_3, অতএব $v_3 = \omega r_3$

সুতরাং, m_1 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2$

m_2 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2$

m_3 কণার গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r_3^2$

এভাবে বস্তুর সকল কণার গতিশক্তি নির্ণয় করে যোগ করলে সমগ্র বস্তুটির গতিশক্তি পাওয়া যায়। সুতরাং বস্তুটির ঘূর্ণন গতিশক্তি,

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \omega^2 r_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots]$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 . I \quad [\text{সমীকরণ } (4.32) \text{ অনুসারে } I = \sum m_i r_i^2]$$

$$= \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.36)$$

বলের সাথে টর্কের তুলনা করলে দেখা যায় যে **রৈখিক গতিতে ভরের যে ভূমিকা ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে জড়তার ভূমিকা একই।**

এখন $\omega = 1$ হলে অর্থাৎ একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক, $I = 2E$ হয় বা গতিশক্তির দ্বিগুণ হয়। তাই বলা যায়, **একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক গতিশক্তির দ্বিগুণ।**

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১১

১। **15 kg ভরের একটি নিরেট চোঙ নিজ অক্ষ সাপেক্ষে 50 rad s^{-1} কৌণিক বেগে ঘুরছে। চোঙটির ব্যাসার্ধ 0·20 m। চোঙটির ঘূর্ণন গতিশক্তি এবং কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।**

(i) আমরা জানি, নিরেট চোঙের জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{2} Mr^2$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \times 15 \times (0{\cdot}20)^2 = 0{\cdot}3 \text{ kgm}^2$$

এখানে,
$M = 15$ kg
$r = 0{\cdot}20$ m
$\omega = 50$ rad s^{-1}

এখন ঘূর্ণায়মান চোঙের ঘূর্ণন গতিশক্তি,

$$E_r = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\therefore \quad E_r = \frac{1}{2} \times 0{\cdot}3 \times (50)^2 = 375 \text{ J}$$

(ii) আবার, চোঙের কৌণিক ভরবেগ, $L = I\omega = 0{\cdot}3 \times 50 = 15 \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$

৪·২৬ টর্ক বা বলের ভ্রামক

Torque or Moment of a force

কোনো দৃঢ় বস্তু একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরতে পারে। যেমন দেয়ালে ঝুলানো ফটো পেরেক ও সুতার সংযোগ বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে থাকে; আবার গাড়ির চাকা তার অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে।

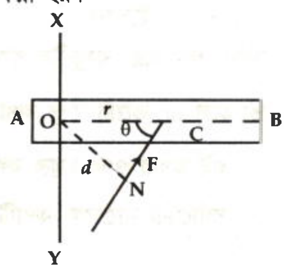
কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্য প্রযুক্ত বল ও ব্যাসার্ধের ভেক্টর গুণফলকে (দ্বন্দ্বের ভ্রামককে) টর্ক বা বলের ভ্রামক বলে। একে τ (টাউ) দ্বারা সূচিত করা হয়।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, O বিন্দুতে একটি পাতলা পাত অনুভূমিক অবস্থায় এমনভাবে আবদ্ধ আছে যে তা উল্লম্ব অক্ষ XOY-এর চতুর্দিকে O-কে কেন্দ্র করে ঘুরতে পারে [চিত্র ৪·৩১]। পাতটিকে তার কোনো বিন্দু C-তে বল প্রয়োগ করে ঘুরালে দেখা যায় যে,

(১) প্রযুক্ত বলের মান যত বেশি হবে, তার ঘূর্ণন সৃষ্টির ক্ষমতাও তত বেশি হবে।

(২) O হতে প্রযুক্ত বল F-এর লম্ব দূরত্ব d যত বেশি হবে, ওই বলে ঘূর্ণন সৃষ্টির ক্ষমতাও তত বেশি হবে।

(৩) বলের ক্রিয়ামুখ O বিন্দু অভিমুখী হলে, পাতটিতে কোনো ঘূর্ণন হবে না।



চিত্র ৪·৩১

উপরোক্ত কারণে কোনো অক্ষ বা বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বলের ভ্রামকের মান বলের পরিমাণ ও অক্ষ হতে বলের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্ব d-এর গুণফল দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।

$$\therefore \quad \tau = d \times F \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.37)$$

বা, **বলের ভ্রামক বা টর্ক = বল × লম্ব দূরত্ব**

চিত্র ৪·৩০-এ O হতে F বলের ক্রিয়াবিন্দু C-এর দূরত্ব $= r$ ও F বলের ক্রিয়ারেখা NC-এর দূরত্ব $= d$ এবং $\angle NCO = \theta$ নির্দেশ করা হয়েছে।

কাজেই, $ON = d = r \sin\theta$

$$\therefore \quad \tau = d \times F = rF\sin\theta$$

ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে τ-কে নিম্ন উপায়ে লেখা হয়,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.38)$$

এখানে, $\vec{r}$ ও $\vec{F}$ যথাক্রমে অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বল। r ও F যে তলে অবস্থিত τ-এর দিক হবে ওই তলের অভিলম্ব বরাবর। ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অর্থাৎ বামাবর্তে (anti-clockwise) ঘূর্ণনের জন্য τ-এর অভিমুখ হচ্ছে

ওপর দিকে এবং মান ধনাত্মক। ঘড়ির কাঁটার দিকে অর্থাৎ দক্ষিণাবর্তে (clockwise) ঘূর্ণনের জন্য τ-এর অভিমুখ নিচের দিকে এবং মান ঋণাত্মক।

সমীকরণ (4.38) অনুসারে টর্কের নিম্নোক্ত গাণিতিক সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা : অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর ওপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ওই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের ভেক্টর গুণফলকে টর্ক বলে।

টর্ক বা বলের ভ্রামকের একক (Unit of torque or moment of force)

এস. আই. পদ্ধতিতে টর্ক বা বলের ভ্রামকের একক নিউটন-মিটার (N-m)

টর্ক বা বলের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of torque or moment of force)

টর্ক বা বলের ভ্রামকের সংজ্ঞা হতে এর মাত্রা সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায়। বলের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ,

[টর্ক বা বলের ভ্রামক] = [বল $\times$ দূরত্ব] = $[\mathrm{MLT^{-2} \times L}]$ = $[\mathrm{ML^2T^{-2}}]$

টর্কের তাৎপর্য (Significance of torque)

একটি অক্ষের সাপেক্ষে কোনো টর্ক থেকে বোঝা যায় কোনো একটি নির্দিষ্ট ভরের বিস্তৃত বস্তুকে কত সহজে ওই অক্ষটির সাপেক্ষে ঘুরানো যাবে। অর্থাৎ টর্ক যত বেশি হবে তত সহজে ওই টর্কের সাহায্যে কৌণিক বেগ পরিবর্তন করা সম্ভব হবে।

৪.২৭ টর্ক, জড়তার ভ্রামক ও কৌণিক ত্বরণ
Torque, moment of inertia and angular acceleration

আমরা জানি সরলরেখায় চলমান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্যে বল প্রয়োগের প্রয়োজন। তেমনি নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্য একটি দ্বন্দ্বের প্রয়োজন হয়। এই দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বলে।

ধরি একটি বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে [চিত্র ৪.২৮]। এখন তার ওপর একটি যুগল প্রয়োগ করায় তার কৌণিক বেগ বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বস্তুতে কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি হবে। বস্তুতে সৃষ্ট এই কৌণিক ত্বরণ তার প্রত্যেকটি কণার কৌণিক ত্বরণের সমান। কিন্তু ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলো বিভিন্ন দূরত্বে অবস্থান করে বিভিন্ন রৈখিক ত্বরণ লাভ করবে। ঘূর্ণাক্ষ হতে কণার দূরত্ব যত বেশি হবে রৈখিক ত্বরণের মানও তত বেশি হবে।

ধরি বস্তুটি m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ভরের কতগুলো কণার সমন্বয়ে গঠিত এবং ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 ইত্যাদি।

বর্ণনা অনুসারে, বস্তুটির প্রত্যেকটি কণার কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

তা হলে m_1 ভরের বস্তু কণাটির রৈখিক ত্বরণ $= r_1\dfrac{d\omega}{dt}$

$\therefore$ ওই কণার ওপর প্রযুক্ত বল = ভর $\times$ রৈখিক ত্বরণ $= m_1 r_1 \dfrac{d\omega}{dt}$

$\therefore$ ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে কণাটির ওপর ক্রিয়ারত বলের ভ্রামক বা টর্ক τ = বল $\times$ ঘূর্ণাক্ষ হতে বস্তু কণার দূরত্ব

$$= m_1 r_1 \frac{d\omega}{dt} \times r_1 = m_1 r_1^2 \frac{d\omega}{dt}$$

অনুরূপভাবে লেখা যায় $m_2, m_3, m_4, \ldots \ldots \ldots$ ইত্যাদি ভরের বস্তুকণার ওপর ক্রিয়ারত বলের ভ্রামক যথাক্রমে $m_2 r_2^2 \dfrac{d\omega}{dt}, m_3 r_3^2 \dfrac{d\omega}{dt}, m_4 r_4^2 \dfrac{d\omega}{dt}$ ইত্যাদি।

তা হলে উপরিউক্ত ভ্রামকগুলোর সমষ্টিই উক্ত বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের ভ্রামক বা টর্ক,

$$\tau = m_1 r_1^2 \frac{d\omega}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\omega}{dt} + m_3 r_3^2 \frac{d\omega}{dt} + m_4 r_4^2 \frac{d\omega}{dt} + \ldots \ldots \ldots$$

$$= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots) \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{I}d\omega}{dt} = \mathrm{I}\alpha$$

$$\therefore \tau = \mathrm{I}\frac{d\omega}{dt} = \mathrm{I}\alpha \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.39)$$

বা, **টর্ক = জড়তার ভ্রামক $\times$ কৌণিক ত্বরণ। কৌণিক ত্বরণের আবর্তনরত বস্তুকণার ওপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের টর্ক হবে ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ও কৌণিক ত্বরণের গুণফলের সমান।**

আবার $\dfrac{d\omega}{dt} = 1$ হলে, $\tau = \mathrm{I}$

$\therefore$ কোনো অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো দৃঢ় বস্তুর ওপর যে টর্ক ক্রিয়া করলে তাতে একক কৌণিক ত্বরণের সৃষ্টি হয় তাকে ওই অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক বলে। সমীকরণ (4.39) টর্ক, জড়তার ভ্রামক এবং কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

যাচাই কর : দেখাও যে কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত টর্ক বস্তুটির কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হারের সমান।

আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

বা, $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad [\because \vec{v} \times \vec{v} = 0]$$

RMDAC

অতএব, কোনো বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১২

১। একটি 8 kg ভরের চাকার চক্রগতির ব্যাসার্ধ 25 cm হলে এর জড়তার ভ্রামক কত হবে ? চাকাটিতে 3 rad/s² কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ? [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি জড়তার ভ্রামক,

$I = Mk^2$ [DAT: 24-25 মান ভিন্ন]

$= 8 \times (0.25)^2$

$= 0.5 \text{ kgm}^2$

$\therefore$ টর্ক, $\tau = I\alpha = 0.5 \times 3 = 1.5 \text{ Nm}$

এখানে,

ভর, $M = 8$ kg

চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = 25$ cm $= 0.25$ m

কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = 3$ rad s^{-2}

২। একটি ধাতব গোলকের ভর 6 g। এটিকে 3 m দীর্ঘ একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে প্রতি সেকেন্ডে 4 বার ঘুরানো হচ্ছে। এর কৌণিক ভরবেগ কত ?

আমরা জানি,

$L = I\omega$, $I = mr^2$ এবং $\omega = \frac{2\pi N}{t}$

$\therefore L = mr^2 \times \frac{2\pi N}{t}$

$= \frac{0.006 \times (3)^2 \times 2 \times 3.14 \times 4}{1}$

$= 1.356 \text{ kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$

এখানে,

গোলকের ভর, $m = 6$ g $= 0.006$ kg

সুতার দৈর্ঘ্য বা

বক্রপথের ব্যাসার্ধ, $r = 3$ m

প্রতি সেকেন্ডে ঘূর্ণন সংখ্যা, $N = 4$ বার

সময়, $t = 1$ sec

কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

৩। 40 kg ভরের একটি বালক নাগরদোলায় চড়ে 20 m ব্যাসের বৃত্তাকার পথে 6 rpm কৌণিক বেগে ঘুরছে। বালকটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$L = I\omega = mr^2\omega$

$= 40 \times (10)^2 \times \frac{1}{5}\pi \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$

$= 2.512 \times 10^3 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$

এখানে,

$\omega = \frac{6 \times 2\pi}{60} = \frac{1}{5}\pi \text{ rad s}^{-1}$

$m = 40$ kg

$r = \frac{d}{2} = \frac{20 \text{ m}}{2} = 10$ m

৪। মঙ্গল গ্রহ সূর্যকে কেন্দ্র করে 2.28×10^{11} m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ঘুরে ধরে নিয়ে এর কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর। মঙ্গল গ্রহের ভর 6.46×10^{23} kg এবং আবর্তন কাল 5.94×10^7 s।

আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$L = I\omega = mr^2 \times \omega = mr^2 \times \frac{2\pi}{T}$

$= \frac{6.46 \times 10^{23} \times (2.28 \times 10^{11})^2 \times 2 \times 3.14}{5.94 \times 10^7}$

$= 3.55 \times 10^{39} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$

এখানে,

ব্যাসার্ধ, $r = 2.28 \times 10^{11}$ m

ভর, $m = 6.46 \times 10^{23}$ kg

আবর্তন কাল, $T = 5.94 \times 10^7$ s

কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

৫। ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং বল ভেক্টর $\vec{F} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে টর্ক $\vec{\tau}$ নির্ণয় কর।

[Admission Test : DU (প্রযুক্তি) 2020-21; CKRUET 2020-21; MIST 2021-22]

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(6-4) - \hat{j}\,(4-4) + \hat{k}\,(4-6)$

$= 2\hat{i} - 0 - 2\hat{k} = 2\hat{i} - 2\hat{k}$

৬। একটি ঘূর্ণায়মান বস্তুর ভর 2 kg। ঘূর্ণন অক্ষ হতে এর দূরত্ব 1 m, বস্তুটি 5 rad s^{-1} কৌণিক বেগে ঘুরলে গতিশক্তি কত হবে ?

[JU Admission Test : 2021-22]

আমরা জানি,

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \times mr^2 \times \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1^2 \times (5)^2$$
$$= 25 \text{ J}$$

এখানে,

$m = 2 \text{ kg}$

$r = 1 \text{ m}$

$\omega = 5 \text{ rads}^{-1}$

৭। একটি নিরেট গোলকের ভর M এবং ব্যাসার্ধ R। একটি ব্যাস সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক $\frac{2}{5}MR^2$। গোলকের স্পর্শক বরাবর অবস্থিত অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক কত?

এক্ষেত্রে $I_G = \frac{2}{5} MR^2$

এখন, সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য অনুসারে গোলকটির স্পর্শক বরাবর অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = I_G + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

৮। M ভরের এবং R ব্যাসার্ধের একটি সুষম চাকতির নিজ ব্যাস সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক $\frac{1}{4}MR^2$। চাকতির কেন্দ্রগামী এবং এর তলের সমকোণে অবস্থিত অক্ষ সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।

ব্যাস সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামক, $I_G = \frac{1}{4}MR^2$

এখন চাকতির পরস্পরের সমকোণে দুটি ব্যাস বিবেচনা করা হলো। একটি ব্যাস X-অক্ষ এবং অন্যটি Y-অক্ষ।

তাহলে, $I_x = I_y = \frac{1}{4}MR^2$

সুতরাং, চাকতির কেন্দ্রগামী এবং এর তলের সমকোণে অবস্থিত অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$I_G = I_x + I_y$ (লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য অনুসারে)

$= \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 = \frac{1}{2}MR^2$

৯। 0·56 kg ভরবিশিষ্ট একটি মিটার স্কেলের 30 cm চিহ্নিত দাগের লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে মিটার স্কেলটির ঘূর্ণন জড়তা নির্ণয় কর। স্কেলটিকে পাতলা রড হিসেবে বিবেচনা কর। [BUET Admission Test, 2019-20]

আমরা জানি ঘূর্ণন জড়তা,

$$I = I_G + Mh^2$$
$$= \frac{Ml^2}{12} + Mh^2$$
$$\therefore I = \frac{0{\cdot}56 \times 1^2}{12} + 0{\cdot}56 \times (0{\cdot}3)^2$$
$$= 0{\cdot}04667 + 0{\cdot}0504$$
$$= 0{\cdot}097 \text{ kg-m}^2$$

এখানে,

$M = 0{\cdot}56 \text{ kg}$

$h = 30 \text{ cm} = 0{\cdot}3 \text{ m}$

$l = 1 \text{ m}$

১০। 1·5 kg ভর এবং 12 cm ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলক অনুভূমিক টেবিলের ওপর গড়িয়ে চলছে। এর রৈখিক বেগ 1 ms^{-1}। এর মোট শক্তি নির্ণয় কর।

আমরা জানি, গোলকটির মোট গতিশক্তি = ঘূর্ণন গতিশক্তি + রৈখিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$

এবং স্থিতিশক্তি $= mgr$ (যেহেতু ভারকেন্দ্র r উচ্চতায় আছে)

এখানে নিরেট গোলকের ব্যাস সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক $I = \frac{2}{5}mr^2$

এখানে,

$m = 1{\cdot}5 \text{ kg}$

$r = 1{\cdot}2 \text{ cm} = 0{\cdot}12 \text{ m}$

$v = 1 \text{ ms}^{-1}$

$g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

$$\therefore \text{ মোট শক্তি } = \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mr^2\times\frac{v^2}{r^2}+\frac{1}{2}mv^2+mgr \quad (\because v=r\omega)$$

$$=\frac{1}{5}mv^2+\frac{1}{2}mv^2+mgr$$

$$=\frac{7\text{m}}{10}v^2+mgr$$

$$=\frac{7}{10}\times 1\cdot5\times(1)^2+1\times9\cdot8\times0\cdot12$$

$$=1\cdot05+1\cdot176=2\cdot226\text{ J}$$

৪.২৮ জড়তার ভ্রামক সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য
Two theorems relating moment of inertia

কোনো একটি বিশেষ অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ণয়ের দুটি সহজ উপপাদ্য আছে।

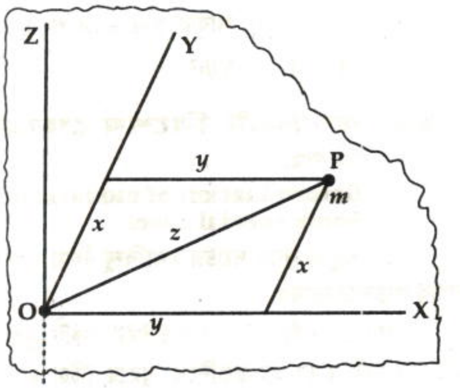
উপপাদ্য দুটির একটিকে (১) **লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য** এবং অপরটিকে (২) **সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য** বলে। নিম্নে পাত আকৃতির বস্তুর ক্ষেত্রে উপপাদ্য দুটি আলোচনা করা হলো।

৪.২৮.১ লম্ব অক্ষ উপপাদ্য
Perpendicular axes theorem

কোনো পাতলা সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের সমষ্টি ওই পাতে অবস্থিত দুই অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকের সমান হবে।

ব্যাখ্যা : মনে করি কোনো সমতল পাতের ওপর অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ OX এবং OY বরাবর এদের জড়তার ভ্রামক যথাক্রমে I_x ও I_y। ধরি ওই পাতে অবস্থিত দুই অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব OZ বরাবর পাতের জড়তার ভ্রামক I_z। প্রমাণ করতে হবে যে, $I_x+I_y=I_z$

অঙ্কন : একটি পাতলা সমতল পাত নিই। এই পাতের ওপর OX এবং OY দুটি পরস্পর লম্ব অঙ্কন করি [চিত্র ৪.৩২]।



চিত্র ৪.৩২

এখন OX এবং OY-অক্ষ দুটির ছেদ O-তে পাতের ওপর লম্ব টানি।

প্রমাণ : সমতল পাতের ওপর P একটি বিন্দু নিই যার ভুজ কোটি x, y এবং z। এখন P বিন্দুতে m ভরের একটি কণা বিবেচনা করি। OZ-অক্ষ সাপেক্ষে কণাটির জড়তার ভ্রামক $= mz^2$।

$\therefore$ OZ-অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক

$$I_z = \Sigma mz^2 = \Sigma m(x^2+y^2)$$

$$= \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.40)$$

কিন্তু, $\Sigma my^2 = I_x$ এবং $\Sigma mx^2 = I_y$

অতএব সমীকরণ (4.40) হতে পাই,

$$I_z = I_y + I_x$$

বা $$I_z = I_x + I_y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.41)$$

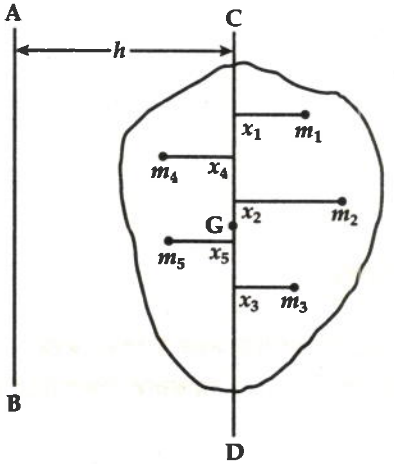
$\therefore$ উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

৪.২৮.২ সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য
Parallel axes theorem

যেকোনো অক্ষের সাপেক্ষে কোনো সমতল পাতলা পাতের জড়তার ভ্রামক পাতটির ভারকেন্দ্রগামী তার সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক এবং পাতের ভর ও ওই দুই অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টির সমান।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক কাগজের তলে অবস্থিত AB কোনো একটি অক্ষ এবং CD তার সমান্তরাল আর একটি অক্ষ। CD অক্ষটি M ভরের পাতলা সমতল পাতের ভারকেন্দ্র G দিয়ে অতিক্রান্ত [চিত্র ৪·৩৩]। যদি সমান্তরাল অক্ষদ্বয় AB ও CD-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব h এবং AB ও CD-এর সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামক যথাক্রমে I ও I_G হয় তবে উপপাদ্য অনুসারে প্রমাণ করতে হবে যে,

$$I = I_G + Mh^2$$



চিত্র ৪·৩৩

প্রমাণ : ধরি পাতটি m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ভরের বস্তুকণার সমন্বয়ে গঠিত। CD-অক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 ইত্যাদি। তা হলে AB-অক্ষের সাপেক্ষে m_1 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_1(x_1 + h)^2 = m_1x_1^2 + m_1h^2 + 2m_1x_1h$$

অনুরূপভাবে AB-অক্ষের সাপেক্ষে m_2 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_2x_2^2 + m_2h^2 + 2m_2x_2h \; ;$$

m_3 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_3x_3^2 + m_3h^2 + 2m_3x_3h \text{ ইত্যাদি।}$$

∴ AB-অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক I হলো উপরিউক্ত জড়তার ভ্রামকগুলোর সমষ্টির সমান।

$$\therefore \quad I = m_1x_1^2 + m_1h^2 + 2m_1x_1h + m_2x_2^2 + m_2h^2 + 2m_2x_2h + m_3x_3^2 + m_3h^2 + 2m_3x_3h + \ldots \ldots$$

$$= \Sigma mx^2 + h^2\Sigma m + 2h\Sigma mx$$

এখানে, Σmx = CD-অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র পাতের ভর ভ্রামক। কিন্তু সমগ্র পাতের ওজন G বিন্দু দিয়ে CD রেখা বরাবর নিম্নমুখে ক্রিয়া করায় CD-অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির ভর ভ্রামক,

$\Sigma mx = 0$ আবার $\Sigma m = M$ ও $I_G = \Sigma mx^2$

$$\therefore \quad I = I_G + Mh^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.42)$$

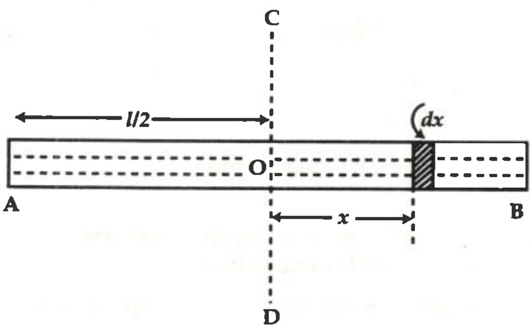
৪·২৯ কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয়

Determination of moment of inertia and radius of gyration for Some special cases

১। সরু ও সুষম দণ্ডের মধ্যবিন্দু দিয়ে ও তার দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান ওই দণ্ডের জড়তার ভ্রামক

ধরি l দৈর্ঘ্য ও M ভরবিশিষ্ট একটি সুষম সরু দণ্ড AB-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দু O দিয়ে ও দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষ CD-এর চতুর্দিকে ঘুরছে [চিত্র ৪·৩৪] । এই অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

দণ্ডটি সুষম হেতু তার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর = $\frac{M}{l}$। কাজেই CD-অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশের ভর dM হলে $dM = \frac{M}{l}dx$। dx অংশটি ক্ষুদ্র হওয়ায় তার প্রতিটি কণা CD-অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত গণ্য করা যায়। সুতরাং CD অক্ষের সাপেক্ষে dx অংশের জড়তার ভ্রামক $= dM \times x^2 = \frac{M}{l} \times dx \times x^2$ এবং একে $x = l/2$ এবং $x = -\,l/2$ সীমার মধ্যে সমাকলন করলে সমগ্র দণ্ডের জড়তা ভ্রামক পাওয়া যাবে।



চিত্র ৪·৩৪

$\therefore$ CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক,

$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{M}{l}\right) \times dx \times x^2$$

$$= \frac{M}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$= \frac{M}{3l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{M}{3l}\left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8}\right)$$

$$\therefore \boxed{I = \frac{M}{12}l^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.43)$$

ধরি চক্রগতির ব্যাসার্ধ K

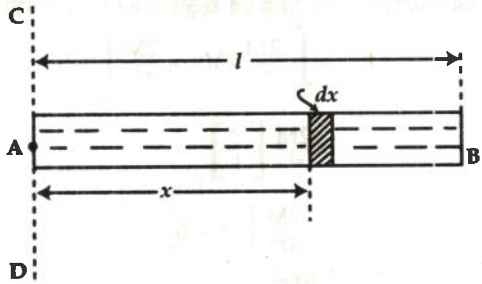
$$\therefore \quad MK^2 = \frac{M}{12}l^2$$

$$\therefore \quad K = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.44)$$

