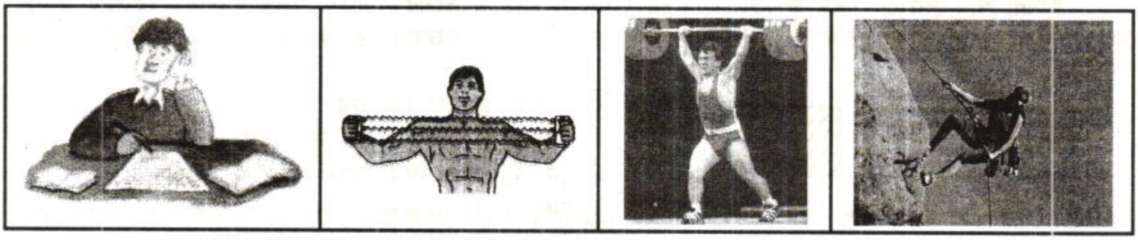
৫

প্রধান শব্দ (Key Words) : কাজ, কাজের একক, শক্তি, স্থিতিস্থাপক বল, গতিশক্তি, স্থিতিশক্তি, ক্ষমতা, ক্ষমতার একক, অসংরক্ষণশীল বল, কর্মক্ষমতা।

কাজ, শক্তি ও ক্ষমতা
WORK, ENERGY AND POWER



সূচনা
Introduction

কাজ, শক্তি ও ক্ষমতা এ তিনটি শব্দ আমাদের অতি পরিচিত। আমরা দৈনন্দিন জীবনে কাজ শব্দটিকে শারীরিক কিংবা মানসিক যেকোনো কাজের জন্য ব্যবহার করে থাকি। তাই সাধারণ অর্থে **কোনো কিছু করার নামই কাজ**। যেমন রিকশাওয়ালা যখন রিকশা টানে তখন সে কাজ করে, কুলি যখন মাল বহন করে তখন সে কাজ করে, ঘোড়া যখন গাড়ি টানে তখন এটি কাজ করে ইত্যাদি। এ থেকে স্পষ্ট যে কাজ শব্দটি দৈনন্দিন জীবনে কোনো নির্দিষ্ট অর্থে ব্যবহৃত না হয়ে ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়। পদার্থবিজ্ঞানে কাজ বলতে নির্দিষ্ট একটি অর্থ বুঝায়। আমরা ক্ষমতা ও শক্তি উভয়ই সাধারণভাবে একই অর্থে ব্যবহার করি। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে এরা এক নয়। এ অধ্যায়ে কাজ, ক্ষমতা ও শক্তির প্রকৃত ব্যাখ্যা এবং এদের সম্পর্কিত বিভিন্ন সম্পর্ক আলোচনা করা হবে।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- কাজ ও শক্তির সর্বজনীন ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বল ও সরণের সাথে কাজের ভেক্টর সম্পর্ক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- স্থির বল ও পরিবর্তনশীল বল দ্বারা সম্পাদিত কাজ বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- স্থিতিস্থাপক বল ও অভিকর্ষ বলের বিপরীতে সম্পাদিত কাজের তুলনা করতে পারবে।
- গতিশক্তির গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন ও সমস্যা সমাধানে এর ব্যবহার করতে পারবে।
  ব্যবহারিক : একটি স্প্রিং এর বিভব শক্তি নির্ণয়।
- শক্তির নিত্যতার নীতি ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে।
- ক্ষমতা, বল ও বেগের মধ্যে সম্পর্ক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বল ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কোনো সিস্টেমের ক্ষেত্রে কর্মদক্ষতা হিসাব করতে পারবে।

৫.১ কাজ ও শক্তির সর্বজনীন ধারণা
Universal concept of work and energy

৫.১.১ কাজ
Work

সাধারণভাবে কোনো কিছু করাকে কাজ বলে। যেমন পড়াশোনা করা, কারখানায় কাজ করা, সাইকেল চালানো ইত্যাদি। বিজ্ঞানের ভাষায় কাজের অর্থ আলাদা।

বল প্রয়োগ করলে বস্তুর সরণ ঘটলে তখনই কেবল কাজ হয়। যেমন একটি বইকে টেবিলের ওপর থেকে নিচে ফেলে দেওয়া হলো। মাথায় বোঝা নিয়ে একজন লোক সিঁড়ি বেয়ে ওপরে উঠল, এই দুটি উদাহরণ দ্বারা কাজ করা বুঝায়। প্রথম ক্ষেত্রে অভিকর্ষ বলের দিকে সরণ হয়েছে। আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অভিকর্ষ বলের বিপরীতে সরণ হয়েছে। তাই উভয় ক্ষেত্রে কাজ হয়েছে। কিন্তু একজন লোক কাঁধে বোঝা নিয়ে এক স্থানে স্থির থেকে খুব ক্লান্ত হয়ে পড়লেও কোনো কাজ হবে না। কারণ বোঝাটির কোনো সরণ হচ্ছে না। এই আলোচনা থেকে বোঝা যায় যে—কোনো বস্তুর

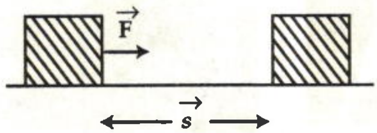
ওপর বল প্রয়োগ করলে যদি বস্তুর সরণ ঘটে কেবলমাত্র তখনই কাজ করা হয়। কিন্তু বল প্রয়োগ করলেও যদি বস্তুর সরণ না ঘটে তা হলে কোনো কাজ হয় না। F বল প্রয়োগে s পরিমাণ সরণ হলে [চিত্র ৫·১], কাজ

$$W = Fs \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.1)$$

কাজ একটি স্কেলার রাশি। ভেক্টর আকারে লিখলে, কাজ

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.2)$$

আমরা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমাদের চারপাশে কাজের অনেক উদাহরণ দেখতে পাই। ছেলেরা ফুটবল খেলছে, রিকশাওয়ালা রিকশা চালাচ্ছে, ফেরিওয়ালা জিনিস বিক্রি করে বেড়াচ্ছে, কৃষক গরু দিয়ে মাঠে লাঙল চালাচ্ছে ইত্যাদি।



চিত্র ৫·১

নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ করা যাক :

(১) মিলন বই নিয়ে ক্লাসে দাঁড়িয়ে আছে।

(২) রানা দুই হাত দিয়ে জোরে দেওয়াল ঠেলছে।

(৩) রিমি একটি খেলনাকে ঠেলে ঘরের এক প্রান্ত থেকে অন্য প্রান্তে পাঠিয়ে দিল।

যেহেতু বল প্রয়োগে বস্তু গতিশীল হলেই কেবল কাজ হয় তাই প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কোনো কাজ হয়নি কিন্তু তৃতীয় ক্ষেত্রে কাজ হয়েছে।

আবার F বল প্রয়োগে s সরণের দিকে θ কোণ উৎপন্ন হলে, বল ও সরণের উপাংশের গুণফল দ্বারা কাজের পরিমাণ হিসাব করা যায়। অর্থাৎ কাজ = বল × বলের দিকে সরণের উপাংশ

বা, $W = Fs \cos\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.3)$

তাই কাজকে নিম্নোক্ত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সংজ্ঞা : কোনো বস্তুর ওপর বল প্রয়োগে বস্তুর সরণ ঘটলে প্রযুক্ত বল ও বলের অভিমুখে সরণের উপাংশের গুণফলকে কাজ বলে।

একক : কাজের এস. আই. একক হলো জুল (Joule) বা নিউটন-মিটার (Nm)। কাজ একটি স্কেলার রাশি।

1 নিউটন বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর 1 মিটার সরণ হলে যে কাজ হয় তাকে 1 নিউটন-মিটার বা 1 জুল বলে।

কাজের অভিকর্ষীয় একক : কেজি-মিটার।

কাজের মাত্রা : $[W] = [F][s] = MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$

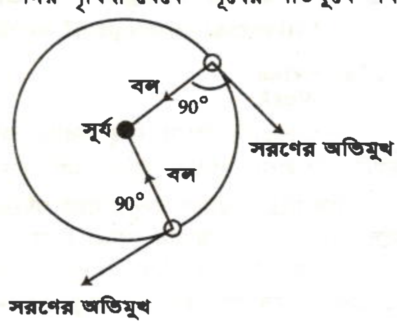
অনুধাবনমূলক কাজ : বল ও সরণ দিক রাশি হওয়া সত্ত্বেও কাজ স্কেলার রাশি কেন ?