২। সরু সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত দিয়ে ও এর দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক

ধরি AB একটি সরু ও সুষম দণ্ড। এর ভর M ও দৈর্ঘ্য l। দণ্ডটির এক প্রান্ত বিন্দু A দিয়ে ও দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত CD-এর চারদিকে ঘুরছে [চিত্র ৪.৩৫]। এই CD অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তা ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

বর্ণনা অনুসারে দণ্ডটি সুষম হওয়ায় এর প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $\frac{M}{l}$। সুতরাং CD-অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত দণ্ডটির dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশের ভর $dM = \frac{M}{l}dx$। অংশটি ক্ষুদ্র হেতু এর প্রতিটি কণা CD-অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত গণ্য করা যায়।



চিত্র ৪.৩৫

$\therefore$ CD-অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির এই ক্ষুদ্র অংশের জড়তার ভ্রামক $= \frac{M}{l} \times dx \times x^2$

এখন একে $x = 0$ ও $x = l$ এই সীমার মধ্যে সমাকলন করলে, CD-অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দণ্ডের জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় জড়তার ভ্রামক, } I = \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{M}{l}\right) \times dx \times x^2$$

$$= \frac{M}{l}\int_{x=0}^{x=l} x^2 dx$$

$$= \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{M}{3l} \times l^3$$

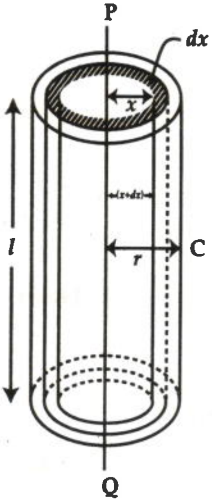
$$\therefore I = \frac{1}{3}Ml^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.45)$$

এখন চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে, $MK^2 = \frac{1}{3}Ml^2$

$$\therefore \quad K = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.46)$$

৩। নিজ অক্ষের চতুর্দিকে ঘূর্ণায়মান একটি নিরেট চোঙের জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ

ধরি একটি সুষম নিরেট চোঙ C-এর ভর M, দৈর্ঘ্য l ও ব্যাসার্ধ r [চিত্র ৪.৩৬]। এটি নিজ অক্ষ PQ-এর চতুর্দিকে ঘুরছে। PQ সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে। বর্ণনা অনুসারে চোঙটির আয়তন $= \pi r^2 \times l$



চিত্র ৪.৩৬

$$\text{চোঙের উপাদানের ঘনত্ব} = \frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{M}{\pi r^2 l}$$

PQ-এর চতুর্দিকে x ব্যাসার্ধ ও dx বিস্তারবিশিষ্ট একটি ফাঁপা সমাক্ষীয় পাতলা চোঙ বিবেচনা করি।

এই পাতলা চোঙের প্রস্থচ্ছেদ $= 2\pi x dx$, আয়তন $= 2\pi x \times dx \times l$

এখন, ভর = আয়তন × ঘনত্ব

$$= 2\pi x \times dx \times l \times \frac{M}{\pi r^2 l}$$

$$= \frac{2Mxdx}{r^2}$$

dx বিস্তারের এই চোঙটি পাতলা হেতু এর প্রতিটি কণা PQ হতে x দূরে বিবেচনা করা যায়। কাজেই PQ-এর সাপেক্ষে এই পাতলা চোঙের জড়তার ভ্রামক

$$= \frac{2Mxdx}{r^2} \times x^2 = \frac{2M}{r^2} x^3 dx$$

সমগ্র চোঙটিকে সমাক্ষীয় অনুরূপ অনেকগুলো পাতলা ফাঁপা চোঙের সমন্বয়ে গঠিত বিবেচনা করা যায়।

কাজেই $x = 0$ ও $x = r$ এই সীমার মধ্যে উপরিউক্ত ফাঁপা চোঙের জড়তার ভ্রামককে সমাকলন করলে নিজ অক্ষ PQ-এর সাপেক্ষে সমগ্র চোঙটির জড়তার ভ্রামক I পাওয়া যাবে।

$$\therefore \quad I = \int_0^r \frac{2M}{r^2} x^3 dx = \frac{2M}{r^2} \int_0^r x^3 dx$$

$$= \frac{2M}{r^2} \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$= \frac{2M}{4r^2} \left[r^4 - 0\right]$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} Mr^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4.47)$$

এক্ষেত্রে চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে,

$$MK^2 = \frac{1}{2} Mr^2$$

$$\therefore \quad K = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4.48)$$

কাজ : (i) M ভরের এবং l দৈর্ঘ্যের সরু ও সুষম দণ্ডের দৈর্ঘ্যের মধ্য বিন্দু দিয়ে, (ii) এক প্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে (iii) M ভরের এবং r ব্যাসার্ধের পাতলা চাকতির কেন্দ্র দিয়ে পৃষ্ঠের অভিলম্বভাবে গমনকারী এবং (iv) M ভর ও r ব্যাসার্ধের নিরেট সিলিন্ডারের নিজ অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ কত ?

(i) সরু ও সুষম দণ্ডের মধ্য বিন্দুর ঘূর্ণায়মানের জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{Ml^2}{12}$, চক্রগতির ব্যাসার্ধ $\frac{l}{\sqrt{12}}$

(ii) সরু ও সুষম দণ্ডের প্রান্ত বিন্দু দিয়ে ঘূর্ণায়মানের জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{Ml^2}{3}$, চক্রগতির ব্যাসার্ধ $\frac{l}{\sqrt{3}}$

(iii) M ভরের ও r ব্যাসার্ধের পাতলা চাকতির জন্য জড়তার ভ্রামক $\frac{1}{2} Mr^2$, চক্রগতির ব্যাসার্ধ $\frac{r}{\sqrt{2}}$

(iv) M ভরের ও r ব্যাসার্ধের নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামক $\frac{1}{2} Mr^2$, চক্রগতির ব্যাসার্ধ $\frac{r}{\sqrt{2}}$

৪·৩০ ঘূর্ণাক্ষের অবস্থান অনুযায়ী জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধের সমীকরণ

Equations of moment of inertia and radius of gyration with respect to location of rotational axes

বস্তু	ঘূর্ণাক্ষের অবস্থান অনুযায়ী জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ			
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		প্রান্তবিন্দুগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে	
সরল দণ্ড (দৈর্ঘ্য $= l$)	জড়তার ভ্রামক $I = \frac{l}{12} ml^2$	চক্রগতির ব্যাসার্ধ $K = \frac{l}{2\sqrt{3}}$	জড়তার ভ্রামক $I = \frac{1}{3} ml^2$	চক্রগতির ব্যাসার্ধ $K = \frac{l}{\sqrt{3}}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বৃত্তাকার চাকতি (ব্যাসার্ধ $= r$)	$I = \frac{1}{2} mr^2$	$K = \frac{r}{\sqrt{2}}$	$I = \frac{1}{4} mr^2$	$K = \frac{r}{2}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বেলনাকার চাকতি (অভ্যন্তরীণ ব্যাসার্ধ $= r$ বহির্ব্যাসার্ধ $= R$)	$I = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$	$K = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$	$I = \frac{1}{4} (R^2 + r^2)$	$K = \frac{(R^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$
আয়তাকার পাত (দৈর্ঘ্য $= l$, প্রস্থ $= b$)	$I = \frac{1}{12} (l^2 + b^2)$	$K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{3}}$	$I = \frac{1}{12} \mathrm{m} l^2$	$K = \frac{l}{2\sqrt{3}}$
	চোঙের অক্ষ সাপেক্ষে		দৈর্ঘ্যের সাথে লম্ব ভরকেন্দ্রগামী অক্ষ সাপেক্ষে	
নিরেট চোঙ (দৈর্ঘ্য $= l$, ব্যাসার্ধ $= r$)	$I = \frac{1}{2} mr^2$	$K = \frac{r}{\sqrt{2}}$	$I = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)$	$K = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}}$
	ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে		কোনো ব্যাস সাপেক্ষে	
বৃত্তাকার রিং (ব্যাসার্ধ $= r$)	$I = mr^2$	$K = r$	$I = \frac{1}{2} mr^2$	$K = \frac{r}{\sqrt{2}}$
	কোনো ব্যাস সাপেক্ষে		কোনো স্পর্শক সাপেক্ষে	
পাতলা গোলীয় খোলক (ব্যাসার্ধ $= r$)	$I = \frac{2}{3} mr^2$	$K = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$	$I = \frac{5}{3} mr^2$	$K = \sqrt{\frac{5}{3}}\, r$

৪·৩১ ব্যবহারিক

Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	একটি ফ্লাই হুইলের জড়তার ভ্রামক নির্ণয় **Determination of moment of inertia of a fly wheel**

তত্ত্ব : মনে করি একটি চাকার কৌণিক বেগ ω এবং ব্যাসার্ধ r হলে বস্তুটির রৈখিক বেগ $v = \omega r$। যদি চাকার জড়তার ভ্রামক I হয়, এবং চাকাটি অক্ষ দণ্ডের সাপেক্ষে ঘুরতে থাকলে তার

ঘূর্ণন গতিশক্তি, $E = \frac{1}{2} I\omega^2$ ... ... (i)

চাকাটির প্রতি ঘূর্ণনের জন্য ঘর্ষণের বিরুদ্ধে W পরিমাণ কাজ হয়। m ভরের বস্তু ভূমিতে পড়ার পূর্বে চক্রের ঘূর্ণন সংখ্যা n_1 হলে মোট কাজের পরিমাণ $= Wn_1$। m ভরের বস্তুটি h উচ্চতা হতে পড়লে তার

স্থিতিশক্তি $= mgh$ ... ... (ii)

আমরা জানি, অক্ষ দণ্ডের স্থিতি = অক্ষ দণ্ডের গতিশক্তি + চাকার ঘূর্ণন গতিশক্তি + চাকার মোট কাজের পরিমাণ

বা, $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Wn_1$

বা, $mgh = \frac{1}{2}m\,\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Wn_1$ ... ... (iii)

অক্ষ দণ্ডের সাথে যুক্ত সুতার প্রান্তে m ভরের বস্তুটি অক্ষদণ্ড হতে বিচ্ছিন্ন হওয়ার পর ঘূর্ণায়মান চাকাটি n_2 বার ঘুরার পর থেমে গেলে, ঘর্ষণের বিরুদ্ধে ব্যয়িত কাজ $= Wn_2$

$\therefore \quad Wn_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$

বা, $W = \frac{I\omega^2}{2n_2}$ ... ... (iv)

সমীকরণ (iii)-এ W এর মান বসিয়ে পাই,

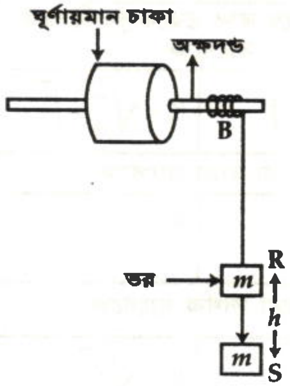
$$mgh = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}\left(I\frac{\omega^2}{n_2}\right)\times n_1$$

বা, $mgh = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)$

বা, $2mgh = m\omega^2r^2 + I\omega^2\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)$

বা, $I\omega^2\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right) = 2mgh - m\omega^2r^2$

$$\therefore \quad I = \frac{2mgh - m\omega^2r^2}{\omega^2\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (v)$$



চিত্র ৪.৩৭

যন্ত্রপাতি : একটি লোহার অক্ষ দণ্ড, ভারী চাকা, কিছু রশি, একটি ভর, স্টপওয়াচ, মিটার স্কেল, স্লাইড ক্যালিপার্স।

যন্ত্রের বর্ণনা : ঘূর্ণায়মান একটি ভারী চাকা একটি অক্ষদণ্ড B-এর ওপর সুতার পাক দিয়ে অক্ষদণ্ডের সাথে এক প্রান্তে বেঁধে অন্য প্রান্তে m ভরের বস্তুকে বেঁধে চাকাকে ঘুরানো যায়।

পরীক্ষা পদ্ধতি : (১) প্রথমে স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে চাকার অক্ষদণ্ডের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা হয়।

(২) এরপর ঘূর্ণন সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য অক্ষদণ্ডের ওপর চক দিয়ে দাগ দিয়ে চাকা ঘুরিয়ে অক্ষদণ্ডের ওপর সুতাকে প্যাচানো হয় এবং সুতার অপর প্রান্তে ভর বেঁধে R অবস্থান থেকে ছেড়ে দিলে চাকাটি কয়েক বার ঘুরার পর সুতাসহ ভরটি S অবস্থানে পতিত হবে। এই অবস্থায় ভর S বিন্দু স্পর্শ করতে চাকাটি কত বার ঘুরল তার সংখ্যা n_1 এবং সময় নির্ণয় করতে হয়।

এখন সুতাকে পুনরায় অক্ষ দণ্ডের ওপর প্যাচ দিয়ে সুতার অপর প্রান্তে ভর বেঁধে R অবস্থানে এনে ভরকে নিচে নামতে দিতে হবে যে সময়ে ভরটি মাটি স্পর্শ করে সেই মুহূর্তে স্টপ ওয়াচ চালু করতে হবে। অক্ষ দণ্ডটি স্থির অবস্থায় আসার সঙ্গে সঙ্গে স্টপ ওয়াচ বন্ধ করা হয়। মোট সময় এবং চাকাটি কত বার ঘুরে স্থির হলো অর্থাৎ ঘূর্ণন সংখ্যা (n_2) গণনা করা হয়।

ছক–১ : অক্ষদণ্ড (B) এর ব্যাসার্ধ (r) নির্ণয়

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	প্রধান স্কেল পাঠ সেমি m	ভার্নিয়ার পাঠ সংখ্যা n	ভার্নিয়ার ধ্রুবক সেমি c	ভার্নিয়ার স্কেল পাঠ সেমি $F = c \times n$	মোট পাঠ সেমি $D = (m + F)$	গড় ব্যাস D সেমি	ব্যাসার্ধ $r = \frac{D}{2}$ সেমি
1							
2							
3							

ছক–২ : সময় ও ঘূর্ণন সংখ্যা নির্ণয়

পর্যবেক্ষণ	ঘূর্ণায়মান চক্র A-এর ঘূর্ণন সংখ্যা n_2	ঘূর্ণনকাল t sec	গড় ঘূর্ণন সংখ্যা n_2	গড় ঘূর্ণন সংখ্যার গড় সময় t sec
1				
2				
3				

হিসাব ও গণনা : ঘূর্ণন অক্ষটি n_2 বার ঘুরতে যদি t সময় নেয় তা হলে গড় কৌণিক বেগ, $\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{t}$

দণ্ডটি ω কৌণিক বেগ হতে সমমন্দনে শূন্য বেগ লাভ করে ফলে তার গড় কৌণিক বেগ,

$$\omega_2 = \frac{\omega + 0}{2} = \frac{\omega}{2} \qquad \text{বা,} \quad \frac{2\pi n_2}{t} r = \frac{\omega}{2}$$

কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{4\pi n_2}{t}$ rad s^{-1}

জড়তার ভ্রামক, $I = \dfrac{2mgh - m\omega^2 r^2}{\omega^2 \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)} = \ldots\ldots g\text{-cm}^2 = \ldots\ldots\ldots \text{kg-m}^2$

n_2-এর মান বসালে ω পাওয়া যায়। m, ω, r, h, n_1 ও n_2 এবং g-এর মান (v) নং সমীকরণে বসিয়ে ভারী চাকার জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করা যায়।

সতর্কতা : (১) অক্ষ দণ্ডে এমনভাবে সুতা বাঁধতে হবে যাতে চাকা ঘুরার পর পাক খুলতে খুলতে অক্ষ দণ্ড থেকে বিচ্যুত হয়ে মাটিতে পড়ে।

(২) ঘূর্ণন সংখ্যা (n) এবং সময় (t) সঠিকভাবে নির্ণয় করতে হবে।

(৩) ভার প্রান্ত বরাবর দেওয়া দাগ দিয়ে ওই স্থান হতে উচ্চতা h নির্ণয় করতে হবে।

(৪) উচ্চতা h সঠিকভাবে মাপা উচিত।

(৫) রশি বা সুতা হালকা হতে হবে এবং দণ্ডের ওপর প্যাঁচ সমভাবে হতে হবে।

৪·৩২ কৌণিক গতির জন্য নিউটনের সূত্র

Newton's laws for angular motion

রৈখিক গতির ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলো পূর্বের অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে। বস্তুর কৌণিক গতির ক্ষেত্রেও নিউটনের গতিসূত্রগুলো ভিন্নরূপে প্রযোজ্য। নিম্নে সূত্রগুলো বিবৃত ও ব্যাখ্যা করা হলো।

(১) প্রথম সূত্র : কোনো বস্তুর ওপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে স্থির বস্তু স্থির অবস্থানে এবং ঘূর্ণনরত বস্তু সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকবে।

ব্যাখ্যা : সূত্রানুযায়ী বাহ্যিক টর্কের ক্রিয়াতেই কেবলমাত্র বস্তুর কৌণিক বেগের তথা কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন সম্ভব। টর্কের ক্রিয়া ছাড়া বস্তুর কৌণিক বেগ হবে সমকৌণিক বেগ। আর বস্তু আপনা হতে তার কৌণিক ভরবেগের ওপর প্রভাব ফেলতে পারে না। কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনকারীই হচ্ছে টর্ক। সুতরাং, বস্তুর ওপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে ওই বস্তুর কৌণিক ত্বরণও শূন্য হবে।

(২) দ্বিতীয় সূত্র : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার ওই বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমানুপাতিক এবং টর্ক যে দিকে ক্রিয়া করে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনও ওই দিকে ঘটে।

ব্যাখ্যা : সূত্রানুযায়ী কৌণিক ভরবেগ $L = I\omega$ -এর পরিবর্তনের হার $\frac{dL}{dt}$ প্রযুক্ত টর্ক τ-এর সমানুপাতিক।

$$\text{অর্থাৎ,} \quad \tau \propto \frac{dL}{dt} \propto I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\propto I\alpha$$

$$\text{বা,} \quad \tau = KI\alpha$$

এখানে K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। এস. আই. এককে $K = 1$

$$\therefore \quad \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4.49)$$

টর্ক τ-এর অভিমুখেই কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন dL সংঘটিত হবে।

বর্ণনা অনুযায়ী কৌণিক ত্বরণের উৎসই টর্ক।

তৃতীয় সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক টর্কের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক আছে।

ব্যাখ্যা : বস্তু A অপর একটি বস্তু B-এর উপর $\vec{\tau}_{12}$ টর্ক প্রয়োগ করলে B বস্তুও A-এর ওপর সমান ও বিপরীত-মুখী টর্ক $\vec{\tau}_{21}$ প্রয়োগ করবে। এখানে A কর্তৃক B-এর উপর প্রযুক্ত টর্ক $\vec{\tau}_{12}$ ক্রিয়ামূলক টর্ক ও B কর্তৃক A-এর ওপর প্রযুক্ত টর্ক $\vec{\tau}_{21}$ হচ্ছে প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক।

$$\therefore \quad \vec{\tau}_{12} = -\vec{\tau}_{21} \text{ ও } \tau_{12} = \tau_{21}$$

প্রতিক্রিয়ামূলক টর্কের দিক ক্রিয়ামূলক টর্কের বিপরীতমুখী, তাই ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

৪.৩৩ কেন্দ্রমুখী বল ও কেন্দ্রবিমুখী বল
Centripetal force and centrifugal force

৪.৩৩.১ কেন্দ্রমুখী বল বা অভিকেন্দ্র বল
Centripetal force

নিউটনের প্রথম সূত্র অনুযায়ী গতি জড়তার জন্য সচল বস্তু সব সময় সমবেগে সরলরেখা বরাবর চলতে চায়। কাজেই বাইরে থেকে কোনো বল ক্রিয়া না করলে বস্তুর গতির অভিমুখ আপনা আপনি পাল্টায় না। বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর গতির অভিমুখ প্রতি মুহূর্তে পাল্টে যায়; সুতরাং ওই বস্তুর উপর নিশ্চয়ই বাইরে থেকে একটি বল সবসময় ক্রিয়া করে।

আগেই আমরা দেখেছি যে, m ভরের কোনো বস্তু যখন r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে v দ্রুতি নিয়ে ঘুরতে থাকে তখন ওই বস্তুর ওপর সবসময় কেন্দ্রাভিমুখী ত্বরণ $\frac{v^2}{r}$ ক্রিয়া করে। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী একটি বল ক্রিয়া করায় এই ত্বরণ সৃষ্টি হচ্ছে। স্পষ্টত এই বলও কেন্দ্রাভিমুখী হবে অর্থাৎ ব্যাসার্ধ বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করবে এবং এর মান বস্তুর ভর ও অভিকেন্দ্র ত্বরণের গুণফলের সমান অর্থাৎ $\frac{mv^2}{r}$-এর সমান হবে। কোনো কারণে এই বলের ক্রিয়া বন্ধ হলে বস্তুটিকে বৃত্তপথে ঘোরাবার জন্য কোনো বল থাকবে না। তখন বস্তুটি বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ছুটে যাবে এবং সমবেগে সরলরেখায় চলতে থাকবে। কেন্দ্রমুখী বল উৎপন্ন হওয়ার জন্য ঘূর্ণায়মান বস্তু এবং ঘূর্ণায়মান বস্তুর সাথে সরাসরি সংযোগ থাকতে হবে এমন কোনো কথা নেই। যখনই কোনো বস্তু কোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে গতিশীল হয় তখনই কেন্দ্রমুখী বল উৎপন্ন হয়। যেমন— পৃথিবী যখন সূর্যকে কেন্দ্র করে ঘুরে তখন কেন্দ্রমুখী বল লাভ করে।

সংজ্ঞা : যে বলের ক্রিয়ায় কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে চলতে থাকে এবং যে বল সবসময় বস্তুর গতিপথের সঙ্গে লম্বভাবে ভেতরের দিকে অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখী বা অভিকেন্দ্র বল (Centripetal force) বলা হয়।

m ভরের বস্তু r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে সমদ্রুতি v নিয়ে চলতে থাকলে অভিকেন্দ্র বলের মান $\frac{mv^2}{r}$ হয়। কৌণিক বেগে প্রকাশ করলে অভিকেন্দ্র বলের মান হয় $m\omega^2 r$

কেন্দ্রমুখী বা অভিকেন্দ্র বল একটি কার্যহীন বল

অভিকেন্দ্র বল সব সময় গতিপথের লম্বদিকে ক্রিয়া করায় ওই বলের অভিমুখে বস্তুর কোনো সরণ হয় না। সুতরাং অভিকেন্দ্র বল কোনো কাজ করে না। এই কারণে অভিকেন্দ্র বলকে কার্যহীন বল (no-work force) বলে।

কেন্দ্রবিমুখী প্রতিক্রিয়া : বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল বাইরে থেকে প্রযুক্ত হয়। বাইরে থেকে যে বস্তু ওই বল প্রয়োগ করে তার ওপর প্রথম বস্তুটি নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুযায়ী সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। স্পষ্টত এই প্রতিক্রিয়া বল বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাসার্ধ বরাবর বাইরের দিকে ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখী প্রতিক্রিয়া (centrifugal reaction) বলে।

চিত্র ৪.৩৮

মনে কর, একটি পাথরের টুকরাকে সুতোয় বেঁধে বৃত্তাকার পথে ঘোরানো হচ্ছে [চিত্র ৪.৩৮]। পাথরটির ওপর সবসময় সুতোর মাধ্যমে অভিকেন্দ্র বল F_C ক্রিয়া করছে। এখানে সুতোর টানই হলো প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল। সুতোটি হঠাৎ ছিঁড়ে গেলে অভিকেন্দ্র বল F_C-এর ক্রিয়া বন্ধ হয়ে যায়; সঙ্গে সঙ্গে পাথরটি বৃত্তের স্পর্শক বরাবর সরলরেখায় সমবেগে ছুটে যায়। বৃত্তাকার পথে ঘুরবার সময় পাথরটি হাতের ওপর সমান ও বিপরীতমুখী অপকেন্দ্র প্রতিক্রিয়া F_R প্রয়োগ করে; ফলে হাতের ওপর কেন্দ্র থেকে বাইরের দিকে একটি টান অনুভূত হয়। অন্যান্য ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার মতো এখানেও F_C এবং F_R একই বস্তুর ওপর ক্রিয়া করে না; দুটি পৃথক বস্তু যেমন, যথাক্রমে পাথর খণ্ড ও হাতের ওপর ক্রিয়া করে। সুতো ছিঁড়ে গেলে দুটি বলই একসঙ্গে লোপ পায়।

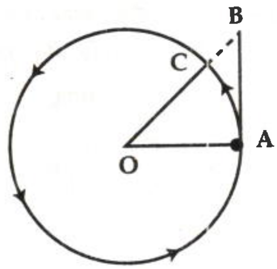
অভিকেন্দ্র বলের আরও অনেক উদাহরণ দেয়া যায়। সৌর জগতের প্রতিটি গ্রহ সূর্যের চারদিকে আবর্তন করে। সূর্য ওই সব গ্রহের ওপর যে মহাকর্ষীয় আকর্ষণ প্রয়োগ করে, তা গ্রহগুলোর ওপর অভিকেন্দ্র বল রূপে ক্রিয়া করে।

নিজে কর : বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল বস্তুর কেন্দ্রমুখী বল ব্যাসার্ধের পরিবর্তনের সাথে পরিবর্তিত হয়—ব্যাখ্যা কর।

৪.৩৩.২ কেন্দ্রবিমুখী বল বা অপকেন্দ্র বল
Centrifugal force

আগেই আমরা দেখেছি যে বৃত্তপথে আবর্তনরত প্রতিটি বস্তুর ওপর সবসময় বৃত্তের কেন্দ্রমুখী একটি বল অর্থাৎ অভিকেন্দ্র বল ক্রিয়া করে। পৃথিবী সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে। এখানে পৃথিবীর ওপর সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল হলো অভিকেন্দ্র বল। স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন উঠতে পারে— অভিকেন্দ্র বল কোন বলের দ্বারা প্রশমিত হয় ? কোন বাধার জন্য পৃথিবী সোজা সূর্যের দিকে ছুটে যায় না ? আপাতদৃষ্টিতে মনে হয় যে সূর্যের আকর্ষণের সমান ও বিপরীতমুখী আরেকটি বল পৃথিবীর ওপর ক্রিয়া করছে। **এই আপাত প্রতীয়মান বলকে কেন্দ্রবিমুখী বল বা অপকেন্দ্র বল (centrifugal force) বলা হয়।** স্পষ্টত অপকেন্দ্র বল অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখী। কিন্তু মনে রাখতে হবে যে, অপকেন্দ্র বলের কোনো বাস্তব অস্তিত্ব নেই। তাই প্রকৃতপক্ষে অভিকেন্দ্র বল কোনো বাস্তব বলের (real force) দ্বারা প্রতিমিত হচ্ছে না। অভিকেন্দ্র বা অপকেন্দ্র বল একটি অলীক বল।

বৃত্তপথে আবর্তনরত সব বস্তুরই বৃত্তের স্পর্শক বরাবর ছুটে যাওয়ার প্রবণতা থাকে; যেমন ঘুরন্ত পাথরের উদাহরণে সুতো ছিঁড়ে গেলে পাথরটি স্পর্শক বরাবর ছুটে যায়। মনে করি, বৃত্তপথে আবর্তনরত একটি বস্তু কোনো মুহূর্তে A বিন্দুতে অবস্থান করছে [চিত্র ৪.৩৯]। যদি বস্তুর ওপর বৃত্তের কেন্দ্র O এর দিকে কোনো অভিকেন্দ্র বল ক্রিয়া না করত, তা হলে বস্তুটি অল্প সময় পর স্পর্শক বরাবর অন্য কোনো বিন্দু B-তে পৌঁছত। কিন্তু অভিকেন্দ্র বল সবসময় ক্রিয়া করে বলে বস্তুটি O কেন্দ্রের দিকে কিছুটা এগিয়ে আসে এবং অবশেষে B-এর বদলে বৃত্তপথের আরেকটি বিন্দু C-তে পৌঁছায়। অর্থাৎ অভিকেন্দ্র বলের প্রভাবেই প্রতিমুহূর্তে বস্তুটি বৃত্তপথে ঘুরতে বাধ্য হয়। সুতরাং বস্তুর ঘূর্ণন গতিতে অভিকেন্দ্র বলের ক্রিয়া সবসময় বজায় থাকে। কাজেই অভিকেন্দ্র বল কোনো বাস্তব বল দ্বারা প্রতিমিত হয় না। এজন্য অভিকেন্দ্র বলের বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত অপকেন্দ্র বলের উপস্থিতিকে আপাত সত্য বলে ধরা হয়। তাই একে অলীক বল (pseudo force) বলা হয়।



চিত্র ৪.৩৯

সংজ্ঞা : সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখী অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে বাইরের দিকে একটি অলীক বল ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখী বা অপকেন্দ্র বল বলে।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১৩

১। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m। এর আহ্নিক ঘূর্ণনের জন্য বিষুবরেখা অঞ্চলে অপকেন্দ্র ত্বরণের পরিমাণ কত?