কাজ হলো বল ও সরণের ডট গুণফল অর্থাৎ $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos\theta$। যেহেতু ডট গুণন একটি স্কেলার রাশি তাই বল ও সরণ ভেক্টর হওয়া সত্ত্বেও কাজ স্কেলার রাশি।

৫·১·২ কাজ হওয়া এবং না হওয়ার কারণ
The causes for work done and work not done

নিচের ঘটনাগুলো পড়ে কাজ হওয়া এবং না হওয়ার কারণ জেনে নাও।

● পৃথিবী সূর্যের চারদিকে ঘুরছে, যেকোনো মুহূর্তে পৃথিবীর সরণের অভিমুখ ওই বৃত্তচাপের স্পর্শক বরাবর হয় [চিত্র ৫·২]। কিন্তু সূর্য পৃথিবীকে যে মহাকর্ষ বলে আকর্ষণ করে তা সব সময় পৃথিবী থেকে সূর্যের অভিমুখে অর্থাৎ বৃত্তচাপের ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্র অভিমুখে ক্রিয়া করে। অতএব সূর্যের আকর্ষণ বলের অভিমুখ ও পৃথিবীর সরণের অভিমুখ সবসময় পরস্পরের ওপর লম্ব হওয়ায় পৃথিবীর আবর্তনের সময় সূর্যের মহাকর্ষ বল কোনো কাজ করে না। এক্ষেত্রে কাজ, $W = Fs\cos\theta = Fs\cos 90° = 0$



চিত্র ৫·২

● হাতে একটি ব্যাগ নিয়ে সমতল পথে হাঁটলে ব্যাগটির ওজন অর্থাৎ অভিকর্ষ বল কোনো কাজ করে না। কারণ সমতল পথে হাঁটায় ব্যাগটির সরণ অনুভূমিক রেখা বরাবর অর্থাৎ অভিকর্ষীয় বলের লম্ব দিকে হয়। তাই ব্যাগটির সরণ হলেও অভিকর্ষ বল কোনো কাজ করে না। অতএব এক্ষেত্রে অভিকর্ষ বল কাজহীন বল। কিন্তু ব্যাগ নিয়ে উঁচুনিচু পথে হাঁটলে অভিকর্ষ বল কাজ করে।

● একটি পাথরে দড়ি বেঁধে ঘোরালে পাথরটি হাতের আঙ্গুলের চারদিকে বৃত্তপথে ঘুরতে থাকে। এখানে দড়ির টান হলো অভিকেন্দ্র বল যা পাথরের সরণের দিকের সাথে লম্ব। অতএব পাথরটি ঘুরবার সময় দড়ির টান কোনো কাজ করবে না।

কাজ : পানি থেকে সদ্য তুলে আনা একটি চিংড়ি মাছকে মাটির ওপর রাখ। এবার একটা কাঠি দূর থেকে মাছটির গায়ের দিকে ঠেলে দাও। কী দেখতে পাবে ? চিংড়ি মাছটি সোজা ওপরের দিকে লাফ দিবে। এক্ষেত্রে চিংড়ি মাছটি কর্তৃক কোনো কাজ হবে কী ?

কাজের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি বল ক্রিয়া করলেও

(i) যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ $s = 0$ হয় তবে কাজ $W = 0$ হয়

(ii) যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ বলের অভিমুখের লম্বদিকে হয় অর্থাৎ $\theta = 90°$ হয় তবে $\cos\theta = 0$ হলে $W = 0$ হয়।

তাই এক্ষেত্রে কোনো কাজ হয়নি।

অনুধাবনমূলক কাজ : এক ব্যক্তি নদীতে স্রোতের বিপরীতে এমনভাবে সাঁতার কাটছে যে সে নদীর তীর সাপেক্ষ স্থির রয়েছে। ওই ব্যক্তি কি কোনো কাজ করছে ? — ব্যাখ্যা কর।

ব্যক্তিটি কোনো কাজ করছে না। কেননা স্রোতের জন্য সৃষ্ট বলকে প্রশমিত করার জন্য ওই ব্যক্তিকে একটি বিরুদ্ধ বল প্রয়োগ করতে হচ্ছে। এখন যেহেতু তীর সাপেক্ষে ওই বলের প্রয়োগ বিন্দুর কোনো সরণ হচ্ছে না, তাই ওই ব্যক্তি কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হবে। অর্থাৎ ওই ব্যক্তি কোনো কাজ করছে না।

৫.১.৩ কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে কাজ
Work done in some special cases

একাধিক বল দ্বারা কাজ :

যদি বস্তুতে একাধিক বল প্রযুক্ত হয়, তা হলে ওই বলগুলো দ্বারা কাজের মোট পরিমাণ প্রতিটি বল দ্বারা কাজের যোগফলের সমান হয়। ওই বলগুলোর লব্ধি দ্বারা কাজের পরিমাণও একই হয়।

বলের দ্বারা কাজ :

যদি চলন্ত একটি ফুটবলে পা দিয়ে গতির দিকে বল প্রয়োগ করা হয় তা হলে ফুটবলটি বলের ক্রিয়ার দিকে সরে যায়। গাছ থেকে একটি আম মাটিতে ফেলে দিলে তা অভিকর্ষের প্রভাবে নিচে পড়বে। উভয় ক্ষেত্রে কাজ ধনাত্মক বা বলের দ্বারা কাজ বুঝায়। **অতএব বলা যায় বল প্রয়োগ করার ফলে যদি বলের প্রয়োগ বিন্দু বলের ক্রিয়া অভিমুখে সরে যায় বা বলের দিকে সরণের উপাংশ থাকে, তা হলে বলের দ্বারা কাজ বুঝায়।** এক্ষেত্রে বলের দ্বারা কাজ **ধনাত্মক কাজ। বলের দিকে কাজ হলে স্থিতিশক্তি হ্রাস পায়, গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়।** বলের দ্বারা কাজের ক্ষেত্রে $0° \le \theta < 90°$।

বলের বিরুদ্ধে কাজ :

একজন লোক মাটি থেকে একটি চাউলের বস্তাকে মাথার ওপর তুলল। আবার একটি বইকে মেঝে থেকে আলমারিতে তুলল। এই দুটি ক্ষেত্রে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কাজ করা হয়। সুতরাং **যদি একটি বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত বলের বিপরীত দিকে বস্তুটিকে সরানো হয় অর্থাৎ বলের অভিমুখের বিপরীত দিকে বলের প্রয়োগ বিন্দু সরে যায়, তবে বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়েছে বুঝায়।** এক্ষেত্রে বলের বিপরীতে কাজ **ঋণাত্মক কাজ**। বলের বিরুদ্ধে কাজ হলে স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি পায়। বলের বিরুদ্ধে কাজের ক্ষেত্রে $90° < \theta \le 180°$।

শূন্য কাজ ও কার্যহীন বল :

(i) কোনো বস্তুর ভরের ওপর বল প্রয়োগে লম্ব বরাবর সরণ ঘটলে ওই বলের দ্বারা কাজ শূন্য হয় অর্থাৎ কোনো কাজ হয় না। সেক্ষেত্রে $\theta = 90°$ হয় এবং কাজ $W = Fs\cos 90° = 0$ হয়।

এক্ষেত্রে সরণের অভিমুখে বলের উপাংশ শূন্য। এই বলকে কার্যহীন বল বলে। সুতরাং **যে বলের প্রয়োগে বস্তুর সরণ বলের অভিমুখের সমকোণে ঘটে তাকে কার্যহীন বল বলে।** কেন্দ্রমুখী বা অভিকেন্দ্র বল (centripetal force) একটি কার্যহীন বল।

$\therefore$ কেন্দ্রমুখী বলের কারণে কাজ শূন্য হয়।

(ii) আবার সরণ $s = 0$ হলেও কাজ $W = 0$ হয়। সেক্ষেত্রে $W = Fs\cos\theta = F \times 0 \times \cos\theta = 0$

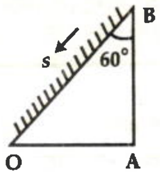
গাণিতিক উদাহরণ ৫.১

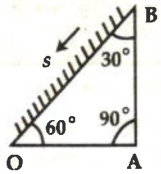
১। 150 kg ভরের এক ব্যক্তি 50 kg ভরের একটি বোঝা নিয়ে 4m দীর্ঘ একটি সিঁড়ি বেয়ে নামল। যদি সিঁড়িটি দেওয়ালের সাথে যথাক্রমে 60° কোণে এবং অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে থাকে তবে দুই ক্ষেত্রে কত কাজ করল নির্ণয় কর। [Admission Test : BUET, 2006-07 (মান ভিন্ন); RUET, 2004-05 (মান ভিন্ন)]

১ম ক্ষেত্রে,

আমরা জানি,

$$W = Fs\cos\theta$$
$$= mg\,s\cos\theta$$
$$= 200\times 9{\cdot}8\times 4\times\cos 60°$$
$$= 200\times 9{\cdot}8\times 4\times 0{\cdot}5$$
$$= 3920\text{ J}$$