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R এবং কৌণিক বেগ ω হলে বিষুব অঞ্চলে অপকেন্দ্র ত্বরণ,

$$a = \omega^2 R$$

$$\therefore a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times R = \left(\frac{2 \times 3.14}{24 \times 60 \times 60}\right)^2 \times 6.4 \times 10^6$$

$$= 0.0338 \text{ ms}^{-2}$$

২। 2 kg ভরের একটি বস্তুকে 80 cm দীর্ঘ একটি দড়ির একপ্রান্তে বেঁধে অপর প্রান্ত হাত দিয়ে ধরে বস্তুটিকে প্রতি সেকেন্ডে 2 বার সুষম কৌণিক বেগে ঘুরানো হচ্ছে। বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল নির্ণয় কর।

এখানে,
$m = 2$ kg
$r = 80 \text{ cm} = 0.8 \text{ m}$
$T = \frac{1}{2} \text{ s} = 0.5 \text{ s}$

আমরা জানি অভিকেন্দ্র বল, $F_C = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$

$$\therefore F_C = 2 \times \left(\frac{2\pi}{0.5}\right)^2 \times 0.8$$

$$= 2 \times \frac{(4\pi)^2}{0.25} \times 0.8$$

$$= 2 \times \frac{(4 \times 3.14)^2}{0.25} \times 0.8 = 0.096\text{N}$$

৪.৩৪ কেন্দ্রমুখী এবং কেন্দ্রবিমুখী বলের ব্যবহার
Applications of centripetal and centrifugal forces

ব্যবহারিক দৃষ্টান্ত
Practical examples

১। রাস্তার ব্যাঙ্কিং (Banking of roads) :

(ক) অনুভূমিক রাস্তায় গাড়ির বাঁক নেয়া : মনে করি, অনুভূমিক রাস্তার মোড়ে একটি গাড়ি বাঁক নিচ্ছে। এখানে গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে ঘর্ষণ বল বাঁক নেয়ার জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করে। এই ঘর্ষণ স্থিতি ঘর্ষণ এবং স্বনিয়ন্ত্রক। বাঁক নেয়ার সময় গাড়ির চাকাগুলো বাইরের দিকে ছিটকে যেতে চায়। ঘর্ষণ বল রাস্তার বাঁকের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে ফলে গাড়ি ছিটকে যাওয়ার প্রবণতাকে বাধা দেয়। গাড়িটি খুব দ্রুত বেগে চলতে চলতে বাঁক নিলে প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের মানও খুব বেশি হয়। কিন্তু ঘর্ষণ বলের মান একটি নির্দিষ্ট সীমার বেশি হতে পারে না। তাই গাড়ি খুব দ্রুতগতিতে বাঁক নিলে ঘর্ষণ বল প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করতে পারে না। ফলে গাড়িটি রাস্তা থেকে ছিটকে যায়।

মনে করি, m ভরের একটি গাড়ি v দ্রুতি নিয়ে r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তপথে বাঁক নিচ্ছে। গাড়ির চাকা এবং রাস্তার ক্রিয়াশীল মোট ঘর্ষণ বল F হলে গাড়িটি নিরাপদে বাঁক নেয়ার শর্ত হবে,

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

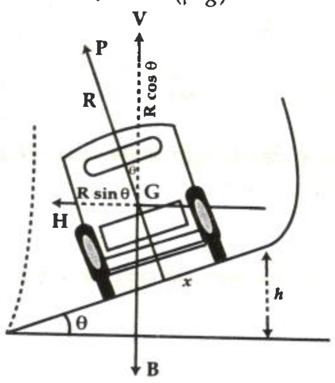
F-এর মান যত বেশি হবে গাড়িটি তত বেশি বেগে বাঁক নিতে পারবে। কিন্তু F-এর সর্বোচ্চ মান হলো μmg ; মানে μ হলো গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক। অর্থাৎ, $F \leq \mu mg$

সুতরাং, গাড়িটি নিরাপদে বাঁক নেয়ার শর্ত হলো,

$$\frac{mv^2}{r} \leq \mu mg$$

বা, $v^2 \leq \mu rg$

বা, $v \leq (\mu rg)^{1/2}$



চিত্র ৪.৪০

গাড়ির দ্রুতি এই মান থেকে অর্থাৎ $(\mu rg)^{1/2}$ থেকে বেশি হলে গাড়ি রাস্তা থেকে ছিটকে যাবে।

(খ) ব্যাঙ্কিং যুক্ত রাস্তায় গাড়ির বাঁক নেওয়া : অনুভূমিক রাস্তায় গাড়ি জোরে বাঁক নিলে গাড়ির চাকা এবং রাস্তার মধ্যে ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বল চাকার ক্ষতি করে। এই শক্তি কমাবার জন্য এবং গাড়ি ছিটকে গিয়ে দুর্ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা রোধ করার জন্য প্রতিটি বাঁকে রাস্তার বাইরের দিক ভেতরের দিকের চেয়ে কিছুটা উঁচু করা হয় অর্থাৎ রাস্তাটি বাঁকের কেন্দ্রের দিকে একটু ঢালু করা থাকে। একে রাস্তার 'ব্যাঙ্কিং' বলে। এর ফলে গাড়ি বাঁক নেয়ার জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের একাংশ গাড়ির ওপর রাস্তা দ্বারা প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক উপাংশ যোগান দেয়; বাকি অংশ ঘর্ষণ থেকে আসে। ব্যাঙ্কিং কোণের মান সঠিক হলে প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশ থেকেই প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল পাওয়া যায়; তখন ঘর্ষণ বলের কোনো ভূমিকা থাকে না।

সংজ্ঞা : অনুভূমিক রাস্তায় হঠাৎ বাঁক নেওয়ার সময় গাড়ি যাতে ছিটকে গিয়ে দুর্ঘটনায় না পড়ে সেজন্য প্রতিটি বাঁকে রাস্তার বাইরের দিক ভিতরের দিকের চেয়ে কিছুটা উঁচু করে তৈরি করা হয়। একে রাস্তার ব্যাঙ্কিং বা ঢাল বলে। অনুভূমিক রেখার সাথে ওই স্থানে দুই পাশ যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ব্যাঙ্কিং কোণ বলে।

ব্যাঙ্কিং কোণের রাশিমালা
Quantities of angle of banking

মনে করি, আরোহীসহ গাড়ির ওজন W। এখানে গাড়ির ওপর দুটি বল ক্রিয়া করছে— (i) গাড়ির ওজন W খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে এবং (ii) রাস্তা দ্বারা প্রযুক্ত প্রতিক্রিয়া R রাস্তার তলের সঙ্গে লম্বভাবে ওপরের দিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.৩৯]। মনে করি, রাস্তার তল অনুভূমিক তলের সঙ্গে θ কোণে আনত; এই θ-কে ব্যাঙ্কিং কোণ (angle of banking) বলে। প্রতিক্রিয়া R-এর উল্লম্ব উপাংশ $R \cos\theta$ গাড়ির ওজন W-কে প্রতিমিত করে এবং অনুভূমিক উপাংশ $R \sin\theta$ প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের যোগান দেয়। গাড়ির ভর m, দ্রুতি v এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধ r হলে,

$R \sin\theta =$ কেন্দ্রমুখী বল $= F = ma$, এখানে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, $a = \frac{v^2}{r}$

$$\therefore \quad R \sin\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [4.49(a)]$$

এবং $R \cos\theta = W = mg$ ... ... [4.49(b)]

আবার সমীকরণ দুটিকে ভাগ করে পাই, $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$ ... ... (4.50)

এই সমীকরণ থেকে সঠিক ব্যাঙ্কিং কোণের মান নির্ণয় করা যায়। এই মান গাড়ির দ্রুতি v এবং বাঁকের ব্যাসার্ধের ওপর নির্ভর করে; এজন্য গাড়ির বেগের কেবলমাত্র একটি নির্দিষ্ট মানের জন্যই রাস্তার বাঁকে সঠিকভাবে ব্যাঙ্কিং করা যায়।

সমীকরণ (4.50) থেকে দেখা যায় যে, v বেশি হলে কিংবা বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কম হলে আরোহীকে উল্লম্বের সাথে বেশি কোণে আনত থাকতে হবে। সমীকরণে প্রদত্ত বেগই হচ্ছে একটি গাড়ির নিরাপদ বাঁক নেওয়ার সর্বোচ্চ বেগ। এর চেয়ে বেশি বেগে বাঁক নিতে গেলে গাড়ি উল্টে যাবে।

বাঁকের উচ্চতা : সমীকরণ (4.50) থেকে দেখা যায় যে, ব্যাঙ্কিং কোণ গাড়ির দ্রুতি এবং বাঁকের ব্যাসার্ধের ওপর নির্ভর করে গাড়ির ভরের ওপর নির্ভর করে না।

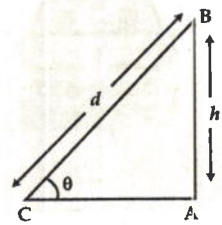
মনে করি, ব্যাঙ্কিং কোণ θ, রাস্তার প্রস্থ, $OB = d$ এবং রাস্তার ভেতরের প্রান্ত থেকে বাইরের প্রান্তের উচ্চতা, $AB = h$ [চিত্র ৪.৪১]।

চিত্রানুযায়ী,

$$\sin\theta = \frac{h}{d}$$

$$\therefore \quad h = d\sin\theta \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [4.50(a)]$$

অর্থাৎ রাস্তার ভেতরের পাশ অপেক্ষা বাইরের পাশ $d \sin\theta$ উচ্চতায় রাখতে হবে।

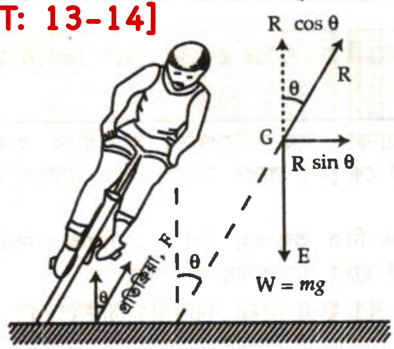


চিত্র ৪.৪১

বর্তমানে আধুনিক হাইওয়ের (highway) প্রতিটি বাঁকে দুর্ঘটনা এড়াবার জন্য ব্যাঙ্কিং করা হয়। রেললাইনের বাঁকেও ব্যাঙ্কিং করা হয়; বাইরের লাইনটিকে ভেতরের লাইন থেকে উঁচু করে বসানো হয়। প্রতিটি বাঁকের মুখে সর্বোচ্চ দ্রুতিসীমা লেখা বোর্ড টাঙানো থাকে; ফলে চালকরা এই সীমার বেশি বেগে গাড়ি চালাবার বিপদ সম্পর্কে সজাগ থাকেন। তাই দুর্ঘটনার সম্ভাবনা কমে যায়।

২। সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়া (Turneing of a cycliest) : কোনো সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়ার ঘটনাও আমরা অনুরূপভাবে আলোচনা করতে পারি। বাঁক নেওয়ার সময় সাইকেলসহ আরোহী আপনা আপনিই ভেতরের দিকে অর্থাৎ রাস্তার বাঁকের কেন্দ্র যেদিকে সেদিকে ঝুঁকে পড়ে [চিত্র ৪.৪২]। বৃত্তাকার পথে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে অনুভূমিক করতে একটি কেন্দ্রমুখী বলের প্রয়োজন হয়। এই বলের যেকোনো দিকে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয়। ফলে সাইকেলসহ আরোহী আনতভাবে রাস্তার উপর চাপ দেয়; অতএব রাস্তার প্রতিক্রিয়া R অনুভূমিক তলের সঙ্গে θ কোণ করে সাইকেলের ওপর প্রযুক্ত হয়। এই প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশই প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বলের যোগান দেয়। যদি বাঁকের মুখে ভারসাম্য রক্ষা করার জন্য সাইকেলসহ আরোহী উল্লম্ব রেখার সঙ্গে θ কোণ করে ভেতরের দিকে ঝোঁকে তা হলে প্রতিক্রিয়া বল R-এর উল্লম্ব এবং অনুভূমিক উপাংশ হবে $R\cos\theta$ এবং $R\sin\theta$। প্রতিক্রিয়ার এই উল্লম্ব উপাংশ আরোহীসমেত সাইকেলের ওজন mg-কে প্রশমিত করে আর অনুভূমিক উপাংশই প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল $\frac{mv^2}{r}$ সরবরাহ করে।

[MAT: 13–14]



চিত্র ৪.৪২ : সাইকেল আরোহীর বাঁক নেওয়া।

$$\therefore \quad R\cos\theta = mg \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.51)$$

$$\text{এবং } R\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

সমীকরণ (4.50)-কে সমীকরণ (4.51) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.52)$$

RMDAC

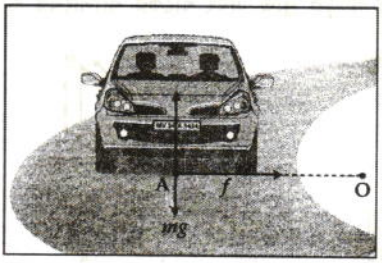
সাইকেলসহ আরোহীকে এই θ কোণে বাঁক নিতে হবে। আরোহীর বেগ যত বেশি হবে বাঁকের ব্যাসার্ধ তত কম হবে এবং তাকে তত বেশি হেলতে হবে। উপরিউক্ত সমীকরণ থেকে সাইলেকসহ আরোহীর বেগ $v = \sqrt{rg\tan\theta}$ নির্ণয় করা যায়।

৩। সেন্ট্রিফিউজ (Centrifuge) : এটি একটি অক্ষদণ্ডের চারদিকে অতি দ্রুত কৌণিক বেগে ঘূর্ণায়মান পাত্র। এই যন্ত্রের সাহায্যে তরলে ভাসমান কণাসমূহকে আলাদা করা যায়। সাধারণত তরলের ঘনত্ব এবং তরলের অভ্যন্তরে

কণাগুলোর ঘনত্ব এক থাকে না। অপকেন্দ্র বল $mr\omega^2$ থেকে জানা যায় যে যদি ω এবং r ধ্রুব থাকে তবে যে বস্তুর ভর m বেশি তার ওপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল বেশি হয়, ফলে ভারি কণাগুলো অক্ষদণ্ড থেকে বেশি দূরে সরে যায়। দুধ থেকে মাখন তোলার কাজে এবং রক্ত থেকে রক্ত কণিকাগুলো পৃথক করার কাজে এই যন্ত্র ব্যবহৃত হয়। দুধ থেকে মাখন তোলার সময় মাখনের কণাগুলো দুধের তুলনায় হাল্কা হওয়ায় অক্ষদণ্ডের গায়ে জমা হতে থাকে এবং মাখন তোলা (skimmed) দুধ দূরে সরে যায়। পরে দণ্ড থেকে মাখন বের করে নেওয়া হয়।

বৃত্তাকার পথে গাড়ির গতি
Motion of a car on a circular track

(i) অনুভূমিক পথে গতি : ধরা যাক, একটি গাড়ি অনুভূমিক পথ ধরে চলার সময় O বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে বাঁক নিচ্ছে [চিত্র ৪.৪৩]। এক্ষেত্রে গাড়ির ওপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল হলো, $\frac{mv^2}{r}$।



চিত্র ৪.৪৩

এখানে m = গাড়ির ভর, v = গাড়ির দ্রুতি, r = OA = বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ।

এখন যেহেতু চাকার সাথে পথের ঘর্ষণ (f) এই অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করে। অতএব,

$$f = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.53)$$

আবার চাকার ওপর রাস্তার লম্ব বল (n) হলো গাড়ির ওজনের সমান, অর্থাৎ

$$n = mg \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.54)$$

এখন, চাকা ও পথের ঘর্ষণ যদি সীমাস্থ ঘর্ষণের সমান হয় তবে,

$f = \mu n$; এখানে μ = ঘর্ষণ গুণাঙ্ক

$= \mu mg$

সমীকরণ (4.53) ও (4.54) ব্যবহার করে পাই,

$\frac{mv^2}{r} = \mu \, mg$ বা, $v^2 = \mu rg$

সুতরাং, চাকা না পিছলে গাড়িটি যে সর্বোচ্চ দ্রুতিতে (v_m) r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে বাঁক নিতে পারে তা হচ্ছে,

$$v_m = \sqrt{\mu rg} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.55)$$

অনুধাবনমূলক কাজ : বাঁকা পথে সাইকেল চালাতে হলে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয় কেন ?

সোজা পথে বাঁক নিতে গেলে উল্টে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। বৃত্তাকার পথে সাইকেলসহ আরোহীকে বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে অনুভূমিক বরাবর একটি কেন্দ্রমুখী বলের প্রয়োজন হয়। এই কেন্দ্রমুখী বলের যোগান দিতে সাইকেলসহ আরোহীকে বাঁকের কেন্দ্রের দিকে হেলতে হয়।

৪। গ্রহগুলোর গতি (Motion of the planets) : গ্রহগুলো নিজ নিজ কক্ষপথে সূর্যের চারদিকে আবর্তন করছে। এখানে প্রতিটি গ্রহের ওপর ক্রিয়ারত সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বলই হলো প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল।

অনুরূপভাবে গ্রহের চারদিকে আবর্তনরত উপগ্রহের ক্ষেত্রে অভিকেন্দ্র বল হলো গ্রহের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১৪

১। 50 m ব্যাসের বৃত্তাকার পথে কোনো মোটর সাইকেল আরোহী কত বেগে ছুটলে উল্লম্ব তলের সাথে তিনি 30° কোণে আনত থাকবেন ? [রা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); RUET Admission Test, 2004-05 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $v^2 = rg \tan\theta$

বা, $v = \sqrt{rg \tan\theta}$

$\therefore \; v = \sqrt{25 \times 9.8 \times \tan(30°)}$

$= \sqrt{25 \times 9.8 \times 0.577}$

$= 11.89 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,

$r = \frac{50}{2} \text{m} = 25 \text{m}$

$\theta = 30°$

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

$v = ?$

২। 25 m ব্যাসার্ধের একটি অনুভূমিক সমতল রাস্তার বাঁকে একটি গাড়ি সর্বোচ্চ কত বেগে চলতে পারে? রাস্তা ও টায়ারের মধ্যে ঘর্ষণ গুণাঙ্ক = 0·25।

মনে করি, গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ = v, গাড়ির ভর = m;

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ = r; রাস্তা ও টায়ারের মধ্যে ঘর্ষণ গুণাঙ্ক = μ

আমরা জানি সর্বোচ্চ বেগের ক্ষেত্রে,

অভিকেন্দ্র বল = সীমাস্থ ঘর্ষণ বল

বা, $\frac{mv^2}{r} = \mu mg$ ($\because$ সীমাস্থ ঘর্ষণ বল, $f = \mu mg$)

$\therefore\ v = \sqrt{\mu rg}$

$= \sqrt{0.25 \times 25 \times 9.8}$

$= 7.83\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

$\mu = 0.25$

$r = 25\ \text{m}$

$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

৩। একজন সাইকেল আরোহী ঘণ্টায় 20 km বেগে 18 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে চলছে। উল্লম্ব দিকে এর নতির পরিমাণ কত?

ধরি, উল্লম্ব দিকের সাথে সাইকেল আরোহীর নতি কোণ = θ

আমরা জানি,

$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{(5.56)^2}{18 \times 9.8} = 0.1752$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}(0.1752)$

$= 9.9°$

এখানে,

সাইকেল আরোহীর বেগ,

$v = 20\ \text{km h}^{-1} = \frac{20 \times 1000}{60 \times 60} = 5.56\ \text{ms}^{-1}$

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 18\ \text{m}$

$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

৪। একটি রেল লাইনের বাঁকের ব্যাসার্ধ 250 m এবং রেল লাইনের পাতদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 m, ঘণ্টায় 50 km বেগে চলন্ত গাড়ির ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় ব্যাংকিং এর জন্য বাইরের লাইনের পাতকে ভেতরের লাইনের পাত অপেক্ষা কতটুকু উঁচু করতে হবে ? [Admission Test : CKRUET 2021-22 (মান ভিন্ন); CUET 2013-14]

আমরা জানি,

$\frac{h}{x} = \frac{v^2}{rg}$

$\therefore\ h = \frac{v^2 x}{rg} = \frac{(13.89)^2 \times 1}{250 \times 9.8}$

$= 0.079\ \text{m}$

এখানে,

$r = 250\ \text{m}$

$x = 1\ \text{m}$

$v = 50\ \text{km/hr} = \frac{50 \times 1000}{3600}$

$= 13.89\ \text{ms}^{-1}$

$h = ?$

৫। একটি রাস্তা 100 m ব্যাসার্ধে বাঁক নিয়েছে। ওই স্থানে রাস্তাটি চওড়া 5 m এবং এর ভেতরের কিনারা হতে বাইরের কিনারা 50 cm উঁচু। সর্বোচ্চ কত বেগে ওই স্থানে নিরাপদে বাঁক নেয়া যাবে ?

[রা. বো. ২০১৭ (মান ভিন্ন); RUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$\frac{h}{x} = \sin\theta = \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$\therefore\ \frac{v^2}{rg} = \frac{h}{x}$

$\therefore\ v = \sqrt{\frac{hrg}{x}}$

$= \sqrt{\frac{0.5 \times 100 \times 9.8}{5}}$

$= 9.899\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

$r = 100\ \text{m}$

$x = 5\ \text{m}$

$h = 50\ \text{cm} = 0.5\ \text{m}$

$v = ?$

৬। একটি অনুভূমিক রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধ 80 m। যদি রাস্তা ও চাকার ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0.3 হয়, তবে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ কত হলে গাড়িটি পিছলে যাবে না ?

আমরা জানি,

গাড়ির বেগ, $v = \sqrt{\mu r g}$

সুতরাং গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ হবে যাতে গাড়িটি পিছলে না যায়,

$$v = \sqrt{0.3 \times 80 \times 9.8}$$
$$= 15.34 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
$r = 80 \text{ m}$
$\mu = 0.3$
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

৭। রফিক একটি বালতিতে সামান্য পানি নিয়ে এর হাতল ধরে 1.5 m ব্যাসার্ধের উল্লম্ব বৃত্তাকার তলে প্রতি মিনিটে 90 বার ঘুরাচ্ছে। তা দেখে সফিক বালতিটিকে একইভাবে আরও ধীরে ঘুরানোর চেষ্টা করায় বালটির পানি পড়ে গেল। উল্লেখ্য পানিসহ বালতির ভর 2 kg এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 9.8 ms⁻²। (ক) রফিক বালতিটি ঘুরানোর সময় সর্বোচ্চ কত টান অনুভব করেছিল ? (খ) সফিক কমপক্ষে কত কৌণিক বেগে বালতিটিকে উল্লম্ব তলে ঘুরালে বালটিটির পানি পড়বে না।

(ক) এখানে বালতিটির কেন্দ্রমুখী বল,

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m(wr)^2}{r} = m\left(\frac{2\pi N}{t}\right)^2 \times r$$
$$= 2 \times \left(\frac{2 \times 3.14 \times 90}{60}\right)^2 \times 1.5$$
$$= 266.2 \text{ N}$$

এখানে,
$r = 1.5 \text{ m}$
$t = 60 \text{ s}$
$m = 2 \text{ kg}$
$N = 90$ বার
$F = ?$

বালতিটি তার গতিপথের সর্বনিম্ন বিন্দুতে সর্বোচ্চ টান অনুভব করবে। সেক্ষেত্রে সর্বোচ্চ টান,

$$T_{max} = F + mg = 266.2 + 2 \times 9.8 = 285.8 \text{ N}$$

(খ) বালটির উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রবিমুখী বল বালতিটির ওজনের সমান হলে সফিক বালতিটিকে উল্লম্ব তলে ঘুরানোর পরও বালতিটির পানি পড়বে না। সেক্ষেত্রে,

$$m'g = m'W_R^2 r$$
$$\therefore \quad W_R^2 = \frac{g}{r}$$
$$\therefore \quad W_R = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9.8}{1.5}} = 2.56 \text{ rad s}^{-1}$$

৪.৩৫ সংঘর্ষ বা সংঘাত
Collision

অতি অল্প সময়ের জন্য বৃহৎ কোনো বল ক্রিয়া করে বস্তুর গতির হঠাৎ ও ব্যাপক পরিবর্তন করাকে সংঘাত বা সংঘর্ষ বলে। ব্যাট দ্বারা ক্রিকেট বলকে আঘাত করা, ক্যারমের স্ট্রাইকার দ্বারা গুটিকে আঘাত করা, কামান হতে গোলা ছোড়া ইত্যাদি সংঘাত বা সংঘর্ষের উদাহরণ। একটি আলফা কণা যখন একটি স্বর্ণ নিউক্লিয়াসের খুবই নিকটে আসে তখন অল্প সময়ের জন্য উহারা পরস্পরকে প্রচণ্ড বলে বিকর্ষণ করে। এই ঘটনাকে সংঘর্ষ বা সংঘাত বলে।

সংঘর্ষ দুই প্রকার; যথা—

(ক) স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Elastic Collision) এবং

(খ) অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ (Inelastic Collision)

৪.৩৫.১ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ
Elastic collision

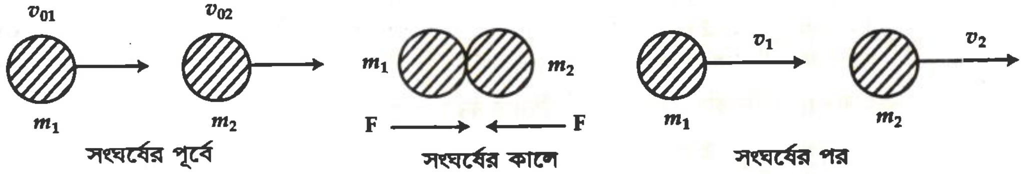
অণু বা পরমাণুর মধ্যে এবং ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন ইত্যাদি কণার মধ্যে যখন সংঘর্ষ ঘটে তখন মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে। এই ধরনের সংঘর্ষ পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে মনে করা যায়। এই ধরনের সংঘর্ষ একটি আদর্শ ঘটনা, বাস্তবে এ রকম সংঘর্ষ দেখতে পাওয়া যায় না। সুতরাং বলা যায়, যে সংঘর্ষের আগে ও পরে দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে সেই সংঘর্ষকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে। এই সংঘর্ষের আগে বস্তু দুটির মোট গতিশক্তি যা ছিল সংঘর্ষের পরেও মোট গতিশক্তি একই থাকে।

উদাহরণ : দুটি কাচের বা ইস্পাতের বলের সংঘর্ষ প্রায় পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ হয়।

আবার যে সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি যুক্ত না হয়ে পরস্পর থেকে বিচ্ছিন্ন হয়ে যায়, কিন্তু সংঘর্ষের পর ওদের আপেক্ষিক বেগ সংঘর্ষের আগের আপেক্ষিক বেগের চেয়ে কম হয়, তাকে **আংশিক স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।** এই ধরনের সংঘর্ষে মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না। সংঘর্ষের সময় কিছু পরিমাণ গতিশক্তি অন্য শক্তি মূলত তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। বাস্তবে এই ধরনের সংঘর্ষই সাধারণত ঘটে।

পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে :

মনে করি m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তু একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} আদিবেগে চলার সময় মুখোমুখি সংঘর্ষ (head-on collision) ঘটালো। ধরি সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক [চিত্র ৪.৪৪]।



চিত্র ৪.৪৪ : পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ।

সংঘাতের সময় বস্তু দুটি পরস্পরের ওপর বিপরীতমুখী ক্রিয়া প্রতিক্রিয়া বল F প্রয়োগ করে। F একটি ঘাত বল এবং এর ক্রিয়ায় প্রতিটি বস্তুরই ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে। মনে করি, সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_1 এবং v_2 বেগ নিয়ে চলতে থাকে। সংঘর্ষের আগে ও পরে বস্তু দুটির বেগের অভিমুখ একই দিকে ধরা হয়েছে। এখানে $v_{01} > v_{02}$ হলে বস্তু দুটির মধ্যে সংঘর্ষ ঘটবে এবং $v_2 > v_1$ হলে বস্তু দুটি সংঘর্ষের পর বিচ্ছিন্ন হয়ে যাবে।

এক্ষেত্রে সংঘর্ষের পূর্বে আপেক্ষিক বেগ $= v_{01} - v_{02}$

সংঘর্ষের পর আপেক্ষিক বেগ $= v_2 - v_1$

স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের সংজ্ঞানুযায়ী সংঘর্ষের আগে ও পরে আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং, $v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1$

ভরবেগের নিত্যতার সূত্র অনুযায়ী,

সংঘর্ষের আগে মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরে মোট ভরবেগ

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.56)$$

এই সমীকরণ থেকে v_1 এবং v_2 মান নির্ণয় করা যায়। এই দুই বেগ থেকে সংঘর্ষের পরের গতিশক্তিও নির্ণয় করা যায়।

আবার সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2$ পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে গতিশক্তি সংরক্ষিত হয়। তাই সংঘর্ষের পূর্বের ও পরের গতিশক্তি উভয় পাশে সমান লেখে সমাধান করলে আমরা পাই,

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.57)$$

অর্থাৎ সংঘর্ষের পরের গতিশক্তি = সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তি।

অর্থাৎ **স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে ভরবেগের সাথে সাথে গতিশক্তিও সংরক্ষিত থাকে।**

সংঘর্ষের পরে বেগ নির্ণয় :

মনে করি m_1 ও m_2 ভরের দুইটি বস্তু একই সরলরেখা বরাবর একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} বেগে গতিশীল। $v_{01} > v_{02}$ হওয়ায় এদের মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঘটে। সংঘর্ষের পরের বেগ v_1 ও v_2 হলে, ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে, সংঘর্ষের পূর্বের মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরের মোট ভরবেগ

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 (v_{01} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{02}) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

যেহেতু সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাজেই সংঘর্ষের পূর্বের গতিশক্তির সমষ্টি সংঘর্ষের পরের গতিশক্তির সমষ্টির সমান হয়।

$$\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{01}^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_{02}^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{01} + v_1)(v_{01} - v_1) = \frac{1}{2} m_2 (v_2 + v_{02}) + (v_2 - v_{02}) \quad \ldots \quad (iii)$$

সমীকরণ (ii) কে সমীকরণ (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$$

$$v_{01} + v_1 = v_2 + v_{02}$$

$$v_2 = v_{01} + v_1 - v_{02}$$

(i) নং সমীকরণে v_2-এর মান বসিয়ে পাই,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{02} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (v)$$

v_1-এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে পাই, (হিসাব করার পর)

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{02} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{01} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (vi)$$

বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ :

(i) $v_{01} = v_{02}$ হলে, অর্থাৎ সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের বেগ সমান হলে কোনো সংঘর্ষ হবে না।

(ii) বস্তু দুটির ভর সমান অর্থাৎ $m_1 = m_2$ হলে, সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই, $v_{01} = v_2$ এবং $v_{02} = v_1$ অর্থাৎ সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি বেগ বিনিময় করে।

(iii) বস্তু দুটির ভর সমান এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে $m_1 = m_2$ এবং $v_{02} = 0$। অতএব উপরিউক্ত সমীকরণ দুটি থেকে পাওয়া যায়, $v_1 = 0$ এবং $v_2 = v_{01}$

অর্থাৎ সংঘাতের পর প্রথম বস্তু থেমে যায় এবং দ্বিতীয় বস্তু প্রথম বস্তুর বেগ নিয়ে চলতে থাকে।

(iv) বস্তু দুটির ভর অসমান এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে $m_1 \neq m_2$ এবং $v_{02} = 0$। সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} \text{ এবং } v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{02}$$

অর্থাৎ $m_1 \neq m_2$ হলে, সংঘাতের ফলে প্রথম বস্তুটিকে গতিহীন করা যায় না।

(v) প্রথম বস্তুটি অত্যন্ত ভারী এবং শুরুতে দ্বিতীয় বস্তুটি গতিহীন। এক্ষেত্রে, $m_1 >> m_2$ এবং $v_{02} = 0$ সুতরাং লেখা যায়, $m_2 - m_1 \simeq m_1$ এবং $m_2 + m_1 \simeq m_1$। অতএব, $v_1 = v_{01}$ এবং $v_2 = 2v_{01}$। অর্থাৎ সংঘাতের পর ভারী বস্তুটির বেগ প্রায় অপরিবর্তিত থাকে; কিন্তু হাল্কা বস্তুটি ভারী বস্তুর প্রায় দ্বিগুণ বেগে ছুটে যায়।

(vi) দ্বিতীয় বস্তুটি অত্যন্ত ভারী এবং শুরুতে গতিহীন। এক্ষেত্রে, $m_2 >> m_2$ এবং $v_{02} = 0$। সুতরাং লেখা যায়, $m_1 - m_2 \simeq - m_2$ এবং $m_1 + m_2 \simeq m_2$। অতএব সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই, $v_1 = v_{01}$ এবং $v_2 = 0$। অর্থাৎ সংঘাতের পরে ভারী বস্তুটি স্থিরই থাকবে এবং হাল্কা বস্তুটি তার প্রাথমিক বেগে বিপরীত দিকে ছুটে যাবে।

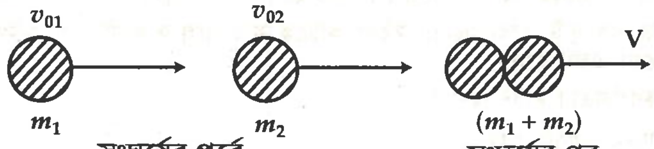
অনুধাবনমূলক কাজ : একটি দেওয়ালে একটি বল ধাক্কা খেয়ে পিছনে ফিরে আসে কেন ?

দুটি বস্তুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংঘর্ষের পর প্রথম বস্তুর বেগ, $v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{01} + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) \times v_{02}$ দেওয়ালের সাথে বলের সংঘর্ষের ক্ষেত্রে $v_{02} = 0$ হয় এবং $m_2 >> m_1$। সুতরাং $v_1 = - v_{01}$ এবং $v_{02} = 0$ অর্থাৎ দেওয়াল স্থির থাকবে এবং বলটি একই বেগ নিয়ে বিপরীত দিকে ফিরে আসবে।

৪.৩৫.২ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ
Inelastic collision

তোমরা দুটি কাদামাটির নরম বল লও এবং বল দুটির সংঘর্ষ ঘটাও। তা হলে দেখতে পাবে যে, এই সংঘর্ষে মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না। এই ধরনের সংঘর্ষও একটি আদর্শ ঘটনা। এ ধরনের সংঘর্ষ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ। এই সংঘর্ষে দুটি বস্তু পরস্পরের সঙ্গে যুক্ত হয়ে একটি বস্তুরূপে চলতে থাকে। দুটি বস্তুর মধ্যে সংঘর্ষ হলে যদি বস্তুদ্বয়ের

মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত না হয় অর্থাৎ সংঘর্ষের পূর্বের ও পরের গতিশক্তি যদি সমান না হয় তা হলে সেই সংঘর্ষকে অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।



চিত্র ৪.৪৫ : পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ।

৪.৪৫ চিত্রে পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ দেখানো হয়েছে। m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তু একই সরলরেখায় একই দিকে যথাক্রমে v_{01} এবং v_{02} বেগে চলে পরস্পরের সঙ্গে মুখোমুখি সংঘর্ষ ঘটাল। সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি পরস্পর যুক্ত হয়ে একই দিকে v বেগে চলতে লাগল।

এখন রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি থেকে পাই,

সংঘর্ষের আগে মোট ভরবেগ = সংঘর্ষের পরে মোট ভরবেগ

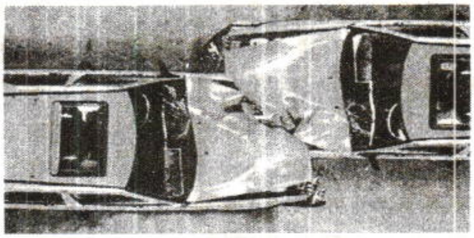
RMDAC

$\therefore \quad m_1v_{01} + m_2v_{02} = (m_1 + m_2)v$

বা, $v = \dfrac{m_1v_{01} + m_2v_{02}}{m_1 + m_2}$ ... ... (4.58)

সংঘর্ষের আগে মোট গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{02}^2$ এবং সংঘর্ষের পর মোট গতিশক্তি $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$ বিয়োগ করে গতিশক্তি ক্ষয় নির্ণয় করা যায়। দেখা যায় যে, গতিশক্তির ক্ষয় আপেক্ষিক বেগ $(v_{01} - v_{02})$ এর বর্গের সমানুপাতিক হয়। আবার যদি সংঘর্ষের পরের গতিশক্তি পূর্বের গতিশক্তির চেয়ে বেশি হয় তা হলে সংঘর্ষের ফলে বিভব শক্তি মুক্ত হবে এবং উভয় ক্ষেত্রে ভরবেগ ও মোট শক্তি সংরক্ষিত হবে।

যাচাই কর : পাশের চিত্রটি লক্ষ কর [চিত্র ৪.৪৬]। গাড়িটি কী ধরনের সংঘর্ষে লিপ্ত হয়েছে ? স্বভাবতই গাড়িটির সংঘর্ষের পর আপেক্ষিক বেগ 0। যদি সংঘর্ষের পূর্বে গাড়িদ্বয়ের বেগ যথাক্রমে u_1, u_2 হয় তা হলে সংঘর্ষের পরে বেগ v এর সমীকরণটি লিখে প্রকাশ কর।



চিত্র ৪.৪৬

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১৫

১। পানিতে স্থিরভাবে ভাসমান 200 kg একটি বোটের ওপর দুই বিপরীত প্রান্তে দুইজন বালক দাঁড়িয়ে আছে। তাদের ভর যথাক্রমে 40 kg এবং 70 kg। যদি তারা প্রত্যেকে এক সাথে 4 ms^{-1} অনুভূমিক বেগে বোট থেকে লাফ দেয় তা হলে বোটটি কোনদিকে কত বেগে গতিশীল হবে ? [CKRUET Admission Test, 2021-22(মান ভিন্ন)]

দেয়া আছে,

প্রথম বালকের ভর, $m_1 = 40$ kg

দ্বিতীয় বালকের ভর, $m_2 = 70$ kg

বোটের ভর, $m_3 = 200$ kg

লাফ দেবার আগে,

প্রথম বালকের বেগ, $u_1 = 0$

দ্বিতীয় বালকের বেগ, $u_2 = 0$

বোটের বেগ, $u_3 = 0$

লাফ দেবার পর,

প্রথম বালকের বেগ, $v_1 = 4$ ms^{-1}

দ্বিতীয় বালকের বেগ, $v_2 = -4$ ms^{-1}

বোটের বেগ, $v_3 = ?$

আমরা জানি,

$m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3 = m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3$

বা, $0 + 0 + 0 = 40 \times 4 + 70 \times -4 + 200 \times v_3$

বা, $-120 + 200\, v_3 = 0$

$\therefore \quad v_3 = 0.6$ ms^{-1} এবং

দিক হবে m_2 ভরের দিকে

২। $3\ ms^{-1}$ বেগে $2\ kg$ ভরের একটি বলের সঙ্গে $0.5\ kg$ ভরের আরেকটি স্থির বলের সোজাসুজি সংঘর্ষ ঘটে। যদি (ক) সংঘর্ষের পর এরা একে অন্যের সঙ্গে আটকে গিয়ে কত বেগে চলতে থাকবে ? এবং (খ) সংঘর্ষটি যদি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হয়, তবে সংঘর্ষের পর বল দুটির বেগ কত হবে ? [ব. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০১৫]

(ক) সংঘর্ষের পর বল দুটি একে অন্যের সঙ্গে আটকে যায় বলে সংঘর্ষটি পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক হবে। এখানে সংঘর্ষের পর বল দুটির বেগ একই হবে।

ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার নীতি অনুযায়ী

$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$$

$\therefore$ এক্ষেত্রে $v_1 = v_2 = v$ বসালে এবং $v_{0_2} = 0$ ধরলে আমরা পাই,

$$2 \times 3 + 0 = (2 + 0.5) \times v$$

সুতরাং $v = 2.4\ ms^{-1}$

এখানে,
$v_{01} = 3$
$v_{02} = 0$
$m_1 = 2\ kg$
$m_2 = 0.5\ kg$
$v = ?$

(খ) সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বলে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে আমরা জানি,

$$v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1$$
$$3 - 0 = (v_2 - v_1)$$
$$\therefore \quad v_2 - v_1 = 3\ ms^{-1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

আবার ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী

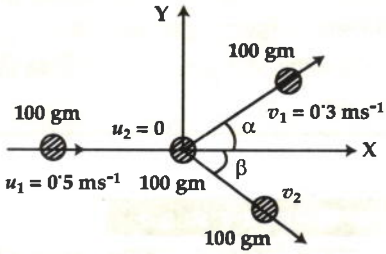
$$m_1v_{01} + m_2v_{02} = m_1v_1 + m_2v_2$$
$$2 \times 3 + 0 = 2v_1 + 0.5v_2$$
$$\therefore \quad 2v_1 + 0.5v_2 = 6 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $v_1 = 18\ ms^{-1}$ এবং $v_2 = 4.8\ ms^{-1}$

সুতরাং সংঘর্ষের পর বল দুটি একই দিকে অগ্রসর হবে।

৩। ঘর্ষণবিহীন অনুভূমিক তলে $0.5\ ms^{-1}$ গতিশীল $100\ gm$ ভরের একটি বল অনুরূপ আর একটি স্থির বলকে আঘাত করল। সংঘাতটি স্থিতিস্থাপক হলে এবং সংঘাতের পর প্রথম বস্তুটির গতিবেগ $0.3\ ms^{-1}$ হলে অন্য বলটির বেগ কত হবে? দেখাও যে, সংঘাতের পর বল দুটি পরস্পরের সমকোণে চলতে থাকে।

সংঘর্ষের পর প্রথম বস্তুটির গতিবেগ X-অক্ষের সঙ্গে α কোণে $v_1 = 0.3\ ms^{-1}$ এবং দ্বিতীয় বস্তুটির গতিবেগ X-অক্ষের সঙ্গে β কোণে v_2 বেগে গমন করে [চিত্র দ্রষ্টব্য]। যেহেতু সংঘর্ষটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক, কাজেই রৈখিক ভরবেগ এবং গতিশক্তি উভয়ই সংরক্ষিত হবে। এখন গতিশক্তির সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী,



$$\frac{1}{2} \times 0.1 \times (0.5)^2 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times 0^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (0.3)^2 + \frac{1}{2} \times 0.1 \times v_2^2$$

বা, $v_2^2 = (0.5)^2 - (0.3)^2 = 0.16$

$\therefore \quad v_2 = \sqrt{0.16} = 0.4$ ms–1

এখন X-অক্ষ বরাবর রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী,

$$0.1` \times 0.5 + 0.1 \times 0 = 0.1 \times 0.3 \cos\alpha + 0.1 \times 0.4 \cos\beta$$

বা, $0.3 \cos\alpha + 0.4 \cos\beta = 0.5 \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

Y-অক্ষ বরাবর রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী,

$$0.1 \times 0 + 0.1 \times 0 = 0.1 \times 0.3 \sin\alpha - 0.1 \times 0.4 \sin\beta$$

বা, $0.3 \sin\alpha - 0.4 \sin\beta = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

সমীকরণ (i) ও (ii)-কে বর্গ করে এবং যোগ করে পাই,

$$(0.3 \cos\alpha + 0.4 \cos\beta)^2 + (0.3 \sin\alpha - 0.4 \sin\beta)^2 = 0.25$$

বা, $0.09 \cos^2\alpha + 0.16 \cos^2\beta + 2 \times 0.3 \times 0.4 \cos\beta \cos\alpha + 0.09 \sin^2\alpha$
$+ 0.16 \sin^2\beta - 2 \times 0.3 \times 0.4 \times \sin\alpha \sin\beta = 0.25$

বা, $0.09 + 0.16 + 0.24 (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) = 0.25$

$\therefore \cos(\alpha + \beta) = 0 \;\therefore\; \alpha + \beta = 90°$

সুতরাং, সংঘাতের পর বল দুটি পরস্পরের সমকোণে চলতে থাকবে।

৪। 4 kg ভরের একটি বস্তু অন্য একটি স্থির বস্তুর সাথে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে লিপ্ত হলো। সংঘর্ষের পর বস্তুটি একই দিকে আদিবেগের এক-চতুর্থাংশ বেগ নিয়ে চলতে থাকল। স্থির বস্তুর ভর কত?

[ম. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); BUET Admission Test, 2018-19]

আমরা জানি,

$$v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_1} \times v_{02} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \times v_{01}$$

বা, $v_2 = \dfrac{4 - m_2}{4 + m_2} \times v_{02} + \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} \times 0$

বা, $\dfrac{v_2}{v_{02}} = \dfrac{4 - m_2}{4 + m_2}$

বা, $\dfrac{1}{4} = \dfrac{4 - m_2}{4 + m_2}$

বা, $4 + m_2 = 16 - 4m_2$

বা, $5m_2 = 12$

$\therefore m_2 = \dfrac{12}{5}\text{ kg} = 2.4\text{ kg}$

এখানে,
$m_1 = 4\text{ kg}$
$v_{02} = v_2$
$\dfrac{v_2}{v_{02}} = \dfrac{1}{4}$
$v_{01} = 0$
$m_2 = ?$

৫। 45 kg এবং 65 kg ভরের দুটি বস্তু যথাক্রমে 12 ms^{-1} এবং 2.5 ms^{-1} বেগে পরস্পর বিপরীত দিকে আসার সময় একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তুদ্বয় একত্রে যুক্ত থেকে কত বেগে চলবে?

[সি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); Admission Test : KUET 2019-20; RU C-2 2021-22 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$

বা, $v = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$ [$\because$ v_2 বিপরীত দিক হতে আগত, তাই $v_2 = -ve$ ধরা হয়েছে]

$\therefore v = \dfrac{45 \times 12 - 65 \times 2.5}{45 + 65}$

$= \dfrac{377.5}{110}$

$= 3.43\text{ ms}^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 45\text{ kg}$
$m_2 = 65\text{ kg}$
$v_1 = 12\text{ ms}^{-1}$
$v_2 = 2.5\text{ ms}^{-1}$
$v = ?$

৬। 10 kg ভরের একটি বস্তু A, $\vec{u_1} = (\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k})$ গতিবেগে চলে $\vec{u_2} = (\hat{i} + \hat{j})$ গতিবেগে ধাবমান 20 kg ভরের একটি বস্তু B-এর সাথে অস্থিতিস্থাপক সংঘাতের পর পরস্পরের সাথে আটকে গেল। সংঘাতের পর বস্তু AB-এর গতিবেগ কত হবে?