এখানে,

মোট ভর,

$m = 150 + 50$
$= 200$ kg

অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$

কোণ, $\theta = 60°$

$s = 4$ m

২য় ক্ষেত্রে,

আবার অনুভূমিকের সাথে 60° কোণের ক্ষেত্রে $\theta = 90° - 60° = 30°$

$\therefore$ কাজ, $W = Fs\cos 30° = 200\times 9{\cdot}8\times 4\times\cos 30°$

$= 6789{\cdot}6$ J

২। 5 kg ভরের একটি বস্তু 5 m উঁচু থেকে একটি পেরেকের ওপর পড়লে পেরেকটি মাটির ভিতরে 10 cm ঢুকে যায়। মাটির গড় প্রতিরোধ বল নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০০৬; RUET Admission Test, 2015-16 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

পতনশীল বস্তুর স্থিতিশক্তি = প্রতিরোধ বলের বিরুদ্ধে কাজ

প্রতিরোধ বলের বিরুদ্ধে কাজ $= F\times s$

$= F\times 0{\cdot}1$

বস্তুটির মোট সরণ $= h + s = 5 + 0{\cdot}1 = 5{\cdot}1$ m

$\therefore$ বস্তুর স্থিতিশক্তি $= mg(h+s) = (5\times 9{\cdot}8\times 5{\cdot}1)$ J

প্রশ্নানুসারে,

$$F\times 0{\cdot}1 = 5\times 9{\cdot}8\times 5{\cdot}1$$
$$\therefore\ F = \frac{5\times 9{\cdot}8\times 5{\cdot}1}{0{\cdot}1} = 2499\text{N}$$

উত্তর : গড় প্রতিরোধ বল = 2499N

এখানে,

বস্তুর ভর, $m = 5$ kg

উচ্চতা, $h = 5$ m

সরণ, $s = 10\text{ cm} = 0{\cdot}1$ m

প্রতিরোধ বল, $F = ?$

৩। 1 m ব্যাসের ও 6 m দীর্ঘ একটি সুষম নিরেট সিলেন্ডারকে অনুভূমিক ব্যবস্থা থেকে খাড়া করতে কী পরিমাণ কাজ করতে হবে ? সিলিন্ডারের ঘনত্ব 1000 kg m⁻³। [ম. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

ভর, $m = \rho V = \rho\times\pi r^2 l$

$= 1000\times 3{\cdot}14\times(0{\cdot}5)^2\times 6$

$= 4710$ kg

ভার কেন্দ্রের সরণ, $h = \left(\frac{l}{2} - r\right) = \frac{6}{2} - 0{\cdot}5$

$= 3 - 0{\cdot}5 = 2{\cdot}5$ m

আমরা জানি,

কাজ, $W = mgh = 4710\times 9{\cdot}8\times 2{\cdot}5 = 115{\cdot}395$ J

এখানে,

ব্যাস, $d = 1$ m

ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5$ m

দৈর্ঘ্য, $l = 6$ m

৪। একটি ইটের দৈর্ঘ্য 0·24 m, প্রস্থ 0·12 m ও উচ্চতা 0·06 m এবং ভর 2 kg। ইটের দৈর্ঘ্যকে অনুভূমিক অবস্থান হতে উল্লম্ব অবস্থানে রাখলে কী পরিমাণ কাজ করতে হবে?

ইটের পূর্বের অবস্থায় ভারকেন্দ্র $= \frac{0.06}{2}$ m

এবং পরের অবস্থায় ভারকেন্দ্র $= \frac{0.24}{2}$ m

সুতরাং, অনুভূমিক অবস্থান থেকে উল্লম্ব অবস্থানে নিলে সরণ,

$$h = \frac{0.24}{2} - \frac{0.06}{2} = \frac{0.29 - 0.06}{2}$$
$$= \frac{0.18}{2} = 0.09 \text{ m}$$

সুতরাং, কৃত কাজ, $W = mgh = 2 \times 9.8 \times 0.09 = 1.764$ J

এখানে,
দৈর্ঘ্য, $l = 0.24$ m
প্রস্থ, $b = 0.12$ m
উচ্চতা, $h = 0.06$ m
$m = 2$ kg
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

৫। একটি বস্তুর ওপর একটি স্থির বল, $\vec{F} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$ N ক্রিয়া করছে। নিম্নোক্ত ক্ষেত্রগুলোতে কৃত কাজ নির্ণয় কর : (i) বল প্রয়োগে কণাটির $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ m সরণ হলে, (ii) Z-অক্ষ বরাবর 3 m সরণ হলে এবং (iii) Y-অক্ষ বরাবর 4 m সরণ হলে। [কু. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]

(i) $W = \vec{F} . \vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) . (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$
$= 3 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 10$ J

(ii) এখানে, Z-অক্ষ বরাবর সরণ $\vec{s} = 3\hat{k}$m

∴ কৃত কাজ, $W = \vec{F} . \vec{s} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) . 3\hat{k} = 9$ J

(iii) Y-অক্ষ বরাবর বস্তুটির সরণ $\vec{s} = 4\hat{j}$ m

∴ কৃত কাজ, $W = \vec{F} . \vec{s} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) . 4\hat{j} = -8$ J

এখানে,
$\vec{F} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$N
$\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$m

অনুধাবনমূলক কাজ : কী কী শর্তে কাজ শূন্য হয় ?

কাজ শূন্য হওয়ার শর্ত : (ক) সরণ যদি শূন্য হয়, তবে কাজ $W = F \times 0 = 0$ হয়।
(খ) বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে কাজ $W = Fs \cos 90° = 0$ হয়।
(গ) সংরক্ষণশীল বলের প্রভাবে যদি কোনো বস্তু বৃত্তাকার পথে ঘুরে তখন কাজ শূন্য হয়।

৫·২ বল, সরণ এবং কাজ
Force, displacement and work

মনে কর একটি মার্বেল-এর ভর m এবং এটি v_0 আদি বেগে গতিশীল। এই মার্বেলের ওপর বল প্রয়োগ করা হলো। ফলে বেগ পরিবর্তিত হয়ে v হলো। তা হলে বল প্রয়োগের আগে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_0^2$ এবং বল প্রয়োগের পর গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$। এক্ষেত্রে কৃত কাজ হবে গতিশক্তিদ্বয়ের পার্থক্যের সমান।

∴ কাজ = গতিশক্তির পরিবর্তন

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.4)$$

গতির সমীকরণ থেকে আমরা জানি

$$v^2 = v_0^2 + 2as \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.5)$$

এখানে $a =$ ত্বরণ, $s =$ সরণ। এখন (5.5) নং সমীকরণে $\frac{1}{2}m$ দ্বারা উভয় পাশে গুণ করে পাই,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m(2as)$$

বা, $$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mas \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.6)$$

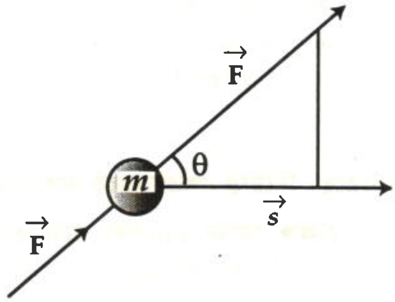
বা, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + Fs$ ... ... (5.7)

[$\because F = ma$]

বা, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fs$ ... ... (5.8)

সমীকরণ (5.4) এবং সমীকরণ (5.8) থেকে পাই

$W = Fs$ ... ... (5.9)



চিত্র ৫.৩

যদি সরণ অভিমুখে প্রযুক্ত বল বিবেচনা না করে বলের দিকে সরণের উপাংশ বিবেচনা করা হয় তা হলে চিত্র ৫.৩ অনুযায়ী,

$W = Fs \cos\theta$

ভেক্টর আকারে প্রকাশ করলে

$W = \vec{F} . \vec{s}$ ... ... (5.10)

সুতরাং বলা যায় বল ও সরণের স্কেলার গুণন হলো কৃত কাজ।

অর্থাৎ সরণ ও সরণ অভিমুখে বলের উপাংশের গুণফলই হলো কৃত কাজ।

কাজের সাধারণ সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় বল ক্রিয়া করলেও যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ $s = 0$ হয় তা হলে কৃত কাজ $W = 0$ হয়। আবার যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ বলের অভিমুখের লম্ব দিকে হয় অর্থাৎ $\theta = 90°$ হয় তবে $W = Fs \cos 90° = 0$ হয়।

অর্থাৎ কোনো সচল বস্তুর সরণের লম্ব দিকে এক বা একাধিক বল বস্তুটির ওপর ক্রিয়া করতে পারে। এই বলগুলোর অভিমুখ সরণের অভিমুখের সাথে 90° কোণে থাকলে বস্তুর সরণের সময় এই বলগুলো কোনো কাজ করে না। এ ধরনের বলকে **কাজহীন বল** বলে।