ধরি সংঘাতের পর সংযুক্ত বস্তু AB, v গতিবেগে চলমান।

এখন, রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুযায়ী,

$$m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$\therefore 10(\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}) + 20(\hat{i} + \hat{j}) = (10 + 20)\vec{v}$

বা, $\vec{v} = \dfrac{10\hat{i} + 40\hat{j} - 60\hat{k} + 20\hat{i} + 20\hat{j}}{30}$

$= \dfrac{30\hat{i} + 60\hat{j} - 60\hat{k}}{30} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

এখানে,
$m_1 = 10\text{ kg}$
$m_2 = 20\text{ kg}$
$\vec{u_1} = (\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k})$
$\vec{u_2} = (\hat{i} + \hat{j})$
$v = ?$

$\therefore$ সংঘাতের পর সংযুক্ত বস্তুটির গতিবেগ হবে $\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

৪.৩৬ ঘর্ষণ
Friction

একটি বস্তুকে যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর দিয়ে গড়িয়ে বা টেনে নিলে বস্তু দুটির সংযোগস্থলে উঁচুনিচু বা খাঁজ থাকায় বস্তু দুটি পরস্পরের সাথে আটকে যায়, ফলে গতি বাধাপ্রাপ্ত হয়, ইহাই ঘর্ষণ, যে বল দ্বারা গতি বাধাপ্রাপ্ত হয় তাকে ঘর্ষণ বল বলে।

সংজ্ঞা : একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর সাথে পরস্পরের সংস্পর্শে থেকে একে অপরের ওপর দিয়ে চলতে চেষ্টা করে তখন উভয়ের সংযোগস্থলে গতির বিরুদ্ধে একটি বাধাদানকারী বলের সৃষ্টি হয়। এই বাধাকে ঘর্ষণ বলে।

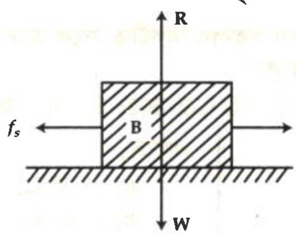
ঘর্ষণ সাধারণত চার প্রকার; যথা—

১। স্থিতি ঘর্ষণ (Static friction)
২। গতীয় ঘর্ষণ বা বিসর্গ ঘর্ষণ (Kinetic friction or Sliding friction)
৩। আবর্ত ঘর্ষণ (Rolling friction) এবং
৪। প্রবাহী ঘর্ষণ (Fluid friction)

৪.৩৬.১ স্থিতি ঘর্ষণ
Static friction

ধরি B একটি কাঠের ব্লক সমতল টেবিলের ওপর রাখা আছে। এর ওজন W খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করছে। নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী টেবিলও ব্লকের ওপর সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া R প্রয়োগ করবে। এই অবস্থায় W এবং R পরস্পর বিপরীতমুখী হওয়ায় এরা পরস্পরের ক্রিয়া নষ্ট করবে। ফলে ব্লকটি স্থির থাকবে [চিত্র ৪.৪৭]।

এখন যদি ব্লকটির ওপর F বল সমান্তরালে প্রয়োগ করা হয় তা হলে ব্লকটি গতিশীল হওয়ার উপক্রম করে। এই বলের মান ধীরে ধীরে বৃদ্ধি করা হলে ব্লকটি গতিশীল হবে। বল প্রয়োগে ব্লকটি গতিশীল না হওয়ার কারণ ব্লক ও টেবিলের মধ্যবর্তী ঘর্ষণ বল, f_s। F-এর মান যে সীমায় পৌঁছালে ব্লকে গতির সঞ্চার হওয়ার উপক্রম হবে সেই সময় উভয়ের সংযোগস্থলে বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী আপেক্ষিক গতিকে বাধাদানকারী বলের মানও সর্বাধিক হয়। ঘর্ষণ বলের এই মানকে সীমান্তিক মান বা সীমান্তিক ঘর্ষণ বলে।



চিত্র ৪.৪৭

সংজ্ঞা : কোনো বস্তুকে কোনো তলের ওপর গতিশীল করার জন্য যে বল প্রয়োগ করলে বস্তুতে গতির সঞ্চার হওয়ার উপক্রম হয়, সেই সময় বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী আপেক্ষিক গতিকে বাধাদানকারী ঘর্ষণ বলের মানকে সীমান্তিক ঘর্ষণ বল বলে।

৪.৩৬.২ স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক
Coefficient of static friction

সংজ্ঞা : দুটি বস্তু পরস্পরের সংস্পর্শে থাকলে স্থিতি ঘর্ষণের সীমান্তিক মান ও অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়ার অনুপাতকে স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক বলে।

স্থিতি ঘর্ষণের সীমান্তিক মান f_s এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R হলে, স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক,

$$\mu_s = \frac{f_s}{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.59)$$

স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্কের কোনো একক নেই, এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা ছোট হয়।

৪.৩৬.৩ ঘর্ষণ কোণ
Angle of friction

সংজ্ঞা : সীমান্তিক ঘর্ষণের ক্ষেত্রে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া (R) এবং ঘর্ষণ বলের (f_s) লব্ধিকে লব্ধি প্রতিক্রিয়া (S) বলে। এই লব্ধি প্রতিক্রিয়া অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঘর্ষণ কোণ (λ) বলে [চিত্র ৪.৪৮]।

চিত্র অনুযায়ী লব্ধি প্রতিক্রিয়াকে দুইভাবে বিভক্ত বা বিভাজন করা যায়, একটি $R = S\cos\lambda$

এবং অপরটি

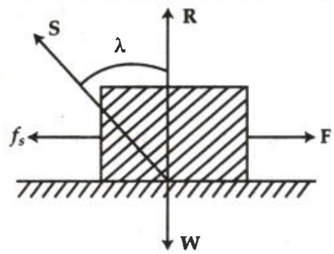
$$f_s = S\sin\lambda$$

ঘর্ষণ গুণাঙ্কের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\mu_s = \frac{f_s}{R} = \frac{S\sin\lambda}{S\cos\lambda} = \tan\lambda$$

$$\therefore \quad \mu_s = \tan\lambda \quad \ldots \quad \ldots \quad (4.60)$$

অর্থাৎ ঘর্ষণ কোণের ট্যানজেন্ট ঘর্ষণ গুণাঙ্কের সমান।



চিত্র ৪.৪৮

৪·৩৬·৪ স্থিতি বা নিশ্চল কোণ বা বিরাম কোণ
Angle of repose

মনে করি, ব্লক B-কে একটি আনত তল OY-এর ওপর বসানো আছে [চিত্র ৪·৪৯]। ব্লকের ওজন W ও ঘর্ষণ বল f_s। ব্লকটি আনত কোণ (θ)-এর জন্য গতিশীল হওয়ার উপক্রম করে। এই সীমান্তিক অবস্থায় ব্লকের ওজন W দুটি উপাংশে বিভাজিত হয়।

সেক্ষেত্রে,

$R = W\cos\theta$ এবং $f_s = W\sin\theta$

ঘর্ষণ গুণাঙ্ক, $\mu_s = \frac{f_s}{R} = \frac{W\sin\theta}{W\cos\theta} = \tan\theta$ ... (4.61)

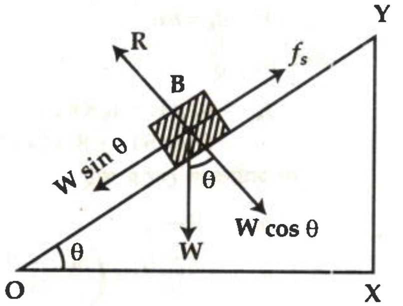
(4.60) সমীকরণ অনুযায়ী,

$\mu_s = \tan\lambda$ ... ... (4.62)

সমীকরণ (4.61) এবং (4.62) তুলনা করে পাই,

$\tan\theta = \tan\lambda$

বা, $\boxed{\theta = \lambda}$ ... ... (4.63)



চিত্র ৪·৪৯

সংজ্ঞা : নততলের নতি কোণের যে সর্বোচ্চ মানের জন্য ওই তলের ওপর রক্ষিত কোনো বস্তু নততল বরাবর নিচের দিকে গতিশীল হওয়ার উপক্রম করে তাকে স্থিতি বা নিশ্চল বা বিরাম কোণ বলে।

অর্থাৎ ঘর্ষণ কোণ ও স্থিতি বা নিশ্চল কোণ পরস্পর সমান।

স্থিতি ঘর্ষণের সূত্রাবলি :

১। ঘর্ষণ বল সর্বদা গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়া করে।

২। স্থিতি ঘর্ষণ বলের সীমান্তিক মান অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক।

৩। স্থিতি ঘর্ষণ বল স্পর্শ তলের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে। স্পর্শ তলের ক্ষেত্রফলের ওপর নয়।

৪·৩৬·৫ গতীয় ঘর্ষণ
Kinetic friction

একটি বস্তু যখন অন্য একটি তল বা বস্তুর ওপর গতিশীল হয় অর্থাৎ দুটি স্পর্শতলের মধ্যে যখন আপেক্ষিক গতি বিদ্যমান থাকে তখন তাদের মধ্যে যে ঘর্ষণ ক্রিয়া করে তাকে গতীয় ঘর্ষণ বলে। গতীয় ঘর্ষণ বলের মান স্থিতি ঘর্ষণ বলের সীমান্তিক মানের চেয়ে কম হয়।

৪·৩৬·৬ গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক
Coefficient of kinetic friction

একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর দিয়ে স্থির বেগে চলতে থাকে তখন গতীয় ঘর্ষণ বল (f_k) এবং অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়ার (R) অনুপাতকে গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক μ_k বলে।

অর্থাৎ $\mu_k = \frac{f_k}{R}$ ... ... (4.64)

যদি m ভরের একটি বস্তুর ওপর F অনুভূমিক বল প্রয়োগে বস্তুটি গতিশীল হয় এবং f_k গতীয় ঘর্ষণ বল বস্তুটির গতিকে বাধা সৃষ্টি করে তা হলে,

$F - f_k = ma$

বা, $a = \frac{F - f_k}{m}$ ... ... (4.65)

RMDAC

গতীয় ঘর্ষণের সূত্রাবলি :

১। গতীয় ঘর্ষণ বল অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক।

২। গতীয় ঘর্ষণ বল স্পর্শক তলের ক্ষেত্রফলের ওপর নির্ভর করে না। তলদ্বয়ের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে।

৩। বেগ বেশি না হলে গতীয় ঘর্ষণ বল তলদ্বয়ের বেগের ওপর নির্ভরশীল নয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৪.১৬

১। 50 kg ভরের একটি কাঠের ব্লককে 500 N অনুভূমিক বলে মেঝের ওপর দিয়ে টানা হচ্ছে। ব্লকটি যখন চলে তখন বাক্স ও মেঝের মধ্যবর্তী ঘর্ষণ সহগ 0·50। ব্লকটির ত্বরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; সি. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯]

আমরা জানি,

$$F - f_k = ma \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

এবং $\mu_k = \dfrac{f_k}{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$

$\therefore \quad f_k = \mu_k \times R = \mu_k \times mg$

$= 0{\cdot}5 \times 50 \times 9{\cdot}8 = 245 \text{ N}$

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$ma = F - f_k$

বা, $a = \dfrac{F - f_k}{m} = \left(\dfrac{500 - 245}{50}\right) = 5{\cdot}1 \text{ ms}^{-2}$

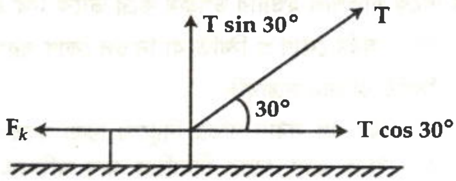
২। 10 kg ভরের একটি বস্তুকে একটি মেঝের ওপর দিয়ে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে একটি রশির সাহায্যে সমবেগে টেনে নেওয়া হচ্ছে। মেঝের সাথে বস্তুর ঘর্ষণ বল 8 N হলে—(ক) রশির টান (খ) বস্তুটির ওপর মেঝের প্রতিক্রিয়া বল কত ?

(ক) আমরা জানি,

$T \cos 30° = F_k$

$T \cos 30 = 8 \text{ N}$

$\therefore \quad T = \dfrac{8}{\cos 30°} = 9{\cdot}24 \text{ N}$



(খ) আবার বস্তুটির ওপর মেঝের প্রতিক্রিয়া বল T_1 হলে,

$T_1 \sin 30° = 9{\cdot}24$

$\therefore \quad T_1 = \dfrac{9{\cdot}24}{\sin 30°} = 4{\cdot}62 \text{ N}$

৩। 400 kg ভরের একটি মোটর গাড়ি 44 ms⁻¹ সমবেগে চলাকালে ব্রেক চেপে একে 44 m দূরে থামানো হলো। যদি মাটির ঘর্ষণজনিত বল 200 N হয় তবে ব্রেক জনিত বলের মান কত ?

মনে করি, বাধাদানকারী বল = F

আমরা পাই, $F = F_1 + F_2 = ma$

এখানে, F_1 = ব্রেকজনিত বল, F_2 = মাটির ঘর্ষনজনিত বল = 200 N

$\therefore \quad v^2 = v_0^2 - 2as$

$0 = (44)^2 - 2 \times a \times 44$

$\therefore \quad a = \dfrac{44 \times 44}{2 \times 44} = 22 \text{ ms}^{-2}$

এখন, $F = ma = 400 \times 22 = 8800 \text{ N}$

$\therefore \quad F_1 = F - F_2 = 8800 - 200 = 8600 \text{ N}$

৪। ভূপৃষ্ঠে 16 ms⁻¹ বেগে ধাবমান একটি বস্তু ঘর্ষণজনিত বাধার ফলে 60 m পথ অতিক্রম করার পর থেমে যায়। বস্তু ও ভূপৃষ্ঠের মধ্যে ঘর্ষণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। ($g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$)

আমরা জানি, মন্দন a হলে,

$v^2 = u^2 - 2as$

বা, $0 = (15)^2 - 2a \times 60$

বা, $a = \dfrac{16 \times 16}{2 \times 60}$

$= 2{\cdot}133 \text{ ms}^{-2}$

এখানে,

$u = 16 \text{ ms}^{-1}$

$s = 60 \text{ m}$

$g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

$v = 0$

$\mu_K = ?$

বস্তু ও ভূপৃষ্ঠের মধ্যে চল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক μ_K হলে বস্তুর গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়াশীল চল ঘর্ষণ বল, $f_K = \mu_K mg$

$\therefore$ মন্দন, $a = f_K/m = \mu_K g$

বা, $\mu_K = \dfrac{a}{g} = \dfrac{2.133}{9.8} = 0.218$

৫। একটি অ্যারোপ্লেনের 'take off'-এর জন্য 100 kmh^{-1} গতিবেগ প্রয়োজন এবং 'taka off' করার আগে একে অনুভূমিক রানওয়েতে 200 m দৌড়াতে হয়। প্লেনটির ভর 10000 kg এবং প্লেনের চাকা ও ভূমির মধ্যে ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0.4। প্লেনটির 'take off' এর জন্য এর ইঞ্জিনকে ন্যূনতম কত বল প্রয়োগ করতে হবে নির্ণয় কর।

ধরা যাক, ইঞ্জিন কর্তৃক প্রযুক্ত ন্যূনতম বল হলো F_{min}। এই বল ভূমির ঘর্ষণের বিরুদ্ধে কাজ করে এবং প্লেনটিকে প্রয়োজনীয় গতিশক্তি জোগান দেয়।

এখন, প্লেনটির ইঞ্জিন কর্তৃক মোট কৃত কাজ,

$$W = F_{min} \times s = 200\, F_{min} \text{ Joule}$$

ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে কৃত কাজ,

$$\mu_K mg \times s = 0.2 \times 10^4 \times 9.8 \times 200 = 3.92 \times 10^6 \text{ Joul}$$

প্লেনটির গতিশক্তি,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 10^4 \times (27.78)^2 = 3.859 \times 10^6 \text{ Joule}$$

$\therefore$ শর্তানুসারে, $F_{min} \times 200 = 3.92 \times 10^6 + 3.859 \times 10^6 = 7779 \times 10^6$

$\therefore$ $F_{min} = \dfrac{7.779}{200} \times 10^6 = 3.89 \times 10^4$ N

এখানে,

$v = 100 \text{ kmh}^{-1} = \dfrac{100 \times 1000}{3600} = 27.78 \text{ ms}^{-1}$

$m = 10{,}000 \text{ kg} = 10^4 \text{ kg}$

$\mu_K = 0.2$

$s = 200 \text{ m}$

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

$F_{min} = ?$

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$\vec{F} = m\vec{a}$ ... ... (1)

$\vec{J} = \vec{F} \times t$ ... ... (2)

$\vec{J} = \Delta\vec{P}$ ... ... (3)

$F = \dfrac{m(v - v_0)}{t}$ ... ... (4)

$J = m(v_0 - v)$ ... ... (5)

$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$ অর্থাৎ ক্রিয়া বল = প্রতিক্রিয়া বল ... ... (6)

$\vec{v} = \dfrac{-mv}{M}$ ... ... (7)

$a = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\Delta m}{\Delta t}\right) v_r$ ... ... (8)

$a = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\Delta m}{\Delta t}\right) v_r - g$ ... ... (9)

$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ ... ... (10)

$\vec{P_2} + \vec{P_1} =$ ধ্রুবক ... ... (11)

$\vec{F} = -\vec{R}$ ... ... (12)

$\vec{F} \times t = -\vec{R} \times t$ ... ... (13)

$R = m(g + a)$, লিফট যখন 'a' ত্বরণে ওপরে উঠে ... ... (14)

$R = m(g - a)$, লিফট যখন 'a' ত্বরণে নিচে নামে ... ... (15)

$R = m(g - a)$, অভিকর্ষজ ত্বরণ অপেক্ষা বেশি ত্বরণে নিচে নামে ... ... (16)

$\theta = \frac{s}{r}$ ... ... (17)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t}$ ... ... (18)

$T = \frac{2\pi r}{v}$ ... ... (19)

$v = \omega r$ ... ... (20)

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$ ... ... (21)

$a = \alpha r$ ... ... (22)

$\omega = \omega_0 + \alpha t$ ... ... (23)

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2\omega$ ... ... (24)

$L = I\omega$ ... ... (25)

$\frac{dL}{dt} = \tau$ ... ... (26)

$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ ... ... (27)

$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$ ... ... (28)

$E_K = \frac{1}{2} I\omega^2$ ... ... (29)

$\tau = d \times F$ ... ... (30)

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ... ... (31)

$\tau = I\alpha$ ... ... (32)

$I_z = I_{LC} + I_y$ ... ... (33)

$I = I_G + Mh^2$ ... ... (34)

$F = \frac{mv^2}{r}$ ... ... (35)

$v \leq (\mu r g)^{\frac{1}{2}}$ ... ... (36)

$\tan\theta = \frac{v^2}{g}$ ... ... (37)

$\sin\theta = \frac{h}{d}$ ... ... (38)

$v_m = \sqrt{\mu r g}$ ... ... (39)

$\mu_S = \frac{f_S}{R}$ ... ... (40)

$\mu_S = \tan\lambda$ ... ... (41)

$\tan\theta = \tan\lambda$ ... ... (42)

$\omega_1\theta = \lambda$ ... ... (43)

$\mu_K = \frac{f_K}{R}$ ... ... (44)

$a = \frac{F - f_K}{m}$ ... ... (45)

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। 8 kg ভরের একটি বস্তুকে 0·2 m লম্বা দড়ি দিয়ে একটি নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে 2 rad s⁻¹ বেগে ঘোরানো হচ্ছে।

(ক) ঘূর্ণায়মান কণাটির কৌণিক ভরবেগ বের কর।

(খ) বস্তুটির ভর অর্ধেক হলে টর্কের কীরূপ পরিবর্তন হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর।

[য. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$$L = I\omega = mr^2\omega = 8 \times (0{\cdot}2)^2 \times 2 = 0{\cdot}64 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$$

(খ) আমরা জানি কৌণিক ত্বরণ α হলে,

টর্ক, $\tau = I\alpha = mr^2\alpha$

$\therefore \quad \tau_1 = m_1 r^2 \alpha$

$m_2 = \frac{m_1}{2}$ হলে,

$\tau_2 = \frac{m_1}{2} r^2 \alpha$

$$\therefore \quad \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{m_1 r^2 \alpha}{2 \times m_1 r^2 \alpha} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad \tau_2 = \frac{\tau_1}{2}$ অর্থাৎ টর্ক অর্ধেক হয়ে যাবে।

২। আরিতার ভর 40 kg। সে একটি ঘর্ষণহীন উল্লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে অনুভূমিকভাবে ঘূর্ণায়মান নাগরদোলার প্রান্তবিন্দুতে চড়ে 25 m ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 10 বার ঘুরছে। আরিতা ধীরে ধীরে কেন্দ্রের দিকে আসতে থাকে এবং কেন্দ্র থেকে 6 m দূরে একটি বিন্দুতে পৌঁছায়।

(ক) প্রান্তবিন্দুতে থাকাবস্থায় আরিতার রৈখিক বেগ কত ?

(খ) আরিতা প্রান্তবিন্দু থেকে কেন্দ্রের দিকে আসলে তার কৌণিক ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে কি না—তা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে পর্যালোচনা কর। [রা. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি রৈখিক বেগ,

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega} = r\omega \sin\theta \, \hat{\eta} = r\omega$$

$$\therefore \quad v = r \times \frac{2\pi N}{t}$$

$$= \frac{12{\cdot}5 \times 2 \times 3{\cdot}14 \times 10}{60}$$

$$= 13{\cdot}08 \text{ ms}^{-1}$$

$\theta = 90°$

$r = \frac{25}{2} \text{ m} = 12{\cdot}5 \text{ m}$

$N = 10$

$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

$\omega = \frac{2\pi N}{t}$

(খ) আবার কৌণিক ভরবেগ,

$$L = r \times p = mr^2\omega$$

$$\therefore \quad L = 40 \times (12{\cdot}5)^2 \times \frac{2\pi}{6}$$

$$= 40 \times (12{\cdot}5)^2 \times \frac{2 \times 3{\cdot}14}{6}$$

$$= 6{\cdot}54 \times 10^3 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

প্রান্তবিন্দুতে,

$r_1 = 12{\cdot}5 \text{ m}$

$m = 40 \text{ kg}$

$\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi \times 10}{60} = \frac{2\pi}{6}$

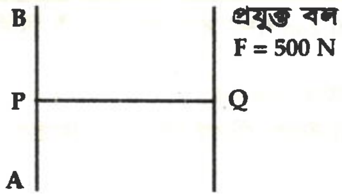
যখন $r = 6$ m তখন,

$$L' = 40 \times (6)^2 \times \frac{2\pi}{6} = 40 \times 36 \times \frac{2 \times 3{\cdot}14}{6}$$

$$= 1{\cdot}51 \times 10^3 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

অর্থাৎ কেন্দ্রের দিকে আসলে কৌণিক ভরবেগ হ্রাস পেতে থাকে। ($\because$ $L \propto r^2$, r-এর মান কমলে L কমতে থাকে)

৩।



(ক) AB ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে PQ দণ্ডটির টর্ক নির্ণয় কর।

(খ) যদি ঘূর্ণন অক্ষ AB, PQ দণ্ডটির প্রান্ত বিন্দু হতে পরিবর্তন করে মধ্য বিন্দুতে নেওয়া হয়, তবে কোন ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক বেশি হবে—তোমার উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক যুক্তি প্রদর্শন কর। [সি. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

টর্ক, $\tau = rF\sin\theta = 1 \times 500 \times \sin 90° = 500$ N

(খ) কোনো দণ্ডের প্রান্ত দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I_1 = \frac{Ml^2}{3}$$

আবার ঘূর্ণন অক্ষ দণ্ডের কেন্দ্রের মধ্য দিয়ে গেলে,

$$I_2 = \frac{Ml^2}{12}$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{Ml^2}{3} \times \frac{12}{Ml^2} = 4$$

$\therefore \quad I_1 = 4I_2$ অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক বেশি হবে।

৪। 5 kg ভর ও 30 cm ব্যাসার্ধের একটি চাকা মিনিটে 60 বার ঘুরছে। চাকাটিকে 5 sec-এ থামানোর জন্য 0·45 N-m টর্ক প্রয়োগ করা হলো।

(ক) চাকাটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত সময়ে চাকাটিকে থামানো যাবে কি না—যাচাই কর।

[রা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০২১; দি. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন)]

(ক) আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \hat{n}\, rp\sin\theta = rp = mr^2\omega$$

$$\text{বা,}\quad L = mr^2 \times \frac{2\pi N}{t}$$

$$= 5 \times (0{\cdot}3)^2 \times \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 60}{60}$$

$$= 2{\cdot}826 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,

$m = 5$ kg

$r = 30$ cm $= 0{\cdot}3$ m

$\theta = 90°$

$N = 60$

$t = 1$ min $= 60$ s

$\omega = \frac{2\pi N}{t}$

(খ) আবার, $\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$\omega_0 = -\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\text{বা,}\quad \frac{1}{2}\alpha t^2 = -2\pi$$

$$\alpha = -\frac{4\pi}{(5)^2} = -\frac{4 \times 3{\cdot}14}{25} = -0{\cdot}5$$

এখানে,

$\omega = 0$

$\omega_0 = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi \times 60}{60}$

$= 2\pi$

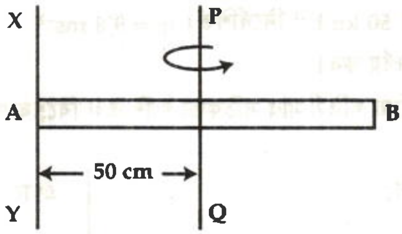
$t = 5$ sec

এখন, $\tau = I\alpha$ এবং $I = mr^2 = 5 \times (0{\cdot}3)^2 = 5 \times 0{\cdot}09 = 0{\cdot}45$

$\therefore \quad \tau = 0{\cdot}45 \times 0{\cdot}5 = 0{\cdot}225$ Nm

যেহেতু প্রযুক্ত টর্ক প্রয়োজনীয় টর্কের মান এর চেয়ে বেশি, সুতরাং চাকাটি থামানো যাবে।

৫।



চিত্রে 500 gm ভরের AB সরু দণ্ডটি এর দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দুতে লম্বভাবে গমনকারী অক্ষ PQ-এর সাপেক্ষে প্রতি মিনিটে 30 বার করে ঘুরছে।

(ক) PQ অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) XY অথবা PQ কোন অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক বেশি হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [দি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি, কৌণিক ভরবেগ, $L = mr^2\omega$

$$\therefore \quad L = 0.5 \times (0.5)^2 \times \frac{2\pi N}{t}$$
$$= 0.5 \times (0.5)^2 \times \frac{2 \times 3.14 \times 30}{60}$$
$$= 0.3925 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,
$\omega = \frac{2\pi N}{t}$
$m = 500 \text{ gm} = 0.5 \text{ kg}$
$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
$N = 30$
$r = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$

(খ) আবার, PQ-অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{12} ml^2$$
$$\therefore \quad I = \frac{1}{12} \times 0.5 \times 1^2 = 0.0417 \text{ kgm}^2$$

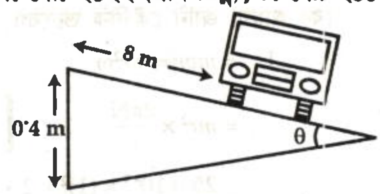
এখানে,
$l = 2 \times 50 = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$
$m = 500 \text{ gm} = 0.5 \text{ kg}$

এবং XY-অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{3} ml^2 = \frac{1}{3} \times 0.5 \times 1^2 = 0.167 \text{ kgm}^2$$

এখানে, XY-অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক PQ-অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক অপেক্ষা বেশি।

৬। 100 m ব্যাসার্ধের একটি বাঁকে 30 kmh^{-1} বেগে বাঁক নিতে গিয়ে বাস রাস্তা থেকে ছিটকে খাদে পড়ে যায়। [ম. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০১৬]



(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত রাস্তার ব্যাংকিং কোণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে বাসটি খাদে পড়ে যাওয়ার কারণ গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি θ-এর মান খুব ছোটো হলে,

$$\tan\theta = \sin\theta = \frac{h}{d}$$
$$\therefore \quad \theta = \sin^{-1}\frac{h}{d} = \sin^{-1}\frac{0.4}{8} = 2.87^\circ$$

এখানে,
$h = 0.4 \text{ m}$
$d = 8 \text{ m}$

(খ) নিরাপদে গাড়ি চালানোর জন্য ব্যাঙ্কিং কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$
$$\text{বা,} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(8.33)^2}{100 \times 9.8}\right\} = 4.05^\circ$$

এখানে,
$v = 30 \text{ kmh}^{-1}$
$= \frac{30 \times 1000}{60 \times 60} \text{ ms}^{-1} = 8.33 \text{ ms}^{-1}$
$r = 100 \text{ m}$

উদ্দীপকের রাস্তায় ব্যাঙ্কিং কোণ 2.87° কিন্তু ওই পথে 30 kmh^{-1} বেগে নিরাপদে গাড়ি চালানোর জন্য ব্যাঙ্কিং কোণ 4.05° হওয়া প্রয়োজন ছিল। তাই গাড়িটি খাদে পড়ে যায়।

৭। একটি রাস্তার প্রস্থ 16 m ও বাঁকের দুই প্রান্তের উচ্চতার পার্থক্য 60 cm এবং ব্যাস 300 m। বাঁকের পাশে একটি বোর্ডে গাড়ির সর্বোচ্চ গতিসীমা 50 kmh^{-1} নির্দেশিত। [$g = 9.8\ ms^{-2}$]

(ক) রাস্তার ব্যাংকিং কোণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে নির্দেশিত সর্বোচ্চ গতিসীমার সঠিকতা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর।

[ম. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি ব্যাংকিং কোণ,

$$\sin\theta = \frac{h}{x}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{0.6}{16}\right)$$

$$= \sin^{-1}(0.0375) = 2.15°$$

এখানে,
$h = 60\ cm = 0.6\ m$
$x = 16\ m$

(খ) সর্বোচ্চ বেগ v হলে আমরা পাই,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $v^2 = rg\tan\theta$

বা, $v = \sqrt{rg\tan\theta}$

$$\therefore v = \sqrt{150 \times 9.8 \times \tan 2.15} = \sqrt{55.19}$$

$$= 7.43\ ms^{-1}$$

$$= 26.75\ kmh^{-1}$$

এখানে,
$r = \frac{d}{2} = \frac{300}{2} = 150\ m$
$g = 9.8\ ms^{-2}$
$\theta = 2.15°$

এই বেগ নির্দেশিত বেগের গতিসীমার চেয়ে অনেক কম; সুতরাং এটি সঠিক নয়।

৮। নয়ন 25 g ভরের একটি পাথর খণ্ডকে 1 m দীর্ঘ একটি সুতার সাহায্যে বৃত্তাকার পথে ঘুরাচ্ছে। পাথর খণ্ডটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার ঘুরছে। পাথরের ঘূর্ণন সংখ্যা একই রেখে সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হলো। সুতা সর্বাধিক 40 N বল সহ্য করতে পারে।

(ক) প্রথম ক্ষেত্রে পাথরটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) নয়ন সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করে ঘূর্ণন সফলভাবে সম্পন্ন করতে পারবে কি না—গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

[দি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$$L = mvr = mr^2\omega$$

$$= mr^2 \times \frac{2\pi N}{t} \qquad \left[\because \omega = \frac{2\pi N}{t}\right]$$

$$= \frac{25 \times 10^{-3} \times (1)^2 \times 2 \times 3.14 \times 5}{1}$$

$$= 0.78\ kgm^2s^{-1}$$

এখানে,
সুতার দৈর্ঘ্য, $r = 1\ m$
পাথর খণ্ডের ভর, $m = 25\ g = 25 \times 10^{-3}\ kg$
সময়, $t = 1\ sec$
ঘূর্ণন সংখ্যা, $N = 5$
কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

(খ) সুতার পরিবর্তিত দৈর্ঘ্য তথা পরিবর্তিত ব্যাসার্ধ,

$$r = 2 \times 1 = 2\ m$$

সুতার সর্বাধিক সহনশীল বল, $F = 40\ N$

$\therefore$ কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2 \times 3.14 \times 5}{1} = 31.416\ rads^{-1}$

$\therefore$ কেন্দ্রমুখী বল, $F' = m\omega^2 r = 25 \times 10^{-3} \times (31.4)^2 \times 2 = 49.3\ N$

$\therefore$ কেন্দ্রমুখী বল বা সুতার টান F′ সুতার সর্বাধিক সহনশীল বল F অপেক্ষা বড়। সুতরাং নয়ন সুতার দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করে সফলভাবে ঘূর্ণন সম্পন্ন করতে পারবে না। কারণ সুতার টান বেশি হওয়ায় সুতাটি ছিঁড়ে যাবে।

৯। মিটারগেজ ও ব্রডগেজ রেল লাইনের দুটি পাতের মধ্যবর্তী দূরত্ব যথাক্রমে 0·8 m ও 1·3 m। যে স্থানে বাঁকের ব্যাসার্ধ 500 m, ওই স্থানে লাইনগুলোর মধ্যে উচ্চতার পার্থক্য যথাক্রমে 7 cm এবং 11·37 cm।

(ক) ১ম লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ কত ?

(খ) কোন লাইনে রেলগাড়ি অধিক দ্রুততার সাথে বাঁক নিতে পারবে—গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মন্তব্য কর।

[চ. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); সি. বো. ২০২১, ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$\tan\theta_1 = \frac{h}{l} = \frac{0{\cdot}07}{0{\cdot}8} = 0{\cdot}0875$$

$\therefore\quad \theta_1 = \tan^{-1}(0{\cdot}0875) = 5°$

$\therefore$ ১ম লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ $= 5°$

এখানে,
উচ্চতা, $h = 7\text{ cm} = 0{\cdot}07\text{ m}$
মিটার গেজের দুটি লাইনের মধ্যবর্তী দূরত্ব,
$l = 0{\cdot}8\text{ m}$
ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta_1 = ?$

(খ) ২য় লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ,

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{h'}{l'}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{0{\cdot}1137}{1{\cdot}3}\right) = 5°$$

আবার ১ম লাইনে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ v_1 এবং ২য় লাইনে গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ v_2 হলে,

$$\tan\theta_1 = \frac{v_1^2}{rg} \text{ এবং } \tan\theta_2 = \frac{v_2^2}{rg}$$

$$\therefore\quad \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

এখানে,
বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r = 500$ m
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$
১ম লাইনের ব্যাংকিং কোণ, $\theta_1 = 5°$
২য় লাইনের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $l' = 1{\cdot}3\text{ m}$
ব্রডগেজ দুটির উচ্চতার পার্থক্য,
$h' = 11{\cdot}37\text{ cm} = 0{\cdot}1137\text{ m}$
২য় লাইনের ব্যাঙ্কিং কোণ, $\theta_2 = ?$

যেহেতু $\theta_1 = \theta_2$ সেহেতু $v_1 = v_2$। অর্থাৎ দুটি লাইনে রেলগাড়ি সমান দ্রুততার সাথে বাঁক নিতে পারবে।

১০। একটি রাস্তা 115m ব্যাসার্ধে বাঁক নিয়েছে। ওই স্থানে রাস্তাটি 5m চওড়া এবং ভেতরের কিনারা হতে বাইরের কিনারা 0·4m উঁচু। রাস্তার ঘর্ষণ সহগ 0·2 এবং ওই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$।

(ক) রাস্তার ব্যাংকিং কোণ নির্ণয় কর।

(খ) যদি ওই বাঁকে ব্যাংকিং না থাকে তবে সর্বোচ্চ কত বেগে ওই স্থানে নিরাপদে বাঁক নেওয়া সম্ভব? গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [কু. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি ব্যাংকিং কোণ,

$$\sin\theta = \frac{h}{d}$$

$$\therefore\quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{0{\cdot}4}{5}\right) = 4{\cdot}6°$$

এখানে,
$h = 0{\cdot}4\text{ m}$
$d = 5\text{m}$

(খ) গাড়িটি নিরাপদে বাঁক নেওয়ার শর্ত হলো,

$$v \le \sqrt{\mu r g}$$

$$\therefore\quad v \le \sqrt{0{\cdot}2 \times 115 \times 9{\cdot}8} \le 15\text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
$\mu = 0{\cdot}2$
$r = 115\text{ m}$
$g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$

বেগ 15 ms^{-1} এর অধিক না হলে নিরাপদে বাঁক নিতে পারবে।

১১। 60 kg ভরের একজন নৃত্যশিল্পী দুহাত প্রসারিত করে মিনিটে 20 বার ঘুরতে পারেন। তিনি একটি সংগীত এর তালে তাল মেলানোর চেষ্টা করেন।

(ক) নৃত্যশিল্পীকে সংগীত এর সাথে ঐক্যতানিক হতে মিনিটে 30 বার ঘুরালে জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের তুলনা কর।

(খ) উদ্দীপকের নৃত্যশিল্পীর পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি দ্বিগুণ হবে কী ? বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

[ব. বো. ২০১৭]

(ক) ধরা যাক,

প্রথম ক্ষেত্রে নৃত্যশিল্পীর জড়তার ভ্রামক I_1 এবং কৌণিক বেগ ω_1 এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক I_2 এবং কৌণিক বেগ ω_2

$$\therefore \quad \omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi \times 20}{60} = \frac{2}{3}\,\pi \text{ rads}^{-1}$$

$$\text{এবং} \quad \omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi \times 30}{60} = \pi \text{ rads}^{-1}$$

এখানে,
প্রথম ক্ষেত্রে,
প্রতি মিনিটে নৃত্যশিল্পীর ঘূর্ণন সংখ্যা,
$n_1 = 20$
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,
প্রতি মিনিটে নৃত্যশিল্পীর ঘূর্ণন সংখ্যা,
$n_2 = 30$
$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

আবার কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার সূত্রানুসারে,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\therefore \quad I_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \times I_1 = \frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi} \times I_1 = \frac{2}{3} I_1$$

সুতরাং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক প্রথম ক্ষেত্রের $\frac{2}{3}$ গুণ হবে।

(খ) ১ম ক্ষেত্রে কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega_1 = \frac{2}{3}\pi \text{ rads}^{-1}$

১ম ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক, I_1

পরিবর্তিত জড়তার ভ্রামক, $I_2 = \frac{2}{3} I_1$

সুতরাং ১ম ক্ষেত্রে কৌণিক গতিশক্তি, $E_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$

এবং পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি, $E_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$

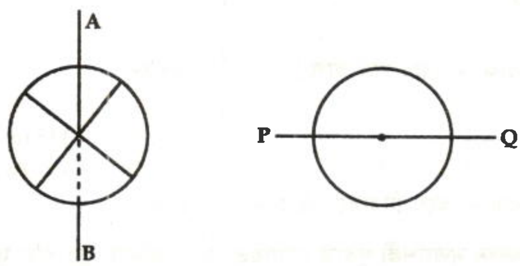
$$\therefore \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2} I_2 \omega_2^2}{\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} I_1 \times \pi^2}{\frac{1}{2} \times I_1 \times \left(\frac{2}{3}\pi\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} I_1 \pi^2}{\frac{2}{9} I_1 \pi^2} = \frac{9}{6} = 1{\cdot}5$$

$$\therefore \quad E_2 = 1{\cdot}5 \times E_1 = 1{\cdot}5\, E_1$$

অতএব নৃত্যশিল্পীর পরিবর্তিত কৌণিক গতিশক্তি দ্বিগুণ হবে না বরং 1·5 গুণ হবে।

১২। নিচের চিত্র ১-এ একটি বৃত্তাকার চাকতির কেন্দ্র দিয়ে পাতের অভিলম্বভাবে AB-অক্ষ দণ্ডটি এবং চিত্র ২-এ চাকতির পাতের সমতলে ব্যাসের মধ্য দিয়ে PQ-অক্ষ দণ্ডটি আছে। প্রতিটি পাতের ভর $m = 2$ kg এবং ব্যাসার্ধ $r = 1$m।



চিত্র ১ চিত্র ২

(ক) AB-অক্ষের সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামকের মান বের কর।

(খ) পাত দুটিতে সমপরিমাণ টর্ক প্রয়োগ করলে এদের মধ্যে একই ঘূর্ণন সৃষ্টি হবে কী? গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। [ব. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি, ভরকেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে বৃত্তাকার চাকতির জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \times 2 \times 1^2 = 1\ \text{kgm}^2$$

এখানে,
$m = 2\,\text{kg}$
$r = 1\,\text{m}$

(খ) আবার, $\tau = I\alpha$

১ম চিত্রের জন্য $I_1 = \frac{1}{2}mr^2$ এবং ২য় চিত্রের জন্য $I_2 = \frac{1}{4}mr^2$ ($\because$ ব্যাস সাপেক্ষে)

$$\therefore \quad I_2 = \frac{1}{4}mr^2 = \frac{1}{4} \times 2 \times 1^2$$
$$= 0{\cdot}5\ \text{kgm}^2$$

এখন, $\tau_1 = I_1\alpha_1$ এবং $\tau_2 = I_2\alpha_2$

প্রশ্নানুসারে, $\tau_1 = \tau_2$

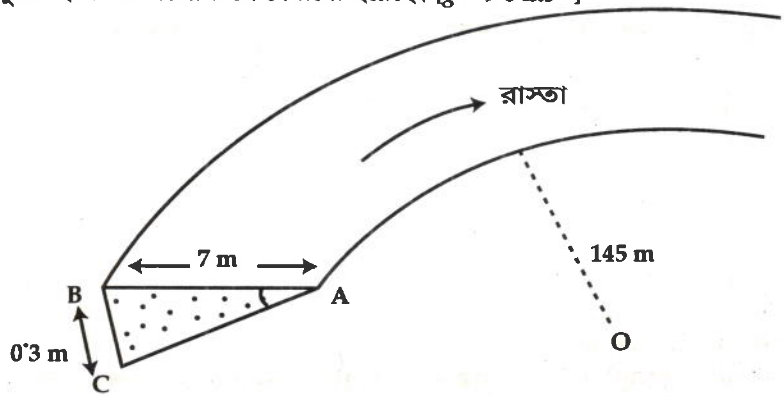
$\therefore \quad I_1\alpha_1 = I_2\alpha_2$

বা, $I\alpha_1 = 0{\cdot}5\alpha_2$

বা, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{0{\cdot}5}{1} = 0{\cdot}5$

এখানে α = কৌণিক ত্বরণ। যেহেতু চিত্রদ্বয়ে ত্বরণ ভিন্নতর, সুতরাং এদের মধ্যে একই ঘূর্ণন সৃষ্টি হবে না।

১৩। 1000 kg ভরের একটি বাস 78125J গতিশক্তি নিয়ে রাস্তায় চলার সময় হঠাৎ 145m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বাঁকের সম্মুখীন হলো যা নিচের চিত্রে দেখানো হয়েছে। [$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$]



(ক) বাসটির ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) বাসটি উদ্দীপকে প্রদর্শিত রাস্তার বাঁকটি নিরাপদে অতিক্রম করতে পারবে কী? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); দি. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 78125\ \text{J}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \times 1000 \times v^2 = 78125$$

বা, $v^2 = \frac{78125}{500}$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{78125}{500}} = 12{\cdot}5\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,
$m = 1000\ \text{kg}$
$E_k = 78125\ \text{J}$

সুতরাং বাসটির ভরবেগ $P = mv = 1000 \times 12{\cdot}5 = 12500\ \text{kgms}^{-1}$

(খ) বাসটির নিরাপদে চলার শর্ত হলো এর বেগ হতে হবে,

$$v \leq \sqrt{\frac{hrg}{x}}$$

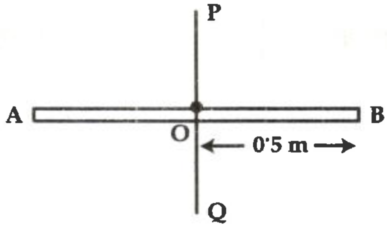
$$\therefore \quad v \leq \sqrt{\frac{0.3 \times 145 \times 9.8}{7}}$$

এখানে,
$h = 0.3\,m$
$r = 145\,m$
$x = 7\,m$
$g = 9.8\,ms^{-2}$

$\leq 7.8\,ms^{-1}$, বলটি নিরাপদে চলতে হলে এর বেগ $7.8\,ms^{-1}$ এর সমান বা কম হতে হবে।

যেহেতু বাসটি $12.5\,ms^{-1}$ বেগে চলছে, সুতরাং এটি নিরাপদে বাঁক অতিক্রম করতে পারবে না।

১৪।



ওপরের চিত্রের সরু ও সুষম দণ্ডের দৈর্ঘ্য AB = 1m এবং ভর 2 kg। দণ্ডটি তার দৈর্ঘ্যের সাথে লম্বভাবে গমনকারী PQ অক্ষের সাপেক্ষে সুষম কৌণিক বেগে ঘূর্ণায়মান।

(ক) উদ্দীপকের দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের দণ্ডটির ঘূর্ণন অক্ষ মধ্যবিন্দু O থেকে প্রান্ত বিন্দু A-তে স্থানান্তর হলে চক্রগতির ব্যাসার্ধের কীরূপ পরিবর্তন হবে? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০২২]

(ক) আমরা জানি, মধ্যবিন্দুগামী অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান দণ্ডের জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12} \times 2 \times 1^2 = \frac{1}{6} = 0.167\,kgm^2$$

এখানে,
$m = 2\,kg$
$l = 1\,m$

(খ) মধ্যবিন্দুগামী লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $k_1 = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ এবং প্রান্তবিন্দুগামী লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $k_2 = \frac{l}{\sqrt{3}}$

এখানে, $k_1 = \frac{l}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2 \times 1.73} = \frac{1}{3.464} = 0.2887\,m$

এবং $k_2 = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1.73} = 0.578\,m$

সুতরাং, $\frac{k_2}{k_1} = \frac{0.578}{0.2887} = 2$

অর্থাৎ, চক্রগতির ব্যাসার্ধ দ্বিগুণ হবে।

১৫। 5 kg ও 7 kg ভরের দুটি বস্তু যথাক্রমে $5\,ms^{-1}$ এবং $6\,ms^{-1}$ বেগে পরস্পর বিপরীত দিক হতে এসে সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয় একত্রে মিলিত হয়ে নির্দিষ্ট দিকে চলতে শুরু করে।

(ক) উদ্দীপকের বস্তুদ্বয়ের চূড়ান্ত বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের বস্তুদ্বয়ের সংঘর্ষ স্থিতিস্থাপক না অস্থিতিস্থাপক—গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।

[সি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০১৯]

(ক) ধরা যাক, সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয় একত্রে মিলিত হয়ে v বেগে চলতে শুরু করলো।

আমরা জানি,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\,v$$

$$\text{বা,} \quad v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \quad v = \frac{5 \times 5 + 7 \times 6}{5 + 7} = \frac{25 + 42}{12} = \frac{67}{12}$$

$$= 5.58\,ms^{-1}$$

এখানে,
$m_1 = 5\,kg$
$m_2 = 7\,kg$
$u_1 = 5\,ms^{-1}$
$u_2 = 6\,ms^{-1}$
$v = ?$

(খ) আমরা জানি, স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে ভরবেগ ও গতিশক্তি উভয়ই সংরক্ষিত থাকে, কিন্তু অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে না।

এখন সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি,

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}\times 5\times(5)^2+\frac{1}{2}\times 7\times(6)^2$$
$$=\frac{1}{2}\times 5\times 25+\frac{1}{2}\times 7\times 36$$
$$=\frac{125+252}{2}=188{\cdot}5\ \text{J}$$

সংঘর্ষের পরে বস্তুদ্বয়ের একত্রে গতিশক্তি,

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \frac{1}{2}\times(5+7)\times(5{\cdot}58)^2$$
$$=\frac{1}{2}\times 12\times 31{\cdot}14=186{\cdot}8\ \text{J}$$

এক্ষেত্রে সংঘর্ষের পূর্বে এবং পরে গতিশক্তি সংরক্ষিত হয়নি। সুতরাং সংঘর্ষটি অস্থিতিস্থাপক।

১৬। 1 m এবং 0·707 m দৈর্ঘ্যের দুটি সরু সুষম দণ্ডের ভরদ্বয় যথাক্রমে 10 kg এবং 20 kg। এদের উভয়ই দৈর্ঘ্যের সাথে লম্বভাবে স্থাপিত এবং মধ্যবিন্দুগামী অক্ষের সাপেক্ষে প্রতি মিনিটে যথাক্রমে 300 বার এবং 360 বার একটি মোটরের সাহায্যে সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। মোটরটি বন্ধ হয়ে গেলে ১ম দণ্ডটি 20 s সময়ের মধ্যে থেমে যায়।

(ক) মোটরটি বন্ধ হয়ে যাবার পর ১ম দণ্ডটি কতটি পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করবে ?

(খ) ঘূর্ণনরত দণ্ডদ্বয়ের কৌণিক গতিশক্তির গাণিতিক তুলনা কর। [য. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি,

$$\theta = \left(\frac{\omega_0+\omega}{2}\right)\times t$$
$$=\left(\frac{10\pi+0}{2}\right)\times 20$$
$$=100\pi\ \text{rad}$$

∴ ঘূর্ণন সংখ্যা n হলে,

$$\theta = 2\pi n$$

বা, $n=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{100\pi}{2\pi}=50$

সুতরাং, ১ম দণ্ডটি থেমে যাবার পূর্বে 50টি পূর্ণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করবে।

এখানে,
$N = 300\ \text{min}$
$\omega_0 = \dfrac{2\pi N}{t}$
$\therefore\ \omega_0 = \dfrac{300\times 2\pi}{60}=10\pi\ \text{rad s}^{-1}$
$\omega = 0\ \text{rads}^{-1}$
$t = 20\ \text{s}$
$d = 1\ \text{m}$
$M_1 = 10\ \text{kg}$
$\theta = ?$

(খ) আমরা জানি,

$E_1=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2$ এবং ভর কেন্দ্রগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক, $I_1=\frac{1}{12}M_1l_1^2$

$$\therefore\ I_1=\frac{M_1l_1^2}{12}=\frac{10\times 1}{12}=\frac{10}{12}\ \text{kgm}^{-2}$$
$$\therefore\ E_1=\frac{1}{2}\times\frac{10}{12}\times(10\pi)^2=411{\cdot}25\ \text{J}$$

এখানে,
$M_1 = 10\ \text{kg}$
$l_1 = 1\ \text{m}$
$\omega_1 = 10\pi\ \text{rads}^{-1}$

আবার আমরা জানি,

$E_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2$ এবং $I_2=\frac{M_2l_2}{12}$

$$\therefore\ I_2=\frac{M_2\times l_2^2}{12}=\frac{20\times(0{\cdot}707)^2}{12}=0{\cdot}833\ \text{kgm}^2$$

এবং $E_2=\frac{1}{2}\times 0{\cdot}833\times(12\pi)^2=592\ \text{J}$

এখানে,
$M_2 = 20\ \text{kg}$
$l_2 = 0{\cdot}707\ \text{m}$
$\omega_2 = \dfrac{360\times 2\pi}{60}=12\pi\ \text{rads}^{-1}$

∴ $E_2 > E_1$, অর্থাৎ দ্বিতীয় দণ্ডের কৌণিক গতিশক্তি বেশি।

১৭। রহিম 80 cm দৈর্ঘ্যের একখণ্ড সুতার এক প্রান্তে 200 g ভরের একটি বস্তু বেঁধে বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 90 বার ঘুরাচ্ছে। অপরদিকে করিম 60 cm দৈর্ঘ্যের অপর একখণ্ড সুতার এক প্রান্তে 150 g ভরের একটি বস্তু বেঁধে একইভাবে প্রতি মিনিটে 120 বার ঘুরাচ্ছে।

(ক) রহিমের দ্বারা ঘুরানো বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের ঘটনায় রহিম ও করিম সুতার সমান টান পেয়েছিল কি ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[চ. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$$L = mvr = m(\omega r)\times r = m\omega r^2$$
$$= m\times\frac{2\pi N_1}{t}\times r^2$$
$$= \frac{0{\cdot}2\times 2\times\pi\times 90\times(0{\cdot}8)^2}{60}$$
$$= 1{\cdot}206\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,
$r = 80\ \text{cm} = 0{\cdot}8\ \text{m}$
$m = 200\ \text{gm} = 0{\cdot}2\ \text{kg}$
$N_1 = 90$
$t = 60\ \text{sec}$
$L = ?$

(খ) রহিমের ক্ষেত্রে সুতার টান,

$$F_1 = \text{কেন্দ্রমুখী বল} = m_1\omega_1{}^2 r_1$$
$$= m_1\left(\frac{2\pi N_1}{t}\right)^2\times r_1$$
$$= 0{\cdot}2\times\left(\frac{2\pi\times 90}{60}\right)^2\times 0{\cdot}8$$
$$= 14{\cdot}20\ \text{N}$$

এখানে,
$m_1 = 200\ \text{gm} = 0{\cdot}2\ \text{kg}$
$r_1 = 80\ \text{cm} = 0{\cdot}8\ \text{m}$
$t = 60\ \text{sec}$
$F_1 = ?$

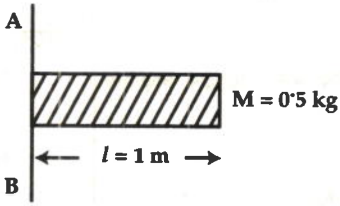
করিমের ক্ষেত্রে সুতার টান,

$$F_2 = m_2\left(\frac{2\pi N_2}{t_2}\right)\times r_2$$
$$= 0{\cdot}15\times\left(\frac{2\pi\times 120}{60}\right)^2\times 0{\cdot}6$$
$$= 14{\cdot}20\ \text{N}$$

এখানে,
$r_2 = 60\ \text{cm} = 0{\cdot}6\ \text{m}$
$N_2 = 120$
$F_2 = ?$

$\therefore$ $F_1 = F_2$ হওয়ায় উদ্দীপকের ঘটনায় রহিম ও করিমের সুতার সমান টান পেয়েছিল।

১৮। একটি আয়তাকার দণ্ড যার দৈর্ঘ্য $l = 1$ m ও ভর $m = 0{\cdot}5$ kg।



(ক) দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।

(খ) যদি দণ্ডটিকে 1m ব্যাসের পাতলা চাকতিতে পরিণত করা হয় তবে জড়তার ভ্রামকের কোনো পরিবর্তন হবে কী ? গাণিতিক বিশ্লেষণ কর। **[ঢা. বো. ২০২১]**

(ক) দণ্ডটি প্রান্তগামী এবং অক্ষ লম্ব। আমরা জানি,
প্রান্তগামী লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$
$$\therefore\ I = \frac{1}{3}\times 0{\cdot}5\times 1^2$$
$$= 0{\cdot}167\ \text{kgm}^2$$

এখানে,
$m = 0{\cdot}5$ kg
$l = 1$ m

(খ) বৃত্তাকার চাকতির ব্যাস সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{1}{4}mr^2 = \frac{1}{4}m \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{d^2}{4} \times m \;\; \frac{1}{16}md^2 = \frac{1}{16} \times 0.5 \times 1^2$$

$$= 0.031 \text{ kgm}^2$$

এখানে,
$m = 0.5$ kg
$d = 1$ m
$r = \frac{d}{2}$

অর্থাৎ ব্যাস সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক কম হবে।

১৯। 4 m প্রস্থবিশিষ্ট একটি রাস্তার একটি স্থানের বাঁকের ব্যাসার্ধ 100 m এবং রাস্তার উভয় পাশের উচ্চতার পার্থক্য 0.5m। বাঁক অতিক্রমের পূর্বে একটি গাড়ি 60 kmh^{-1} বেগে চলছিল।

(ক) বাঁকের স্থানে রাস্তার ব্যাংকিং কোণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী গাড়িটি উক্ত বেগে নিরাপদে চলতে পারবে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০২১; রা. বো. ২০১৭ (মান ভিন্ন); সি. বো. ২০১৬ (মান ভিন্ন)]

(ক) আমরা জানি ব্যাংকিং কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{60 \times 1000}{3600}\right)^2}{100 \times 9.8}\right\}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{277.78}{980}\right)$$

$$= \tan^{-1}(0.28) = 15.7°$$

এখানে,
$v = 60 \text{ kmh}^{-1} = \frac{60 \times 1000}{3600} \text{ ms}^{-1} = 16.67 \text{ ms}^{-1}$
$r = 100$ m
$h = 0.5$ m