৫.৩ ধ্রুব বল এবং পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কৃত কাজ
Work done by constant force and variable force

বল সাধারণত দুই প্রকার; যথা— ধ্রুব বল ও পরিবর্তনশীল বল। এখন আমরা ধ্রুব বল ও পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজ আলোচনা করব।

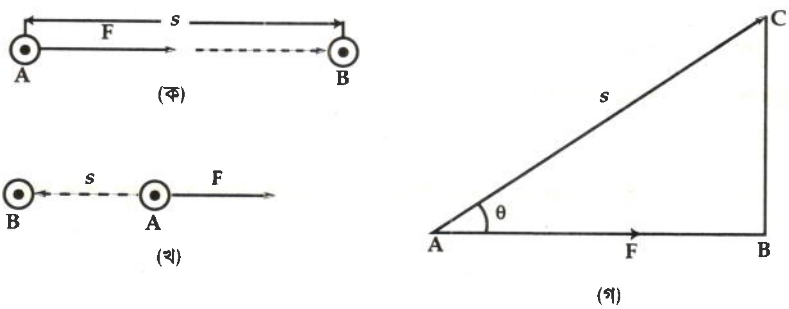
৫.৩.১ ধ্রুব বল কর্তৃক কৃত কাজ
Work done by a constant force

অভিকর্ষীয় বলের প্রভাবে কোনো বস্তুকে অল্প উচ্চতায় ওপরে উঠানো বা নিচে নামানো যায়। উচ্চতার মান কম হওয়ায় এক্ষেত্রে অভিকর্ষীয় বল স্থির (বা ধ্রুব) বল। ($\because F = mg$, উচ্চতা কম হওয়ায় g এর মান স্থির ধরা যায়; $\therefore$ F ধ্রুব) অর্থাৎ **সময়ের প্রেক্ষিতে বলের মান ও দিক পরিবর্তন না হলে তাকে স্থির (বা ধ্রুব) বল বলে।**

মনে করি A বিন্দুতে অবস্থিত কোনো একটি বস্তুর ওপর AB বরাবর F বল প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি A বিন্দু হতে B বিন্দুতে যেতে s দূরত্ব অতিক্রম করল [চিত্র ৫.৪ (ক)]। তা হলে,

কৃত কাজ = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

বা, $W = F \times s$ ... ... (5.11)



চিত্র ৫.৪

যদি বল প্রয়োগের ফলে বস্তুর তথা বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ, বলের বিপরীত দিকে $AB = s$ হয় [চিত্র ৫.৪(খ)] তবে,

কৃত কাজ = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

$W = F \times (-s) = -F \times s$ ... ... (5.12)

ঋণাত্মক চিহ্ন বল ও সরণ বিপরীতমুখী বুঝাতে ব্যবহৃত হয়েছে। সাপের গায়ে লাঠি দিয়ে খোঁচা দিলে যদি সাপ তোমার দিকে ধেয়ে আসে সেক্ষেত্রে ঋণাত্মক কাজ হয় এবং $W = -Fs$ হয়।

এবার মনে করি একটি বস্তুর ওপর F পরিমাণ বল AB অভিমুখে প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি বলের অভিমুখের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে s পরিমাণ দূরত্ব সরে C বিন্দুতে পৌঁছল [চিত্র ৫.৪(গ)]। তা হলে বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর বস্তুর সরণ $= AB = s \cos\theta$।

এখানে $BC \perp AB$

∴ কৃত কাজ, W = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

বা, $\mathbf{W = Fs \cos\theta}$ ... ... (5.13)

= বলের মান × বলের দিকে সরণের উপাংশের মান।

অথবা, $W = Fs \cos\theta$ = সরণের মান × সরণের দিকে বলের উপাংশের মান।

উভয় ক্ষেত্রে কাজের পরিমাণ একই।

ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে **কাজকে** নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

কাজকে বল ও সরণ এই দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল দ্বারা পরিমাপ করা হয়। মনে করি বল $\vec{F}$ একটি ভেক্টর বা দিক রাশি এবং সরণ $\vec{s}$ একটি ভেক্টর বা দিক রাশি।

অতএব কাজ = বল . সরণ

বা $W = \vec{F} . \vec{s}$

$= Fs \cos\theta$; [$s \cos\theta$ হলো বল F-এর দিকে সরণের উপাংশ বা অংশক] ... (5.14)

এখানে θ = $\vec{F}$ এবং $\vec{s}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ।

(ক) **ধনাত্মক কাজ :** $\theta = 0°$ হলে, অর্থাৎ বলের দিকে যখন বস্তুর সরণ হয়, তখন MAT(21-22;20-21)

$W = \vec{F} . \vec{s} = Fs \cos\theta = Fs \cos 0°$

$= Fs$ [$\because \cos 0° = 1$]

এখানে কাজ ধনাত্মক (positive)। এক কথায় θ সূক্ষ্মকোণ হলে কাজ ধনাত্মক। **কাজ ধনাত্মক হলে বলের দ্বারা কাজ বুঝায়। ধনাত্মক কাজের ক্ষেত্রে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায় এবং ত্বরণ হয়।**

(খ) **শূন্য কাজ :** $\theta = 90°$ হলে, অর্থাৎ বলের লম্ব দিকে যখন বস্তুর সরণ হয়, তখন

$W = F. s \cos\theta = F.s \cos 90° = 0$ [$\because \cos 90° = 0$]

অর্থাৎ $\theta = 90°$ হলে বল দ্বারা কাজের পরিমাণ শূন্য হবে। **কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কাজ শূন্য হয়।** কেন্দ্রমুখী বলের দিক বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে, তার সরণের দিক বৃত্তের স্পর্শক বরাবর। ফলে $\theta = 90°$ হয় এবং কাজ শূন্য হয়।

(গ) **ঋণাত্মক কাজ :** $\theta = 180°$ হলে কাজ ঋণাত্মক (negative) হবে

অর্থাৎ $W = \vec{F}. \vec{s} = Fs \cos 180° = -Fs$ [$\because \cos 180° = -1$]

কাজ ঋণাত্মক হলে বলের বিরুদ্ধে কাজ বুঝায়। ঋণাত্মক কাজের ক্ষেত্রে গতিশক্তি হ্রাস পায় এবং মন্দন হয়।

অনুধাবনমূলক কাজ : বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান বস্তু কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য—ব্যাখ্যা কর।

বৃত্তাকার পথে যখন একটি বস্তু ঘুরতে থাকে তখন প্রতিটি মুহূর্তে কেন্দ্রমুখী বল (F) এবং ক্ষুদ্র সরণের (s) মধ্যকার কোণ $\theta = 90°$। সুতরাং কাজ $W = \vec{F} . \vec{s} = Fs \cos\theta = 0$। অর্থাৎ কেন্দ্রমুখী বলের দিকে সরণের উপাংশ সর্বদা শূন্য হওয়ায় এক্ষেত্রে কোনো কাজ হবে না।

কাজ : m ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা থেকে সমত্বরণে চলছে। t সময় পরে তার বেগ, v। দেখাও যে, T সময় পরে কৃত কাজ $= \frac{1}{2}mv^2T^2/t^2$.

স্থিরাবস্থা থেকে বস্তুটি যাত্রা শুরু করে t সময় পরে এর বেগ v হলে, বস্তুর ত্বরণ, $a = \frac{v}{t}$

$\therefore$ প্রযুক্ত বল, $F = ma = \frac{mv}{t}$

এখন, T সময়ে সরণ s হলে, $s = u \times T + \frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}\frac{v}{t} \times T^2 \quad [\because u = 0]$

$\therefore$ কৃত কাজ, $Fs = \frac{mv}{t} \times \frac{1}{2}\frac{v}{t}T^2$

$= \frac{1}{2}\frac{mv^2T^2}{t^2}$ (প্রমাণিত)

৫.৩.২ পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজ
Work done by a variable force

সংজ্ঞা : যে বলের মানের ও দিকের অথবা যেকোনো একটির পরিবর্তন হয় তা-ই পরিবর্তনশীল বল। যেমন একটি স্প্রিংকে টেনে লম্বা করলে বা সংকুচিত করলে যে কাজ হবে তাকে পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কাজ বুঝায়। আবার মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কোনো বস্তুর স্থান পরিবর্তনও পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কাজ বুঝায়।

স্বল্প উচ্চতায় বলের পরিবর্তন খুবই নগণ্য। কিন্তু পৃথিবী পৃষ্ঠের বেশ ওপরের দিকে কিংবা নিচের দিকে অভিকর্ষীয় বলের মান কমতে থাকে। সেক্ষেত্রে বল স্থির (বা ধ্রুব) ধরা যায় না। বল একটি ভেক্টর রাশি; সুতরাং এর দিক ও মান উভয়ই আছে। প্রথমে বলের মান পরিবর্তনশীল বিবেচনা করে আমরা নিম্নে কৃত কাজের সমীকরণ বের করব।