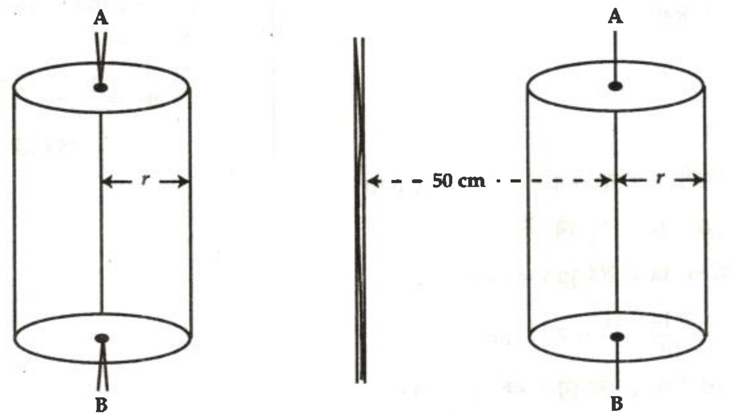
(খ) আবার, $\frac{h}{x} = \sin\theta = \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$$\therefore \frac{v^2}{rg} = \frac{h}{x} \quad \text{বা, } v = \sqrt{\frac{hrg}{x}}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{0.5 \times 100 \times 9.8}{4}} = 11.07 \text{ ms}^{-1}$$

সর্বোচ্চ 11.07 ms^{-1} বেগে বাঁক নিলে নিরাপদে গাড়িটি পার হতে পারবে; কিন্তু গাড়ির বেগ যেহেতু 16.67 ms^{-1}, সুতরাং এটি নিরাপদে চলতে পারবে না।

২০।



ঘূর্ণন অক্ষ ঘূর্ণন অক্ষ ভারকেন্দ্রগামী অক্ষ

চিত্র ১ চিত্র ২

চিত্রে সিলিন্ডার আকৃতির দণ্ডের ভর 5 kg এবং ব্যাসার্ধ 10 cm। উভয় চিত্রের দণ্ড ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে 1 rads^{-1} বেগে ঘুরছে।

(ক) চিত্র ১-এর দণ্ডের কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের কোন দণ্ডটি থামাতে অধিক বাধার সম্মুখীন হতে হবে? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

[চ. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$L = mr^2\omega$

$\therefore L = 5 \times (0{\cdot}1)^2 \times 1$

$= 0{\cdot}05\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$

এখানে,

$m = 5\ \text{kg}$

$r = 10\ \text{cm} = 0{\cdot}1\text{m}$

$\omega = 1\ \text{rads}^{-1}$

(খ) টর্ক, $\tau = I\alpha$; আবার, $I = \frac{1}{2}mr^2$

১ম দণ্ডের জন্য টর্ক, $\tau_1 = \frac{1}{2}mr_1^2 \times \alpha$

এবং ২য় দণ্ডের জন্য $\tau_2 = \frac{1}{2}mr_2^2 \times \alpha$

$\therefore \frac{\tau_2}{\tau_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{0{\cdot}5}{0{\cdot}1}\right)^2 = 25$

$\therefore \tau_2 = 25\tau_1$

২য় দণ্ডটি থামাতে বেশি বাধার সম্মুখীন হবে।

২১। একজন ব্যক্তি 300 গ্রাম ভরের একটি বস্তুকে 70 cm দৈর্ঘ্যের একটি রশির এক প্রান্তে বেঁধে অনুভূমিক তলে বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 60 বার ঘুরাচ্ছেন। হঠাৎ বস্তুটির এক-তৃতীয়াংশ খুলে পড়ে গেলে তিনি তাৎক্ষণিকভাবে রশির দৈর্ঘ্য 10 cm কমিয়ে এবং প্রতি মিনিটে ঘূর্ণন সংখ্যা 10 বার বৃদ্ধি করে বস্তুর অবশিষ্টাংশকে ঘুরাতে থাকেন।

(ক) প্রাথমিক অবস্থায় বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

(খ) পরিবর্তিত অবস্থায় রশির ওপর প্রযুক্ত টানের কীরূপ পরিবর্তন করতে হবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[দি. বো. ২০২২]

(ক) আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$L = mr^2\omega$

বা, $L = 0{\cdot}3 \times (0{\cdot}7)^2 \times 6{\cdot}28$

$= 0{\cdot}92\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$

এখানে,

$m = 300\ \text{gm} = 0{\cdot}3\ \text{kg}$

$r = 70\ \text{cm} = 0{\cdot}7\ \text{m}$

$t = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$

$N = 60$

$\therefore \omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 60}{60}$

$= 6{\cdot}28\ \text{rads}^{-1}$

(খ) পরিবর্তিত দৈর্ঘ্য, $r' = 70 - 10 = 60\ \text{cm} = 0{\cdot}6\ \text{m}$

ঘূর্ণন সংখ্যা = 60 + 10 = 70/মিনিট

ভর $= m' = 300 - 100 = 200\ \text{gm} = 0{\cdot}2\ \text{kg}$

$\omega' = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 70}{60} = 7{\cdot}33\ \text{rads}^{-1}$

রশির ওপর প্রযুক্ত টান বা কেন্দ্রমুখী বল, $F = m'\omega'^2 r'$

$\therefore F = 0{\cdot}2 \times (7{\cdot}33)^2 \times 0{\cdot}6 = 6{\cdot}45\ \text{N}$

প্রাথমিক টান, $F' = m\omega^2 r = 0{\cdot}3 \times (6{\cdot}28)^2 \times 0{\cdot}7 = 8{\cdot}28\ \text{N}$

সুতরাং, পরিবর্তিত অবস্থায় রশির টান $8{\cdot}28\ \text{N} - 6{\cdot}45\ \text{N} = 1{\cdot}83\ \text{N}$ বাড়াতে হবে।

২২। একটি বৈদ্যুতিক পাখার জড়তার ভ্রামক 100 kgm^{-2}। পাখাটি প্রতি মিনিটে 900 বার ঘোরে। পাখাটির সুইচ বন্ধ করার পরে 2 মিনিট পর পাখাটি থামে।

(গ) উদ্দীপকের বর্ণিত পাখায় প্রয়োগকৃত টর্ক নির্ণয় কর।

(ঘ) থেমে যাওয়ার পূর্বে পাখাটির পক্ষে 1000 বার ঘোরা সম্ভব কি? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ তোমার মতামত দাও। [সি. বো. ২০২৪]

(ক) কৌণিক ত্বরণ α হলে,

$$\omega = \omega_0 - \alpha t$$

$$\therefore \alpha = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{30\pi - 0}{120}$$

$$\therefore \alpha = 0{\cdot}785 \text{ rads}^{-2}$$

$\therefore$ টর্ক, $\tau = I\alpha = 100 \times 0{\cdot}785$

$$\therefore \tau = 78{\cdot}5 \text{ Nm}$$

এখানে,

জড়তার ভ্রামক, $I = 100 \text{ kgm}^{-2}$

ঘূর্ণন সংখ্যা, $n = \frac{900}{60} = 15 \text{ rads}^{-1}$

আদি কৌণিক বেগ,

$\omega_0 = 2\pi n = 2\pi \times 15 = 30\pi$

শেষ কৌণিক বেগ, $\omega = 0$

$t = 2 \text{ min} = 2 \times 60 = 120 \text{ s}$

টর্ক, $\tau = ?$

(খ) সুইচ বন্ধ করার পর কৌণিক সরণ θ হলে,

$$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = 2\pi n t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$2\pi N = \frac{900 \times 2\pi}{60} \times 120 - \frac{1}{2} \times \frac{900 \times 2\pi}{60 \times 120} \times (120)^2$$

$$\therefore 2\pi N = 1800\pi$$

$N = 900$ বার

এখানে,

$$\omega_0 = \frac{2\pi \times 900}{60} \text{ rad s}^{-1}$$

এখানে, N = ঘূর্ণন সংখ্যা = ?

$$\alpha = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi \times 900}{60 \times 120}$$

$\therefore$ থেমে যাওয়ার পূর্বে পাখাটি প্রায় 900 বার ঘুরবে। তাই 1000 বার ঘুরা সম্ভব না।

২৩। 5000 kg ভরের একটি বালুভর্তি ট্রাক ঘণ্টায় 72 km বেগে চলছে। ট্রাক হতে প্রতি সেকেন্ডে 200 gm বালু ছিদ্র পথে পড়ে যাচ্ছে। ব্রেক চেপে 20 min পরে ট্রাকটিকে 20 m দূরত্বে থামানো হলো।

(ক) যাত্রা শুরুর 15 min পরে ট্রাকের বেগের মান বের কর।

(খ) ট্রাকটিকে থামানোর জন্য প্রয়োজনীয় বলের মান হিসাব করা সম্ভব—বিশ্লেষণ করে দেখাও।

[চ. বো. ২০২৩]

(ক) যেহেতু প্রতি সেকেন্ডে 200 gm = 0·2 kg বালি পড়ে। কাজেই 15 min-এ পড়ে যাওয়া বালির পরিমাণ

$$m = 900 \times 0{\cdot}2 = 180 \text{ kg}$$

$\therefore$ 15 min পর ট্রাকের ভর,

$$m' = M - m$$
$$= (5000 - 180) \text{ mg} = 4820 \text{ kg}$$

এখানে,

$t = 15 \text{ min} = (15 \times 60) = 900\text{s}$

$v = 72 \text{ km/h} = \frac{72 \times 1000}{60 \times 60} = 20 \text{ ms}^{-1}$

15 min পর ট্রাকের বেগ v' হলে, ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার সূত্রানুযায়ী,

$$Mv = m'v'$$

$$v' = \frac{Mv}{m'} = \frac{5000 \times 20}{4820} = 20{\cdot}75 \text{ ms}^{-1}$$

(খ) 20 মিনিট ধরে বালি পড়ে গেলে পড়ে যাওয়া বালির পরিমাণ,

$$m' = 1200 \times 0{\cdot}2$$
$$= 240 \text{ kg}$$

$\therefore$ 20 min পর ট্রাকের ভর,

$$m = M - m' = 5000 - 240 = 4760 \text{ kg}$$

'ক' থেকে পাই ট্রাকের আদিবেগ $u = 20 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,

$t = 20 \text{ min}$

$= 20 \times 60 = 1200 \text{ s}$

প্রতি সেকেন্ডে বালি পড়ার হার

$= 200 \text{ gm} = 0{\cdot}2 \text{ kg}$

ভরবেগের সংরক্ষণশীলতার সূত্রানুযায়ী,

$$mv_1 = Mu$$

$$v_1 = \frac{Mu}{m} = \frac{5000 \times 20}{4760} = 21\cdot0084 \text{ ms}^{-1}$$

ট্রাকটিকে 20 min পরে থামানোর জন্য প্রয়োজনীয় মন্দন হলে,

$$v^2 = v_1^2 - 2as$$

$$0 = (21\cdot01)^2 - 2a \times 20$$

$$\therefore\ a = \frac{(21\cdot01)^2}{2 \times 20} = 11\cdot04 \text{ ms}^{-2}$$

$s = 20$ m

∴ ট্রাকটি থামানোর জন্য প্রয়োজনীয় বল,

$$F = ma = 4760 \times 11\cdot04 = 52529 \text{ N}$$

২৪। 2 kg এবং 3 kg ভরের দুটি বস্তু যথাক্রমে $8\cdot8$ ms^{-1} এবং $1\cdot2$ ms^{-1} বেগে বিপরীত দিক হতে এসে সংঘর্ষের পর বস্তু দুটি একত্রে মিলিত হয়ে নির্দিষ্ট দিকে চলতে লাগল।

(ক) সংযুক্ত বস্তু দুটির চূড়ান্ত বেগ কত?

(খ) উক্ত সংঘর্ষ স্থিতিস্থাপক না অস্থিতিস্থাপক—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও।

[সি. বো. ২০২৩]

(ক) ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী,

$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)\,v$$

বা, $2 \times 8\cdot8 + 3 \times (-1\cdot2) = (2 + 3)\,v$

$\therefore\ 14 = 5v$

$v = 2\cdot8 \text{ ms}^{-1}$

(খ) সংঘর্ষের পূর্বে বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি,

$$E_{K_1} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (8\cdot8)^2 + \frac{1}{2} \times 3 \times (-1\cdot2)^2$$

$$= 79\cdot6 \text{ J}$$

সংঘর্ষের পর মিলিত বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি,

$$E_{K_2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 3) \times (2\cdot8)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times (2\cdot8)^2 = 19\cdot6 \text{ J}$$

দেখা যাচ্ছে $E_{K_1} \neq E_{K_2}$, অর্থাৎ উক্ত সংঘর্ষে গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে না, তাই বলা যায় সংঘর্ষটি অস্থিতিস্থাপক।

২৫। 3 ms^{-1} বেগে 2 kg ভরের একটি বস্তু $0\cdot5$ kg ভরের অন্য একটি স্থির বস্তুর সঙ্গে সোজাসুজি স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে লিপ্ত হয়।

(ক) সংঘর্ষের পর স্থির বস্তুর শেষ বেগ কত? নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের গতিশীল বস্তুর ভর স্থির বস্তুর ভরের তুলনায় অনেক বেশি হলে সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয়ের পরিণতি কী হবে? গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

[ব. বো. ২০২৩]

(ক) সংঘর্ষটি স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ। কাজেই সংঘর্ষের পড় স্থির বস্তুর বেগ v_2 হলে,

$$v_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_1}\right)u_2 + \frac{2\,m_1u_1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{0\cdot5 - 2}{2 + 0\cdot5} \times 0 + \frac{2 \times 2 \times 3}{2 + 0\cdot5}$$

$$= 0 + \frac{12}{25} = 4\cdot8 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

১ম বস্তুর ক্ষেত্রে ভর $m_1 = 2$ kg

আদি বেগ $u_1 = 3$ ms^{-1}

২য় বস্তুর ক্ষেত্রে ভর $m_2 = 0\cdot5$ kg

বেগ $u_2 = 0$

(খ) স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে, সংঘর্ষের পর বস্তুদ্বয়ের শেষ বেগ v_1 ও v_2 হলে,

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) u_1 + \frac{2\, m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) u_2 + \frac{2\, m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

উদ্দীপক অনুযায়ী গতিশীল বস্তুর ভর (m_1) স্থির বস্তুর ভরের (m_2) তুলনায় অনেক বেশি হলে, অর্থাৎ $m_1 > m_2$ হলে $m_1 + m_2 \approx m_1$ এবং $m_1 - m_2 \approx m_1$ ও $m_2 - m_1 \approx -m_1$

এখানে,

$$v_1 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right) u_1 + \frac{2m_2 u_2}{m_1}$$

$$v_1 = u_1 + 2 \times \frac{m_2}{m_1} \times 0$$

$$\boxed{v_1 = u_1}$$

এখানে,

$u_1 = 3\,\text{ms}^{-1}$

$u_2 = 0$

আবার,

$$v_2 = \left(-\frac{m_1}{m_1}\right) u_2 + \frac{2m_1 u_1}{m_1}$$

$$v_2 = (-1 \times 0 + 2u_1) = 2u_1$$

$$\boxed{v_2 = 2u_1}$$

সুতরাং বলা যায়, সংঘর্ষের পর গতিশীল ভারী বস্তুটির বেগ প্রায় অপরিবর্তিত থাকে, কিন্তু হালকা বস্তুটি ভারী বস্তুর প্রায় দ্বিগুণ বেগে গতিশীল হয়ে ছুটে যায়।

২৬। বান্দরবানের পাহাড়ি রাস্তার বাঁকে সুমন 200 kg ভরের একটি গাড়ি 60 kmh^{-1} বেগে চালাচ্ছে। রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধ 150 m। ওই স্থানে রাস্তাটি 4m চওড়া এবং ভেতরের কিনারা থেকে বাইরের কিনারা 0·5m উঁচু।

(ক) গাড়িটির কেন্দ্রমুখী বল নির্ণয় কর।

(খ) সুমন রাস্তার বাঁকটিতে নিরাপদে গাড়িটি চালাতে পারবে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে উত্তর দাও।

[ঢা. বো. ২০২৪]

(ক) গাড়িটির কেন্দ্রমুখী বল,

$$F_e = \frac{mv^2}{r} = \frac{200 \times (16{\cdot}667)^2}{150} = 370{\cdot}78\ \text{W}$$

এখানে,

গাড়ির ভর, $m = 200$ kg

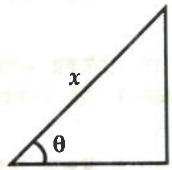
গাড়ির বেগ, $v = 60\ \text{kmh}^{-1} = \frac{60 \times 1000}{60 \times 60}\ \text{ms}^{-1} = 16{\cdot}667\ \text{ms}^{-1}$

(খ) ব্যাংকিং কোণ θ হলে,

$$\sin\theta = \frac{h}{x}$$

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{h}{x}\right)$$

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{0{\cdot}5}{4}\right) = 7{\cdot}18°$$



এখানে,

উচ্চতার পার্থক্য, $h = 0{\cdot}5$ m

রাস্তার প্রস্থ, $x = 4$ m

বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r = 150$ m

ওই রাস্তার বাঁকে গাড়ি নিরাপদে চালানোর জন্য সর্বোচ্চ বেগ v_{max} হলে,

$$\tan\theta = \frac{v^2_{max}}{rg}$$

$$\therefore\ v_{max} = \sqrt{rg\tan\theta} = \sqrt{150 \times 9{\cdot}8 \times \tan 7{\cdot}18°} = 13{\cdot}61\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে, $v > v_{max}$, সুতরাং বলা যায়, সুমন রাস্তার বাঁকটিতে নিরাপদে গাড়িটি চালাতে পারবে না।

২৭। একজন সার্কাসের খেলোয়াড় 60 cm দীর্ঘ সুতার একপ্রান্তে 80 gm ভরের একটি বস্তুকে বেঁধে উল্লম্বতলে প্রতি মিনিটে 120 বার ঘুরাচ্ছেন। পরে তিনি সুতার দৈর্ঘ্য 10% কমিয়ে এবং প্রতি মিনিটে ঘূর্ণন সংখ্যা 5% বৃদ্ধি করে বস্তুটিকে অনুভূমিক তলে ঘুরাতে থাকেন।

(ক) বস্তুটি যখন উল্লম্ব তলের সর্বোচ্চ বিন্দুতে অবস্থান করে তখন সুতার টান নির্ণয় কর।

(খ) উল্লম্বতল ও অনুভূমিকতলে ঘুরানোর সময় বস্তুর কৌণিক ভরবেগ সমান হবে না—গাণিতিভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০২৪]

(ক) উল্লম্ব তলে ঘুরানোর ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ বিন্দুতে সুতার টান T হলে,

$$\Sigma F = F_c$$

বা, $T + mg = m\omega^2 r$

$$T = m\omega^2 r - mg$$
$$= m(\omega^2 r - g)$$
$$= 0{\cdot}08\,[(4\pi)^2 \times 0{\cdot}6 - 9{\cdot}8]$$
$$= 0{\cdot}08\,[16 \times 9{\cdot}87 \times 0{\cdot}6 - 9{\cdot}8]$$
$$T = 6{\cdot}8\text{ N}$$

এখানে,

$m = 80\text{ gm} = 0{\cdot}08\text{ kg}$

$\omega = \dfrac{2\pi N}{t} = \dfrac{2\pi \times 120}{60} = 4\pi$

$r = 60\text{ cm} = 0{\cdot}6\text{ m}$

সুতার টান $T = ?$

(খ) ১ম ক্ষেত্রে, বস্তুকে উল্লম্ব তলে ঘুরানোর ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ,

$$L_1 = I_1\omega_1$$
$$= m{r_1}^2 \times \omega_1$$
$$= 0{\cdot}08 \times (0{\cdot}6)^2 \times 4\pi$$
$$= 0{\cdot}362\text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

এখানে,

$r_1 = 60\text{ cm} = 0{\cdot}6\text{ m}$

$N_1 = 120$

২য় ক্ষেত্রে, বস্তুকে আনুভূমিক তলে ঘুরানোর ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ,

$$L_2 = I_2\omega_2$$
$$= m{r_2}^2 \times \omega_2$$
$$= 0{\cdot}08 \times (0{\cdot}54)^2 \times \frac{2\pi N_2}{t}$$
$$= 0{\cdot}08 \times (0{\cdot}54)^2 \times \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 126}{60}$$
$$= 0{\cdot}307\text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

$\because$ এখানে, $L_1 \neq L_2$

কাজেই উল্লম্ব তলে আনুভূমিক তলে ঘুরানোর সময় বস্তুর কৌণিক ভরবেগ সমান হবে না।

এখানে,

প্রতি মিনিটে ঘূর্ণন সংখ্যা 5% বৃদ্ধি হলে,

$N_2 = N_1 + N_1 \times 5\% = 1{\cdot}05\,N_1 = 1{\cdot}05 \times 120 = 126$

$\therefore \omega_2 = \dfrac{2\pi N_2}{t}$

ভর, $m = 0{\cdot}08\text{ kg}$

সুতার দৈর্ঘ্য 10% কমানো হলে,

সুতার দৈর্ঘ্য = বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ

$r_2 = r_1 - r_1 \times 10\% = 0{\cdot}9\,r_1 = 0{\cdot}9 \times 0{\cdot}6\text{ m} = 0{\cdot}54\text{ m}$

২৮। একটি রাস্তার প্রস্থ 3·65 m এবং বাঁকের ব্যাসার্ধ 170 m। একটি সর্তকতা বোর্ডে গাড়ির সর্বোচ্চ গতিসীমা 30 kmh^{-1} নির্দেশিত আছে। একজন বাইক চালক উক্ত বাঁকে 60 km.h^{-1} বেগে মোটর বাইক চালাতে ইচ্ছুক। ($g = 9{\cdot}81\text{ ms}^{-2}$)

(ক) রাস্তার ভেতর অপেক্ষা বাহিরের অংশের উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) বাইক চালক তাৎক্ষণিকভাবে কী ব্যবস্থা গ্রহণ করলে নিরাপদ বাঁক অতিক্রম করতে পারবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০২৪]

(ক) $\tan\theta = \dfrac{v^2}{rg}$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left[\frac{(8{\cdot}33)^2}{170 \times 9{\cdot}81}\right]$$
$$\theta = 2{\cdot}383°$$

এখানে,

$r = 170\text{ m}$

$v = 30\text{ kmh}^{-1} = \dfrac{30 \times 1000}{60 \times 60}\text{ ms}^{-1} = 8{\cdot}33\text{ ms}^{-1}$

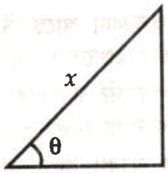
রাস্তার ভিতর অপেক্ষা বাইরের অংশের উচ্চতা h হলে,

$\sin\theta = \frac{h}{x}$

বা, $h = x \sin\theta$

$= 3{\cdot}65 \sin(2{\cdot}383°)$

$\therefore h = 0{\cdot}152$ m



এখানে,

রাস্তার প্রস্থ, $x = 3{\cdot}65$ m

বাঁকের ব্যাসার্ধ, $r = 170$ m

$h = ?$

(খ) মনে করি, বাইক চালক উল্লম্বের সাথে θ_1 কোণে বাঁক নিলে 60 kmh^{-1} বেগে নিরাপদে বাঁক অতিক্রম করতে পারবে।

আমরা জানি,

$\tan\theta_1 = \frac{v^2}{rg}$

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$

$= \tan^{-1}\left[\frac{(16{\cdot}667)^2}{170 \times 9{\cdot}81}\right]$

$\theta_1 = 9{\cdot}46°$

এখানে নিরাপদে বাঁক নিতে হলে ব্যাংকিং কোণের মান, $\theta_1 = 9{\cdot}46°$ হওয়া দরকার, কিন্তু প্রাপ্ত ব্যাংকিং কোণের মান $\theta = 2{\cdot}383°$। কাজেই নিরাপদে বাঁক নিতে হলে আরো $\theta_1 - \theta = 9{\cdot}46° - 2{\cdot}383° = 7{\cdot}077°$ কোণে বাঁকতে হবে।

২১। কোনো চাকার ভর 10 kg এবং ব্যাসার্ধ 0·5 m। চাকার ঘূর্ণন বেগ 500 rpm। চাকাটি ঘূর্ণনরত অবস্থায় 6855 N-m বাধাদানকারী টর্ক প্রয়োগ করা হলো। [য. বো. ২০২৪]

(ক) চাকার ঘূর্ণন গতিশক্তি কত?

(খ) চাকাটি 10 সেকেন্ডে থামবে কি না—যাচাই কর।

(ক) কেন্দ্রগামী অক্ষের সাপেক্ষে চাকার জড়তার ভ্রামক,

$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (0{\cdot}5)^2 = 1{\cdot}25$ kgm^2

$\therefore$ চাকার ঘূর্ণন গতিশক্তি,

$E_K = \frac{1}{2}I\omega^2$

$= \frac{1}{2} \times 1{\cdot}25 \times (52{\cdot}26)^2$

$= 1713{\cdot}81$ J

এখানে,

$m = 10$ kg

$r = 0{\cdot}5$ m

$\omega = 500$ rpm

$= \frac{500 \times 2\pi}{60}$ $rads^{-1}$

$= 52{\cdot}36$ $rads^{-1}$

(খ) আমরা জানি, চাকার মন্দন α হলে,

$\tau = I\alpha$

$\therefore \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{6855}{1{\cdot}25} = 5484$ $rads^{-2}$

চাকাটি থামাতে প্রয়োজনীয় সময় t হলে,

$\omega = \omega_0 - \alpha t$

$0 = \omega_0 - \alpha t$

$\therefore \alpha t = \omega_0$

$t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{52{\cdot}36}{5484}$

$\therefore t = 0{\cdot}0095$ sec

এখানে,

$\tau = 6855$ Nm

$\omega = 0$

যেহেতু 0·009 sec < 10 sec। সুতরাং চাকাটি 10 sec এর আগেই থেমে যাবে।

সার-সংক্ষেপ

জড়তা	:	পদার্থ যে অবস্থায় আছে চিরকাল সেই অবস্থায় থাকতে চাওয়ার প্রবণতা বা সেই অবস্থা বজায় রাখতে চাওয়ার যে ধর্ম তাকে জড়তা বলে।
ভর	:	ভর হচ্ছে পদার্থের জড়তার পরিমাপ। অন্য কথায় কোনো একটি বস্তুর তার বেগের পরিবর্তনকে বাধা দেওয়ার পরিমাপই হচ্ছে ভর।
বল	:	যে বাহ্যিক কারণ স্থির বস্তুকে গতিশীল বা গতিশীল বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাবার চেষ্টা করে তাকে বল বলে।
মৌলিক বল	:	যেসব বল মূল বা অকৃত্রিম অর্থাৎ অন্য কোনো বল থেকে উৎপন্ন হয় না বরং অন্যান্য বলে এসব বলের প্রকাশ ঘটে তাকে মৌলিক বল বলে। মৌলিক বল চার প্রকার; যথা : মহাকর্ষ বল, তড়িৎচুম্বকীয় বল, সবল নিউক্লিয় বল ও দুর্বল নিউক্লিয় বল।
মহাকর্ষ বল	:	মহাবিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুর মধ্যে এক ধরনের আকর্ষণ বল ক্রিয়াশীল রয়েছে। এই আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বল বলে। ইহা খুব দুর্বল ও আকর্ষণধর্মী বল।
তড়িৎচুম্বকীয় বল	:	আপেক্ষিক গতিতে পরিভ্রমণরত দুটি আহিত কণার মধ্যে ক্রিয়াশীল বল হচ্ছে তড়িৎচুম্বকীয় বল।
সবল নিউক্লিয় বল	:	নিউক্লিয়াসে অবস্থিত নিউক্লিয়াসের মধ্যে যে সবল বল কাজ করে যা নিউক্লিয়াসকে ধরে রাখে তাকে সবল নিউক্লিয় বল বলে।
দুর্বল নিউক্লিয় বল	:	তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে যখন বিটা কণা নির্গত হয় তখন এর সাথে শক্তিও নির্গত হয় যা এক ধরনের কণা বহন করে থাকে তাকে নিউট্রিনো বল হয়। এই β-কণা এবং নিউট্রিনো কণার নির্গমন চতুর্থ একটি মৌলিক বলের কারণে ঘটে যাকে বলা হয় দুর্বল নিউক্লিয় বল।
ভরবেগ	:	বস্তুর ভর ও বেগের সমন্বয়ে বস্তুতে যে ধর্মের উদ্ভব হয় তাকে বস্তুর ভরবেগ বলে।
নিউটনের গতিসূত্র	:	স্যার আইজাক নিউটন বস্তুর ভর, গতি ও বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে তিনটি সূত্র প্রকাশ করেন। এই তিনটি সূত্র নিউটনের গতিসূত্র নামে পরিচিত।
প্রথম সূত্র	:	বাহ্যিক বল প্রয়োগে বস্তুর অবস্থার পরিবর্তন করতে বাধ্য না করলে স্থির বস্তু চিরকাল স্থিরই থাকবে এবং গতিশীল বস্তু সমবেগে অর্থাৎ সমদ্রুতিতে সরল পথে চলতে থাকবে।
দ্বিতীয় সূত্র	:	বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার ওপর প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যেদিকে ক্রিয়া করে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনও সেদিকে ঘটে।
তৃতীয় সূত্র	:	প্রত্যেক ক্রিয়ারই একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে।
ঘাত বল	:	খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।
বলের ঘাত	:	কোনো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফলকে ওই বলের ঘাত বলে।
ভরবেগের নিত্যতার সূত্র	:	কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল প্রযুক্ত না হলে ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হবে না। অর্থাৎ ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে। একে ভরবেগের নিত্যতার সূত্র বলে।
প্রতিক্ষেপ বা পশ্চাৎ বেগ	:	বন্দুক থেকে গুলি ছোড়া বা বন্দুকের পিছন দিকে ধাক্কা অনুভূত হওয়ার ঘটনাই বন্দুকের প্রতিক্ষেপ বা পশ্চাৎ বেগ।
ঘূর্ণন বা আবর্ত গতি	:	কোনো বস্তু যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের চতুর্দিকে বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে তবে বস্তুর গতিকে ঘূর্ণন গতি বা আবর্ত গতি বলে।
কৌণিক সরণ	:	বৃত্তীয় গতিতে সচল কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর কোনো নির্দিষ্ট সময়ের অবকাশে যে কোণে সরে যায় তাকে ওই সময়ের অবকাশ কণাটির কৌণিক সরণ বলে।
কৌণিক বেগ	:	অতি ক্ষুদ্র সময়ে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের তাৎক্ষণিক হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বলে।
সমবৃত্তীয় গতি	:	কৌণিক বেগের মান স্থির থাকলে বৃত্তীয় গতিকে সমবৃত্তীয় গতি বলে।

কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের সম্পর্ক : রৈখিক বেগ = কৌণিক বেগ × বৃত্তের ব্যাসার্ধ; অর্থাৎ, $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

কৌণিক ত্বরণ : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক ত্বরণ বলে।

কৌণিক ত্বরণ ও রৈখিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক : রৈখিক ত্বরণ = কৌণিক ত্বরণ × ব্যাসার্ধ; অর্থাৎ, $a = \alpha r$

কৌণিক ভরবেগ : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

আবার, ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে কোনো একটি বস্তুর জড়তার ভ্রামক এবং কৌণিক বেগের গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

কৌণিক ভরবেগের নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র : কোনো বস্তুর ওপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।

জড়তার ভ্রামক : একটি দৃঢ় বস্তু কোনো একটি স্থির অক্ষের চারদিকে আবর্তিত হতে থাকলে ওই অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তার ভ্রামক বলতে অক্ষ হতে প্রতিটি কণার দূরত্বের বর্গ ও এদের প্রত্যেকের ভরের গুণফলের সমষ্টিকে বুঝায়।

চক্রগতির ব্যাসার্ধ : যদি কোনো দৃঢ় বস্তুর মোট ভর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত আছে মনে করা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ওই বিন্দুর ভরের জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ওই বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।

টর্ক : কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্য প্রযুক্ত দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বা বলের ভ্রামক বলে।

টর্কের সংজ্ঞা : অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর ওপর যে বিন্দুতে ক্রিয়াশীল ওই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের ভেক্টর গুণফলকে টর্ক বলে।

লম্ব অক্ষ উপপাদ্য : কোনো পাতলা সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের সমষ্টি ওই পাতে অবস্থিত দুই অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকের সমান হবে।

সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য : যেকোনো অক্ষের সাপেক্ষে কোনো সমতল পাতলা পাতের জড়তার ভ্রামক পাতটির ভারকেন্দ্রগামী তার সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক এবং পাতের ভর ও ওই দুই অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টির সমান।

কৌণিক গতির জন্য নিউটনের সূত্রসমূহ—

প্রথম সূত্র : কোনো বস্তুর ওপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে স্থির বস্তু স্থির অবস্থানে এবং ঘূর্ণনরত বস্তু সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকবে।

দ্বিতীয় সূত্র : ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার ওই বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমানুপাতিক এবং টর্ক যেদিকে ক্রিয়া করে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনও ওইদিকে ঘটে।

তৃতীয় সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক টর্কের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক আছে।

কেন্দ্রমুখী বল : যে বলের ক্রিয়ায় কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে চলতে থাকে এবং যে বল সবসময় বস্তুর গতিপথের সাথে লম্বভাবে ভেতরের দিকে অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রাভিমুখে ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখী বা অভিকেন্দ্র বল বলা হয়। অভিকেন্দ্র বল কার্যহীন বল।

কেন্দ্রবিমুখী বল বা অপকেন্দ্র বল : সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে আবর্তনরত বস্তুর ওপর অভিকেন্দ্র বলের সমান ও বিপরীতমুখী অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে বাইরের দিকে একটি অলীক বল ক্রিয়া করে। একে কেন্দ্রবিমুখী বা অপকেন্দ্র বল বলে।

ব্যাংকিং ও ব্যাংকিং কোণ : অনুভূমিক রাস্তায় হঠাৎ বাঁক নেওয়ার সময় গাড়ি যাতে ছিটকে গিয়ে দুর্ঘটনায় না পড়ে সেজন্য প্রতিটি বাঁকে রাস্তার বাইরের দিক ভিতরের দিকের চেয়ে কিছুটা উঁচু করে তৈরি করা হয়। একে রাস্তার ব্যাংকিং বা ঢাল বলে। অনুভূমিক রেখার সাথে ওই স্থানে দুইপাশ যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ব্যাংকিং কোণ বলে।

সংঘর্ষ : অতি অল্প সময়ের জন্য বৃহৎ কোনো বল ক্রিয়া করে বস্তুর গতির হঠাৎ ও ব্যাপক পরিবর্তন করাকে সংঘাত বা সংঘর্ষ বলে।

স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ : যে সংঘর্ষের আগে ও পরে দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ বস্তুদ্বয়ের মোট গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে সেই সংঘর্ষকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ : দুটি বস্তুর মধ্যে সংঘর্ষ হলে যদি বস্তুদ্বয়ের গতিশক্তি সংরক্ষিত না হয় অর্থাৎ সংঘর্ষের পূর্বের ও পরের গতিশক্তি যদি সমান না হয় তবে সেই সংঘর্ষকে অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

ঘর্ষণ : একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর সাথে পরস্পরের সংস্পর্শে থেকে একে অপরের ওপর দিয়ে চলতে চেষ্টা করে তখন উভয়ের সংযোগস্থলে গতির বিরুদ্ধে একটি বাধাদানকারী বলের সৃষ্টি হয়। এই বাধাকে ঘর্ষণ বলে।

স্থিতি ঘর্ষণ : কোনো বস্তুকে কোনো তলের ওপর গতিশীল করার জন্য যে বল প্রয়োগ করলে বস্তুতে গতির সঞ্চার হওয়ার উপক্রম হয়, সেই সময় বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী আপেক্ষিক গতিকে বাধাদানকারী ঘর্ষণ বলের মানকে সীমান্তিক ঘর্ষণ বল বলে।

স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক : দুটি বস্তু পরস্পরের সংস্পর্শে থাকলে স্থিতি ঘর্ষণের সীমান্তিক মান ও অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়ার অনুপাতকে স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক বলে।

ঘর্ষণ কোণ : সীমান্তিক ঘর্ষণের ক্ষেত্রে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া (R) এবং ঘর্ষণ বলের (f_S) লব্ধিকে লব্ধি প্রতিক্রিয়া (S) বলে। এই লব্ধি প্রতিক্রিয়া অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঘর্ষণ কোণ (λ) বলে।

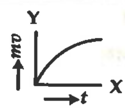
গতীয় ঘর্ষণ : একটি বস্তু যখন অন্য একটি তল বা বস্তুর ওপর গতিশীল হয় অর্থাৎ দুটি স্পর্শ তলের মধ্যে যখন আপেক্ষিক গতি বিদ্যমান থাকে তখন তাদের মধ্য যে ঘর্ষণ ক্রিয়া করে তাকে গতীয় ঘর্ষণ বলে।

গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক : একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর ওপর দিয়ে স্থির বেগে চলতে থাকে তখন গতীয় ঘর্ষণ বল (f_K) এবং অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়ার (R) অনুপাতকে গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক μ_s বলে।

স্থিতি বা নিশ্চল কোণ বা বিরাম কোণ : নততলের নতিকোণের যে সর্বোচ্চ মানের জন্য ওই তলের ওপর রক্ষিত কোনো বস্তু নততল বরাবর নিচের দিকে গতিশীল হওয়ার উপক্রম করে তাকে স্থিতি কোণ বা নিশ্চল কোণ বা বিরাম কোণ বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। একটি গাড়ি স্থির অবস্থা হতে ত্বরণশীল হলে সময়ের বিপরীতে ভরবেগের লেখচিত্র হবে



২। হাতঘড়ির কাঁটার কৌণিক বেগ ঘণ্টার কাঁটার জন্য $\frac{\pi}{720}$ rad min^{-1} বা $\frac{\pi}{21600}$ rad s^{-1}, মিনিটের কাঁটার জন্য $\frac{\pi}{180}$ rad s^{-1}, সেকেন্ডের কাঁটার জন্য $\frac{\pi}{30}$ rad s^{-1}

৩। কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য হবে। ব্যাঙ্কিং কোণ নির্ভর করে বস্তুর বেগের ওপর এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধের ওপর।

৪। 1 rps = 2 πrad, $\frac{mv^2}{r}$ হলো কেন্দ্রমুখী বলের রাশিমালা। সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক বেগ > মিনিটের কাঁটার কৌণিক বেগ > ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক বেগ।

৫। কৌণিক ভরবেগের একক kgm^2s^{-1} এবং মাত্রা সমীকরণ ML^2T^{-1}। $F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$, $L = mvr = mr^2\omega$

৬। টর্কের অপর নাম ঘূর্ণন বল। টর্কের মাত্রা সমীকরণ ML^2T^{-2}। টর্কের একক N-m বা জুল।

৭। পাতলা বৃত্তাকার চাকতির চক্রগতির ব্যাসার্ধ হলো $K = \frac{r}{\sqrt{2}}$। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক কৌণিক বেগের ওপর নির্ভর করে। সরু সুষম দণ্ডের প্রান্ত এবং লম্বভাবে দণ্ডের মধ্য বিন্দু দিয়ে ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক 4 গুণ হয়।

৮। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে ভর ও ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর। টর্কের একক N-m মাত্রা $[ML^2T^{-2}]$

৯। সমান ভরের দুটি বস্তুর মধ্যে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ হলে এবং ১ম বস্তুর আদিবেগ u_1, শেষ বেগ v_1 এবং ২য় বস্তুর আদিবেগ u_2 এবং শেষবেগ v_2 হলে $u_1 = v_2$ প্রযোজ্য। সব থেকে দুর্বল বল মহাকর্ষ বল। সবল নিউক্লীয় বল সবচেয়ে শক্তিশালী বল।

১০। একক ভরের বস্তুর ওপর একক ত্বরণ সৃষ্টি করলে একক বলের সৃষ্টি হয়।

১১। সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুর ঘূর্ণন ব্যাসার্ধ দ্বিগুণ হলে টর্ক 4 গুণ হবে।

১২। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যবর্তী কোণ 90°। একটি পাখা প্রতি মিনিটে 60 বার ঘুরলে পাখাটির কৌণিক বেগ হবে 2π rad/s এবং ঘড়ির মিনিটের কাঁটার কম্পাঙ্ক $2{\cdot}78 \times 10^{-4}$ Hz

১৩। নৌকায় গুন টানার সময় নৌকার হাল দ্বারা প্রযুক্ত বলের উল্লম্ব উপাংশ প্রশমিত হয়।

১৪। ব্যাঙ্কিং হলো রাস্তার বাঁকে কেন্দ্রমুখি বল যোগানের জন্য ঢাল। ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার মধ্যবর্তী কোণ 180°। বৃত্তাকার পথে কেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশীল হলে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়। ব্যাঙ্কিং কোণ নির্ভর করে বস্তুর বেগের ওপর এবং রাস্তার বাঁকের ব্যাসার্ধের ওপর।

১৫। 'r' ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে একবার ঘুরে আসলে সরণ হবে $2\pi r$। কৌণিক ত্বরণের মাত্রা $[T^{-2}]$

১৬। বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান। আর ঘাতবল হলো খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের প্রযুক্ত বল।

১৭। বলের ভ্রামক বা টর্ক (i) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ (ii) $\tau = I\alpha$ (iii) $\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (iv) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ (v) $E = \frac{1}{2} I\omega^2$ ($E \propto I$ যখন ω ধ্রুব)

১৮। কেন্দ্রমুখী বলের ভেক্টররূপ : $-m(\vec{\omega}\,.\,\vec{\omega})\,r$।

১৯। আবর্তন ঘূর্ণন গতির জন্য (i) কাজ = টর্ক × কৌণিক বেগ, (ii) ক্ষমতা = টর্ক × কৌণিক বেগ

২০। দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে (i) ঘূর্ণন অক্ষের অবস্থানের ওপর (ii) দৃঢ় বস্তুর আকৃতির ওপর (iii) ঘূর্ণন অক্ষের চারদিকে দৃঢ় বস্তুর ভরের ওপর। বল × ক্রিয়াকাল = ঘাত বল।

২১। ১ম বস্তুর ভর ২য় বস্তুর ভরের তুলনায় অনেক বেশি হলে সংঘর্ষের পর ১ম বস্তুটি একই বেগে চলতে থাকবে।

২২। জড়তার ভ্রামক ও ঘূর্ণন গতিশক্তির মধ্যে সম্পর্ক হলো $E = \frac{1}{2} I\omega^2$। সমকৌণিক বেগ ঘূর্ণায়মান বস্তুর গতিশক্তি ও জড়তার ভ্রামকের অনুপাত কৌণিক বেগের বর্গের সমানুপাতিক। একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর গতি জড়তার ভ্রামক গতিশক্তির দ্বিগুণ।

২৩। ভরবেগ 100% বৃদ্ধি করলে গতিশক্তির পরিবর্তন হবে 300%।

২৪। একক সমকৌণিক বেগে আবর্তনরত কোনো দৃঢ়বস্তুর জড়তার ভ্রামক সংখ্যাগতভাবে এর গতিশক্তির দ্বিগুণ।

২৫। কোনো দৃঢ় বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = \sqrt{\frac{I}{M}}$। কোনো কণার ওপর প্রযুক্ত টর্ক শূন্য হলে কৌণিক ভরবেগ ধ্রুবক হয়। ডাইভিং এ লাফ দেওয়ার সময় সাতারুর কৌণিক ভরবেগ ধ্রুব থাকে।

২৬। কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে ভরবেগের ভ্রামককে কৌণিক ভরবেগ বলে। কেন্দ্রমুখী বলের ভেক্টররূপ $\frac{m(\vec{v} \times \vec{v})}{r}$

২৭। বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত বস্তুর রৈখিক দ্রুতি v এবং আবর্তনকাল T এর মধ্যকার সম্পর্ক হলো, $v = \frac{2\pi r}{T}$

২৮। স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে সংরক্ষিত থাকে গতিশক্তি এবং ভরবেগ। অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে মোট গতিশক্তি এবং ভরবেগ সংরক্ষিত হয় না।

২৯। দুটি বস্তুর সংঘর্ষে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া বল—(১) সমান ও বিপরীত (২) সর্বদা একই বস্তুর ওপর ক্রিয়া করে।

৩০। বলের ঘাতের একক নিউটন-সেকেন্ড, ভরবেগ ও গতিশক্তির সম্পর্ক হলো $E_k = \frac{P^2}{2m}$

৩১। সবল নিউক্লীয় বল আকর্ষণধর্মী, স্বল্প পাল্লার এবং চার্জ নিরপেক্ষ। মহাকর্ষ বল মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না। মহাকর্ষ বলের তীব্রতা 1 হলে সবল নিউক্লীয় বলের তীব্রতা 10^{41}। সবল নিউক্লীয় বল সবচেয়ে শক্তিশালী আর সবচেয়ে দুর্বল বল মহাকর্ষ বল।

৩২। M ভরের এবং R ব্যাসার্ধের একটি চাকতি তার সাথে লম্ব বরাবর অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক $\frac{MR^2}{2}$। কোনো বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে ভর ও ঘূর্ণন অক্ষের ওপর। ডাল ভাঙ্গানোর যাতাকলে কিনারার কণার রৈখিক বেগ বেশি এবং প্রতিটি কণার কৌণিক ভরবেগ সমান।

৩৩। আণবিক গঠনের জন্য দায়ী তড়িৎ চৌম্বক বল। বৃত্তাকার গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ভরবেগ $mr^2\omega$

৩৪। বলের এস. আই. একক নিউটন ও এফ. পি. এস.একক পাউন্ডাল, বলের মাত্রা $[MLT^{-2}]$, বল $F = ma$

৩৫। মহাকর্ষ বলের মান 10^{-41} হলে দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িচ্চুম্বকীয় বল ও সবল নিউক্লীয় বলের মান হবে যথাক্রমে 10^{-11}, 10^{-2}, 1। আবার, সবল নিউক্লীয় বলের মান 10^{41} ধরলে, দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িচ্চুম্বকীয় বল এবং মহাকর্ষ বলের আপেক্ষিক সবলতার মান হবে যথাক্রমে 10^{31}, 10^{39} ও 1।

৩৬। সবল নিউক্লীয় বলের পাল্লা 10^{-15} m এবং দুর্বল নিউক্লীয় বলের পাল্লা 10^{-16} m

৩৭। ভরবেগের এস. আই. একক, $kgms^{-1}$ এবং মাত্রা, $[MLT^{-1}]$

৩৮। বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান। বলের ঘাত হলো বল ও বলের ক্রিয়াকালের গুণফল। কিন্তু ঘাত বল হলো একটি বৃহৎ মানের অত্যন্ত ক্ষণস্থায়ী বল। ঘাত বলের মাত্রা $[MLT^{-2}]$ এবং বলের ঘাতের মাত্রা $[MLT^{-1}]$

৩৯। রকেটের ভর কমালে ত্বরণ বৃদ্ধি পায়। গ্যাসের আপেক্ষিক বেগ বৃদ্ধি করলে ত্বরণও বৃদ্ধি পাবে।

৪০। আলোর বেগের কাছাকাছি বেগসম্পন্ন বস্তুর গতির ক্ষেত্রে নিউটনের সূত্র প্রয়োগ করা যায় না, সেক্ষেত্রে আইনস্টাইনের আপেক্ষিকতার সূত্র ব্যবহার করতে হয়।

৪১। কৌণিক বেগের একক radian/sec এবং মাত্রা $[T^{-1}]$। রৈখিক বেগ = কৌণিক বেগ × বৃত্তের ব্যাসার্ধ অর্থাৎ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$। ধান মাড়াইয়ের ক্ষেত্রে দূরবর্তী গরুকে সবচেয়ে বেশি বেগে হাঁটতে হয়।

৪২। একক কৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বস্তুর জড়তার ভ্রামক এর কৌণিক ভরবেগের সমান।

৪৩। জড়তার ভ্রামকের একক kgm^{-2} এবং মাত্রা $[ML^2]$। জড়তার ভ্রামক নির্ভর করে বস্তুর ভর ও ঘূর্ণন অক্ষের ওপর।

৪৪। স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে দুটি সমান ভরের বস্তু পরস্পর বেগ বিনিময় করে।

৪৫। নিউক্লিয়নের মধ্যে মেসন কণার পারস্পরিক বিনিময়ের মাধ্যমে সবল নিউক্লীয় বলের উৎপত্তি হয়।

৪৬। ফোটন কণার পারস্পরিক বিনিময়ের ফলে তড়িচ্চুম্বকীয় বল কার্যকর হয়।

৪৭। গ্রাভিটন কণার বিনিময়ের ফলে মহাকর্ষ বল কার্যকর হয়।

৪৮। বোসন নামক এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের মাধ্যমে দুর্বল নিউক্লীয় বল কার্যকর হয়।

৪৯। নির্দিষ্ট ভরের কোনো চাকতির ব্যাসার্ধ অর্ধেক করা হলে কেন্দ্রমুখী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক এক-চতুর্থাংশ হবে।

৫০। বলের ভ্রামকের বা টর্কের সমীকরণ হলো : $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{\tau} = \vec{I}\alpha$, $\vec{\tau} \propto \frac{d\vec{L}}{dt}$

৫১। $I = I_G + Mh^2$ হচ্ছে সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য এবং $I_z = I_x + I_y$ হলো লম্ব অক্ষ উপপাদ্য।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। সবচেয়ে শক্তিশালী বল হচ্ছে— [সি. বো. ২০১৯]
ক মহাকর্ষ বল
খ তড়িৎ চুম্বকীয় বল
গ সবল নিউক্লীয় বল
ঘ দুর্বল নিউক্লীয় বল

২। নিচের বলগুলোর মধ্যে কোনটি সবচেয়ে দুর্বল ? [সি. বো. ২০২২, ২০১৬; দি. বো. ২০২২; ঢা. বো. ২০১৬; কু. বো. ২০১৬; য. বো. ২০১৫; Medical Admission Test, 2016-17; Admission Test : KU 2011-12; BRU 2012-13; DU (HEC) 2020-21; DU (প্রযুক্তি) 2022-23]
ক মহাকর্ষ বল
খ তড়িৎ চুম্বকীয় বল
গ সবল নিউক্লীয় বল
ঘ দুর্বল নিউক্লীয় বল

৩। বিটা ক্ষয় কোন বলের কারণে? [JU Admission Test, 2021-22]
ক সবল নিউক্লিয়
খ দুর্বল নিউক্লিয়
গ তড়িৎ চুম্বকীয়
ঘ মহাকর্ষ বল

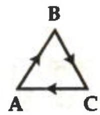
৪। বলের মাত্রা সমীকরণ কোনটি ? [Admission Test : RUET 2012-13; KU 2018-19]
ক $[MLT^{-2}]$
খ $[MLT^{-1}]$
গ $[ML^2T^{-1}]$
ঘ $[ML^2T^{-2}]$

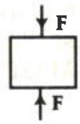
৫। একজন সাইকেল চালক 25 sec এ 600 m দূরত্বের একটি মোড়ে বাঁক নেয়। উলম্বের সাথে তার কোণের মান কত? [রা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); [Admission Test : KUET 2013-14; SUST 20112-13 (মান ভিন্ন)]
ক 31·26°
খ 31·62°
গ 35·2°
ঘ 31·60°

৬। কত মানের একটি বল 10 kg ভরের একটি বস্তুর ওপর 4 sec ক্রিয়া করলে বেগের পরিবর্তন 40 ms^{-1} হবে ? [JU Admission Test, 2017-18]
ক 200 N
খ 50 N
গ 150 N
ঘ 100 N

৭। বলের ভারসাম্য নির্দেশ করে—

(i)


(ii)


(iii)


নিচের কোনটি সঠিক ?
ক i
খ i ও ii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

৮। নিউক্লিয়নের মধ্যে কোন কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা সবল নিউক্লীয় বলের উৎপত্তি হয়? [রা. বো. ২০২২; কু. বো. ২০২১; ব. বো. ২০১৭; RU Admission Test, 2016-17]
ক গ্রাভিটন
খ নিউট্রিনো
গ মেসন
ঘ ইলেকট্রন

নিচের তথ্যটি থেকে ৯নং ও ১০নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
6 kg ভরের একটি বন্দুক থেকে 10 g ভরের একটি বুলেট 300 ms^{-1} বেগে বের হয়ে গেল, বুলেটটি বের হওয়ার সময় একটি বল পেছনের দিকে ধাক্কা দিল।

৯। বন্দুকের আদি ভরবেগ কত ?
ক 0·4 kg ms^{-1}
খ 0·8 kg ms^{-1}
গ 0·18 kg ms^{-1}
ঘ 0 kg ms^{-1}

১০। বন্দুকটি কত বেগে পেছনে সরে আসবে ? [Admission Test : JU 2016-17; JnU 2017-18 (মান ভিন্ন); DU 2012-13; CU 2018-19]
ক − 0·5 ms^{-1}
খ 0·5 ms^{-1}
গ 5 ms^{-1}
ঘ 50 ms^{-1}