ক. বলের মান যখন পরিবর্তনশীল

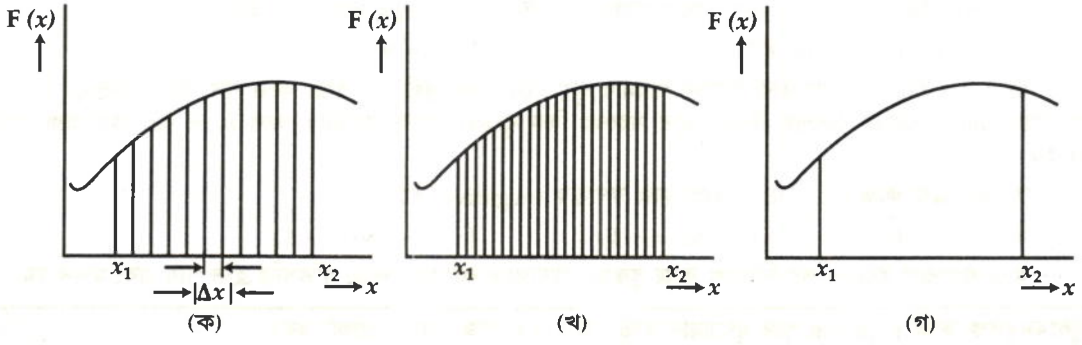
ধরি কোনো একটি পরিবর্তনশীল বল $\vec{F}$ বস্তুর ওপর x-অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করায় বস্তুটি x-অক্ষ বরাবর x_1 অবস্থান থেকে x_2 অবস্থানে সরে গেল এবং বলটি মানের সাপেক্ষে পরিবর্তী। এই পরিবর্তী বল দ্বারা বস্তুটির সরণ $(x_2 - x_1)$ ঘটাতে সম্পাদিত কাজ নিম্নোক্ত উপায়ে বের করতে পারি।

এখন মোট সরণ $(x_2 - x_1)$ কে বহুসংখ্যক অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সমমানের সরণ Δx-এ বিভক্ত করা হলো [চিত্র ৫.৫ (ক)]। ফলে প্রতিটি ক্ষুদ্র সরণের শুরুতে বস্তুর ওপর যে বল ক্রিয়া করে ওই বলের ক্রিয়াতেই ওই সরণ সংঘটিত হয়েছে বিবেচনা করা যায়। প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশে ক্রিয়ারত বল ভিন্ন ভিন্ন মানের। সুতরাং x_1 অবস্থান থেকে $x_1 + \Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণের ক্ষেত্রে F_1 বল ক্রিয়াশীল হলে কাজ,

$\Delta W_1 = F_1 \Delta x$

অনুরূপভাবে $x_1 + \Delta x$ থেকে $x_1 + 2\Delta x$ পর্যন্ত সরণ Δx-এর ক্ষেত্রে F_2 বল ক্রিয়াশীল হলে কাজ,

$\Delta W_2 = F_2 \Delta x$



চিত্র ৫.৫

মোট সরণ $(x_2 - x_1)$ কে যদি এরূপ N সমসংখ্যক ক্ষুদ্র সরণ Δx-এ বিভক্ত করা হয় তবে মোট কাজ হবে এই ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের সরণের জন্য কাজের সমষ্টির সমান।

$$\therefore \text{ কৃত কাজ, } W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \ldots\ldots\ldots + \Delta W_N$$
$$= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x + \ldots\ldots\ldots + F_N\Delta x$$
$$= \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x$$

লক্ষণীয় যে প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশ Δx-এ বলের মান ধ্রুব ধরা হয়েছে। কিন্তু এটা সম্পূর্ণ সঠিক নয়। ওই প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশকে যদি আরও ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করি [চিত্র ৫·৫ (খ)] এবং অতি ক্ষুদ্র অংশের জন্য বল স্থির (বা ধ্রুব) ধরি, তবে কৃত কাজের মান আরও সঠিক হবে। এভাবে ক্ষুদ্র অংশ আরও ক্ষুদ্র অর্থাৎ Δx যদি প্রায় শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং বিভক্ত অংশের সংখ্যা N-কে অসীম করা হয় তবে সঠিক মান পাওয়া যাবে। অতএব কাজের সঠিক মান লেখা যায়,

$$W = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x$$

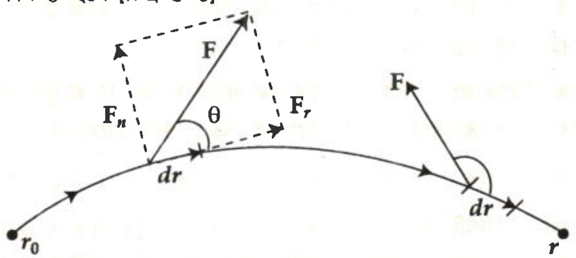
ক্যালকুলাসের ভাষায়,

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

$$\therefore \quad W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5.15)$$

= x_1 ও x_2 সীমার মধ্যে আবদ্ধ লেখচিত্রের ক্ষেত্রফল [চিত্র ৫·৫ (গ)]

বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে [চিত্র ৫·৬]



চিত্র ৫·৬

$$W = \int \vec{F}.\vec{dx} = \int_{x_1}^{x_2} F\cos\theta\, dx, \ F\cos\theta \text{ হচ্ছে X-অক্ষ বরাবর বল } \vec{F}\text{-এর উপাংশ।} \qquad \ldots \qquad (5.16)$$

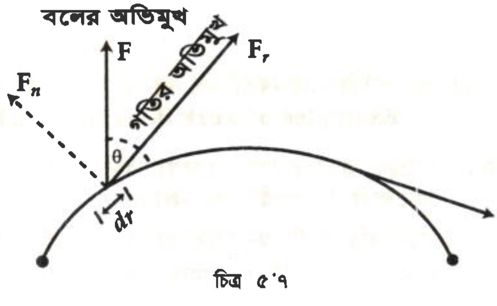
খ. বলের মান ও দিক উভয়ই যখন পরিবর্তনশীল

বল মানে ও অভিমুখে পরিবর্তনশীল হলে ওই বলের ক্রিয়ায় বস্তু একটি রেখায় গতিশীল হতে পারে। বস্তুটির গতি দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক। এ ক্ষেত্রে রেখাটির কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দ্বারা ওই বিন্দুতে বস্তুর গতি অভিমুখ নির্দিষ্ট হবে। এক্ষেত্রে সরণ = $\vec{r}$ ।

কাজেই এই প্রকার বলের কৃত কাজ নির্ণয়ে সমগ্র গতিপথকে অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরণ $d\vec{r}$-এর সমষ্টি হিসেবে গণ্য করা যায়।

প্রত্যেক ক্ষুদ্র সরণের শুরুতে বস্তুর ওপর যে বল F ক্রিয়ারত থাকে ওই বল উক্ত সরণের জন্য ধ্রুব বিবেচনা করা যায়। ধরি কোনো একটি ক্ষুদ্র সরণ $d\vec{r}$ এবং ওই সরণের জন্য ক্রিয়ারত বল $\vec{F}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ [চিত্র ৫·৭]। বলটিকে $d\vec{r}$-বরাবর একটি অংশে এবং তার লম্ব দিকে অপর একটি অংশে বিভক্ত করি। ধরি অংশক দুটি যথাক্রমে,

$F_r = F\cos\theta$ এবং $F_n = F\sin\theta$



চিত্র ৫·৭

এই ক্ষুদ্র সরণের জন্য বলের $F_{\parallel}$ অংশক কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য, কেননা এই ক্ষুদ্র সরণ ও $F_{\parallel}$-এর মধ্যবর্তী কোণ 90°। তা হলে ওই ক্ষুদ্র সরণের জন্য কাজ,

$$dW = F\,dr\cos\theta = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

কাজেই গতিপথের r_0 অবস্থান হতে r অবস্থানে স্থানান্তরের ক্ষেত্রে কাজ,

$$W = \int_{r_0}^{r} (F\cos\theta)\,dr$$

$$= \int_{r_0}^{r} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5.17)$$

৫.৪ স্থিতিস্থাপক বল ও অভিকর্ষীয় বল এবং সম্পাদিত কাজ
Elastic force and gravitational force and work done

৫.৪.১ স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কৃত কাজ
Work done by elastic force

একটি স্প্রিংকে টেনে প্রসারিত করলে মনে হয় যে, স্প্রিং আমাদের হাতকে বিপরীত দিকে টানছে। নিউটনের তৃতীয় সূত্র থেকে এরূপ প্রতিক্রিয়া বলের উদ্ভব ব্যাখ্যা করা যায়। স্পষ্টত বিকৃত করার চেষ্টাকে স্প্রিংটি বাধা দেয়; স্প্রিংটিকে ছেড়ে দিলে সেটি সঙ্গে সঙ্গে এর প্রাথমিক দৈর্ঘ্য ফিরে পায়। এক্ষেত্রে যে বলের ক্রিয়ায় বস্তু পূর্বের আকার বা আয়তন ফিরে পেল সেই বলই হলো স্থিতিস্থাপক বল।

অর্থাৎ **স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বাইরে থেকে বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর আকার পরিবর্তন ঘটানোর পর বল অপসারণ করলে যে বলের কারণে তা আবার পূর্বের আকার ফিরে পায় তাকে স্থিতিস্থাপক বল বলে।**

স্প্রিং-কে বল প্রয়োগে x সরণ সৃষ্টি করলে স্প্রিং দ্বারা কৃত কাজ $W = \frac{1}{2}kx^2$ হবে। এখানে, k = স্প্রিং ধ্রুবক বা বল ধ্রুবক। আবার বল প্রয়োগে স্প্রিংটিকে সংকুচিত করে x সরণ ঘটাতে কৃত কাজও একই হবে। অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রে একই কাজ হবে। সুতরাং **স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক অর্থাৎ $W \propto x^2$। স্থিতিস্থাপক বলের বিপরীতে সরণ দুই গুণ হলে কাজ চার গুণ হবে।**

৫.৪.২ অভিকর্ষীয় বল দ্বারা কৃত কাজ
Work done by gravitational force

কোনো বস্তুকে ওপর থেকে নিচে নামালে বা নিচ থেকে ওপরে উঠালে অভিকর্ষীয় বল দ্বারা কাজ হয়। অর্থাৎ বস্তুকে ওপরে উঠানো বা নিচে নামানো যা কিছু করা হোক না কেন বস্তু সর্বদা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে একটি বল দ্বারা আকৃষ্ট হয়। পৃথিবীর এই আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বল বলে।

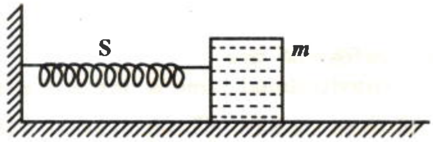
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R, ভর M এবং বস্তুর ভর m এবং h উচ্চতায় বস্তুটি তুলতে বা নামাতে অভিকর্ষ বল $F = \frac{GMm}{R^2}$ দ্বারা কাজ হবে $W = Fh$ $\therefore$ $W = \frac{GMm}{R^2} \times h$, এখানে $\frac{GMm}{R^2}$ ধ্রুব রাশি। সুতরাং **অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ উচ্চতা বা সরণের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $W \propto h$।** সুতরাং **অভিকর্ষ বলের ফলে সরণ তিনগুণ হলে কৃত কাজও তিনগুণ হবে।**

৫.৪.৩ পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কৃত কাজের উদাহরণ
Examples of work done by variable force

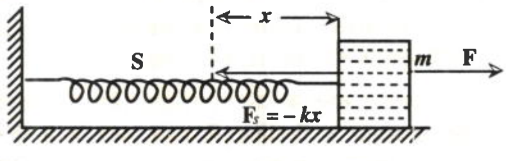
ক. স্প্রিং প্রসারণে সম্পাদিত কাজ (বল $\propto x$) বা স্থিতিস্থাপক বল তথা স্প্রিং বলের বিপরীতে কাজ

মনে করি একটি অনুভূমিক আদর্শ স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দেওয়ালের সাথে আটকিয়ে অপর প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু যুক্ত রয়েছে। বস্তুটি অনুভূমিক এবং ঘর্ষণবিহীন তলের ওপর দিয়ে চলাচল করতে পারে [চিত্র ৫.৮]।

বস্তুটিকে টেনে স্প্রিং S-কে দৈর্ঘ্য বরাবর বিকৃত করলে স্থিতিস্থাপক ধর্মের দরুন স্প্রিং-এ প্রযুক্ত বলের সমান ও বিপরীতমুখী বল সৃষ্টি হয়। একে **প্রত্যায়নক বল (restoring force)** বলে। স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করলে, প্রত্যায়নক বলের মান হুকের সূত্রানুযায়ী দৈর্ঘ্য পরিবর্তনের সমানুপাতিক হবে।



চিত্র ৫·৮



চিত্র ৫·৮(ক)

মনে করি F_s অনুভূমিক বল প্রয়োগে বস্তুটিকে বাম হতে ডান দিকে সরানোর ফলে স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য অনুভূমিক বরাবর x পরিমাণ বৃদ্ধি পেল [চিত্র ৫·৮(ক)]। এই ক্রিয়ার দরুন স্প্রিং-এ $-kx$ পরিমাণ প্রত্যায়নক বল উৎপন্ন হবে। কেননা

$$F_s \propto -x$$

বা, $F_s = -Kx$

[এই প্রত্যায়নক বলের দিক বস্তুটির সরণের বিপরীত দিকে হওয়ায় ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে।]

এখানে K একটি ধ্রুব সংখ্যা। একে স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক (spring constant) বলা হয়।

সংজ্ঞা : স্প্রিং-এর একক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য প্রযুক্ত বলকেই স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক বা স্প্রিং ধ্রুবক বলা হয়। স্প্রিং ধ্রুবকের একক Nm^{-1}। x দৈর্ঘ্য বৃদ্ধিতে F বলের প্রয়োজন হলে স্প্রিং ধ্রুবক, $K = \frac{F}{x}$। স্প্রিং ধ্রুবকের মাত্রা $[K] = MT^{-2}$]

স্প্রিংটিকে প্রসারিত করতে হলে সমমানের বাহ্যিক বল প্রয়োগ করতে হবে। মনে করি প্রযুক্ত বল F।

$$\therefore \quad F = -F_s = -(-Kx) = Kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.18)$$

স্প্রিংটিকে x_1 অবস্থান হতে x_2 অবস্থানে প্রসারিত করতে প্রযুক্ত বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x)\, \vec{dx} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

[$\because$ $\vec{F}$ ও $\vec{dx}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ শূন্য]

$$= \int_{x_1}^{x_2} Kx dx = K\int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} K \left[x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} K \left[x_2^2 - x_1^2\right]$$

$$W = \frac{1}{2} Kx_2^2 - \frac{1}{2} Kx_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.19)$$

এই কাজ ধনাত্মক। সাধিত কাজ স্প্রিং-এর মধ্যে স্থিতিশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে।

স্প্রিং-এর আদি অবস্থান $x_1 = 0$ এবং শেষ অবস্থান $x_2 = x$ ধরলে,

$$W = \frac{1}{2} K x^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.20)$$

অর্থাৎ, **সরণের পরিমাণ x হলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ হবে $\frac{1}{2}Kx^2$।**

[পুন, স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য x পরিমাণ সংকুচিত হলেও সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ, $W = \frac{1}{2}Kx^2$ হবে] ।

জানার বিষয় : স্প্রিং ধ্রুবক নির্ভর করে—

I. স্প্রিং–এর দৈর্ঘ্যের ওপর

II. জ্যামিতিক গঠনের ওপর

III. পদার্থের স্থিতিস্থাপকতার ওপর।

খ. স্প্রিং সংকোচনে কাজ

এক্ষেত্রে $x_1 = 0$ এবং $x_2 = x$ ধরলে স্প্রিং সংকোচনে কাজ $W = \frac{1}{2} Kx^2$ হয় অর্থাৎ স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য x পরিমাণ সংকুচিত করলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ বা কাজ $= \frac{1}{2} Kx^2$। একটি স্প্রিং-এর স্প্রিং ধ্রুবক $2{\cdot}5\ Nm^{-1}$ অর্থ হলো স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য 1 m বৃদ্ধি করার জন্য $2{\cdot}5$ N বল প্রয়োগ করতে হবে।

গ. স্প্রিং বল দ্বারা ঋণাত্মক কাজ

বস্তুর আদি সরণের মান শেষ সরণের মানের চেয়ে ছোট হলে অর্থাৎ $|x_1|<|x_2|$ হলে স্প্রিংটি বস্তুর ওপর ঋণাত্মক কাজ করবে। এক্ষেত্রে $F = F_s = -Kx$ হবে এবং $x_1 = 0$ এবং $x_2 = x$ হলে কাজ, $W = -\frac{1}{2}Kx^2$ হয়।

৫.৪.৪ অভিকর্ষ বল
Gravitational force or force due to gravity

এই বিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। সাধারণত যেকোনো দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বলকে **মহাকর্ষ** বলে। **কিন্তু ভূপৃষ্ঠের ওপরে বা নিকটে অবস্থিত প্রতিটি বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বল (gravitational force or force due to gravity) বলে।** অতএব অভিকর্ষ মহাকর্ষেরই একটি বিশেষ ক্ষেত্র, অভিকর্ষ বলতে পৃথিবীর মহাকর্ষ বোঝায়।

কোনো বস্তুকে অবাধে পড়তে দিলে অভিকর্ষের ক্রিয়ায় বস্তুটি খাড়াভাবে নিচের দিকে পড়তে থাকে। বস্তুটিও পৃথিবীকে সমান ও বিপরীতমুখী বলে আকর্ষণ করে। যেকোনো পার্থিব বস্তুর তুলনায় পৃথিবীর ভর বহুগুণ বেশি বলে এই বলের ক্রিয়ায় গতি উপেক্ষা করা যায়। তাই বস্তুটি পৃথিবীর দিকে পড়ে, পৃথিবী বস্তুর দিকে এগিয়ে যায় না।

পৃথিবীকে R ব্যাসার্ধের একটি সমসত্ত্ব গোলক কল্পনা করলে পৃথিবীর সমস্ত ভর এর কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে বলে ধরতে পারি। সুতরাং ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত m ভরের কোনো বস্তুকে পৃথিবী নিজ কেন্দ্রের দিকে F বলে আকর্ষণ করলে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র অনুযায়ী,

$$F = \frac{GMm}{R^2} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (5.21)$$

পৃথিবীর কেন্দ্রাভিমুখী এই বলই হলো অভিকর্ষ বল। এই অভিকর্ষ বল দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। অতএব অভিকর্ষের ক্রিয়ায় পতনশীল বস্তু প্রকৃতপক্ষে পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে এগোয়। এজন্য রাজমিস্ত্রির দেওয়াল সোজা করার কাজে ঝুলন্ত ওলন দড়ি পৃথিবীর কেন্দ্রাভিমুখী বলে সবসময় উল্লম্ব রেখায় থাকে। কোনো বস্তুকে কপিকলের সাহায্যে নিচে নামানো, ক্রেন দিয়ে ওপরে উঠানো এবং শিশু পার্কে বাচ্চাদের মসৃণ তল থেকে পিছলে নিচে পড়া সবই অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ।

এখন যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R-এর তুলনায় বস্তুর দূরত্ব h খুব ক্ষুদ্র হয় অর্থাৎ $h<<R$ হয় তা হলে (5.21) এবং h-এর গুণফল দ্বারা অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কাজ পাওয়া যায়। অর্থাৎ

$$W = \frac{GMm}{R^2} \times h \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad [5.21(a)]$$

৫.৪.৫ অভিকর্ষীয় বল কর্তৃক কৃত কাজের উদাহরণ
Examples of work done by gravitational force

RMDAC

ক. বস্তু নিচে পতনের ক্ষেত্রে কাজ MAT(19-20)

মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে অভিকর্ষ বলের প্রভাবে 'h' উচ্চতা হতে ফেলা হলো।

∴ কৃত কাজ = বল × সরণ

বা, $W = F \times h = mgh \qquad [\because F = mg] \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (5.22)$

বা, W = ভর × অভিকর্ষীয় ত্বরণ × উচ্চতা

কাজকে অভিকর্ষীয় এককে প্রকাশ করলে, $W = mgh$ অর্থাৎ **$W \propto h$। সুতরাং অভিকর্ষ বলের দিকে কাজ সরণ বা উচ্চতার সমানুপাতিক।**

খ. বস্তু ওপরে উঠানোর ক্ষেত্রে কাজ

'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে 'h' উচ্চতা ওপরে উঠালে

কাজ = ভর × অভিকর্ষীয় ত্বরণ × উচ্চতা বা, $W = mgh \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (5.23)$

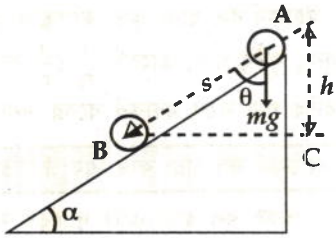
অবশ্য এ কাজ ঋণাত্মক।

অর্থাৎ $\boxed{W = -mgh} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (5.24)$

অর্থাৎ $W \propto h$। অর্থাৎ **অভিকর্ষের বিপরীতে কৃত কাজ বস্তুর উচ্চতা বা সরণের সমানুপাতিক।**

গ. আনত তল বেয়ে নামানোর ক্ষেত্রে কাজ

মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু কোনো একটি মসৃণ নত তল বেয়ে A হতে B-তে সরে এল। যদি g অভিকর্ষীয় ত্বরণ হয়, তবে অভিকর্ষ বল mg বস্তুটিকে খাড়াভাবে নিচের দিকে টানবে [চিত্র ৫·৯]।



চিত্র ৫·৯

ধরি সরণের অভিমুখ এবং অভিকর্ষ বলের অভিমুখের মধ্যে θ কোণ আছে এবং $AB = s$

∴ অভিকর্ষ বল mg-এর দিকে সরণের অংশ $= s\cos\theta$

এখন $AC = h$ দূরত্ব

∴ $h = s\cos\theta$

∴ কাজ, $W = mgs\cos\theta$ বা, $W = mgh$ ... (5.25)

তলটি অনুভূমিকের সাথে α কোণে অবস্থান করলে,

$\theta = (90° - \alpha)$

∴ $W = mgs\cos(90° - \alpha) = mgs\sin\alpha$

স্থিতিস্থাপক বল এবং অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ থেকে দেখা যায় যে,

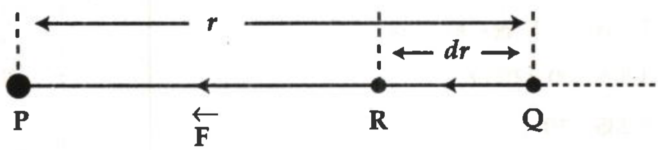
স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ, $W = \frac{1}{2}Kx^2$ ∴ কাজ, $W \propto$ (সরণ)^2

অন্য দিকে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ, $W = mgh$ ∴ কাজ, $W \propto$ সরণ

সুতরাং বলা যায়, **স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক। অপর দিকে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ উচ্চতার বা সরণের সমানুপাতিক। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বৃদ্ধি পেলে এই বল দ্বারা কাজও বৃদ্ধি পায়।**

ঘ. মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ

মনে করি M ভরের একটি বস্তু মহাকর্ষ ক্ষেত্রের P বিন্দুতে অবস্থিত। P থেকে r দূরে m ভরের অন্য একটি বস্তু Q বিন্দুতে অবস্থিত [চিত্র ৫·১০]। এক্ষেত্রে m ভরের বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল মহাকর্ষ বল $F = \frac{GMm}{r^2}$, দিক QP বরাবর।



চিত্র ৫·১০

এখন m ভরের বস্তুকে অসীম হতে ক্ষুদ্র দূরত্ব dr সরিয়ে R বিন্দুতে আনতে কৃত কাজ,

$$W = \int_{\infty}^{r} F dr\cos 0° = \int_{\infty}^{r} F dr = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2} dr$$

$$= GMm\int_{\infty}^{r} r^{-2} dr = -GMm\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) = -\frac{GMm}{r}$$

এখন m ভরের বস্তুটিকে R থেকে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দূরত্ব dr সরিয়ে Q বিন্দুতে আনতে মহাকর্ষ বল দ্বারা কাজ,

$$dW = F dr\cos 180° = -F dr$$

যদি বস্তুটির আদি অবস্থান r_a এবং শেষ অবস্থান r_b হয় মোট কাজ নির্ণয়ে $r = r_a$ থেকে $r = r_b$ সীমার মধ্যে উপরিউক্ত সমীকরণকে সমাকলন করে পাই,

$$W_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} -F dr = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{GMm}{r^2} dr$$

$$= -GMm\left[\frac{1}{r}\right]_{r_a}^{r_b}$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত ধনাত্মক কাজ : উপরিউক্ত সমীকরণ অনুযায়ী বস্তুর কণা দুটির মধ্যে দূরত্ব হ্রাস করা হলে অর্থাৎ $r_b < r_a$ হলে $\frac{1}{r_b} > \frac{1}{r_a}$ হয় ফলে W_{ab} ধনাত্মক হয়; সুতরাং মহাকর্ষ বল দ্বারা কাজ ধনাত্মক কাজ। ওপর থেকে নিচে পতনের ক্ষেত্রে দূরত্ব হ্রাস পায় এবং কাজ ধনাত্মক হয়।

মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত ঋণাত্মক কাজ : উপরিউক্ত সমীকরণ অনুযায়ী যদি $r_b > r_a$ হয় অর্থাৎ যদি দুটি কণার মধ্যে দূরত্ব বৃদ্ধি পায়, তাহলে $\frac{1}{r_b} < \frac{1}{r_a}$ হয়, সেক্ষেত্রে কাজ ঋণাত্মক হয়। নিচ থেকে কোনো বস্তুকে ওপরে উঠালে দূরত্ব বৃদ্ধি পায় ফলে মহাকর্ষ বলের জন্য কাজ ঋণাত্মক হয়।

কাজ : অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ এবং স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজের তফাৎ কোথায় ? [সি. বো. ২০২১]

অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজ দূরত্বের সমানুপাতিক অর্থাৎ $W \propto h$, অপর দিকে স্থিতিস্থাপক বলের বিপরীতে কাজ দূরত্বের বর্গের সমানুপাতিক অর্থাৎ $W \propto x^2$ হয়। অভিকর্ষ বলের বিপরীতে সরণ তিনগুণ হলে কৃত কাজও তিনগুণ হবে। কিন্তু স্থিতিস্থাপক বলের বিপরীতে সরণ তিনগুণ হলে কাজ নয়গুণ হবে।

জানার বিষয় :
I. অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ সরণের সমানুপাতিক, $W \propto x$ ($\because W = mgx$)
II. স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক, $W \propto x^2$ ($\because W = \frac{1}{2}Kx^2$)
III. পৃথিবীর কেন্দ্রমুখী বলই অভিকর্ষ বল।
IV. অভিকর্ষ বল দূরত্বের বর্গের ব্যাস্তানুপাতিক।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.২

১। একটি ঘোড়া ভূমির সাথে 30° কোণে 120 N বল প্রয়োগে একটি বস্তুকে টেনে 2 ms⁻¹ সমবেগে সরাতে পারে। 5 min-এ ঘোড়াটি কত কাজ করবে ?

আমরা জানি,

$$W = Fs\cos\theta = Fs\cos 30^\circ$$
$$= 120 \times 600 \times 0.866$$
$$= 6.235 \times 10^4 \text{ J}$$

এখানে,
$F = 120$ N
$t = 5$ min $= 5 \times 60$ s
$v = 2$ ms^{-1}
$s = vt = 2 \times 5 \times 60$ m $= 600$ m
$\theta = 30^\circ$

২। 3 kg ভরের বস্তুর ওপর একটি বল ক্রিয়াশীল আছে। বস্তুটির অবস্থান সমীকরণ $x = 3t - 4t^2 + t^3$, যেখানে x-এর মান মিটারে এবং t এর মান সেকেন্ডে। $t = 0$ হতে $t = 4$ সেকেন্ড সময়ে বলটি দিয়ে বস্তুর ওপর কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [BUET Admission Test, 2016-17]

আমরা জানি,

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$= m\frac{d^2}{dt^2}(3t - 4t^2 + t^3)$$
$$= m\frac{d}{dt}(3 - 8t + 3t^2)$$
$$= m(-8 + 6t)$$

আবার, $x = 3t - 4t^2 + t^3$

$\therefore \frac{dx}{dt} = (3 - 8t^2 + 3t^2)$

$\therefore dx = (3 - 8t + 3t^2)\,dt$

$$\therefore W = \int_{t_2}^{t_2} F dx = \int_0^4 F(3 - 8t + 3t^2)\,dt$$
$$= m\int_0^4 (-8 + 6t)(3 - 8t + 3t^2)\,dt$$

এখানে,
$m = 3$ kg
$t_1 = 0$
$t_2 = 4$ s
$x = 3t - 4t^2 + t^3$

$$= m\int_0^4 (-24 + 64t - 24t^2 + 18t - 48t^2 + 18t^3)\,dt$$

$$= 3\int_0^4 (18t^3 - 72t^2 + 82t - 24)\,dt$$

$$= 3\left[\frac{18t^4}{4} - \frac{72t^3}{3} + \frac{82t^2}{2} - 24t\right]_0^4$$

$$= 528\text{ J}$$

৩। অনুভূমিক তলের ওপর অবস্থিত একটি বস্তুকে স্প্রিং-এর সাথে যুক্ত করা হলো। 2·4 N বল দ্বারা সাম্যাবস্থা হতে স্প্রিংটিকে 3 cm সংকুচিত করা হলো। স্প্রিং দ্বারা কৃত কাজ কত হবে ?

আমরা জানি,

কাজ, $W = \frac{1}{2}Kx^2$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times (0{\cdot}03)^2$

$= 3{\cdot}6 \times 10^{-2}$ J

এখানে,

$F = 2{\cdot}4$ N

$x = 3$ cm $= 0{\cdot}03$ m

$K = \frac{F}{x} = \frac{2{\cdot}4}{0{\cdot}03} = 80\text{ Nm}^{-1}$

$W = ?$

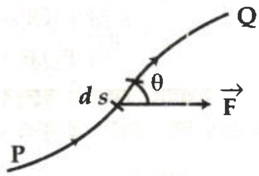
বক্রপথে চলমান কণার ওপর কৃত কাজ
Work done on a particle moving along a curved path

ধরা যাক, একটি কণা পরিবর্তনশীল বল $\vec{F}$-এর ক্রিয়ায় বক্রপথে চলছে [চিত্র ৫·১১]। কণাটির ওপর মোট কৃত কাজের পরিমাণ W।

চিত্রানুসারে কোনো অতি ক্ষুদ্র সরণ $\vec{ds}$ হলে P থেকে Q পর্যন্ত সমগ্র পথটি অতিক্রম করানোর জন্য কণাটির ওপর মোট কৃত কাজের পরিমাণ,

$$W = \int_P^Q \vec{F}.\vec{ds} = \int_P^Q Fs\cos\theta\, d\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.26)$$

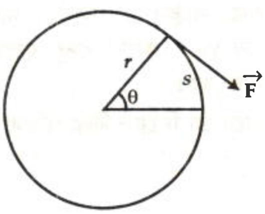
সমীকরণ (5.26)-এ F বা θ কোনোটিই ধ্রুব রাশি নয়।



চিত্র ৫·১১

ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে কৃত কাজ
Work done in rotation

ধরা যাক, একটি চাকা স্পর্শক বল $\vec{F}$-এর ক্রিয়ায় তার কেন্দ্রমুখী অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরছে। ধরা যাক, চাকাটি ওই বলের ক্রিয়ায় θ কোণে ঘুরে গেল [চিত্র ৫·১২]।



চিত্র ৫·১২

অতএব, বলের প্রয়োগ বিন্দুর রৈখিক সরণ s এবং প্রতি সেকেন্ডে চাকাটি n বার ঘুরলে,

$s = r\theta$, [এখানে θ = কৌণিক সরণ $= 2\pi n$]

এখানে, r = চাকার ব্যাসার্ধ

সুতরাং কৃত কাজ, $W = Fs = Fr\theta$

Fr হচ্ছে ঘূর্ণন বিন্দু সাপেক্ষে (θ রেডিয়ানে প্রকাশিত) বলের ভ্রামক বা টর্ক (τ)

$\therefore$ কৃত কাজ, $W = Fr\theta = \tau\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

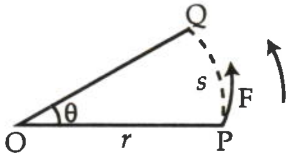
অর্থাৎ কৃত কাজ = টর্ক × কৌণিক সরণ

এখন, টর্কের ক্রিয়ায় চাকার n সংখ্যক আবর্তন সম্পূর্ণ হলে,

কৃত কাজ, $W = \tau(2\pi n) = 2\pi\tau n$ জুল $\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ i(a)

আবর্ত গতির জন্য কৃত কাজ
Work done for rotation

ধরা যাক, একটি বস্তুর ওপর F বল ক্রিয়া করায় 'O' বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুটির আবর্ত গতির সৃষ্টি হয় [চিত্র ৫'১৩]। এক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট সময়ে বস্তুটি P থেকে Q বিন্দুতে গেলে যদি রৈখিক সরণ s হয় তবে আমরা পাই, $s = r\theta$;



চিত্র ৫'১৩

এখানে θ = কৌণিক সরণ এবং r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ। অতএব কৃত কাজ,

$W = F.s = Fr\theta = \tau\theta$ [$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = Fr$ = ঘূর্ণন বিন্দুর সাপেক্ষে বলের ভ্রামক]

$\therefore$ আবর্ত গতির জন্য কৃত কাজ = বলের ভ্রামক (বা টর্ক) × কৌণিক সরণ

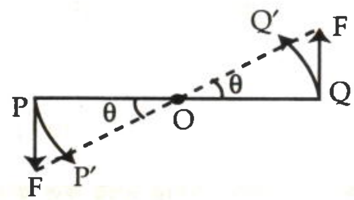
দ্বন্দ্ব দ্বারা কৃত কাজ (Work done by couple) : দ্বন্দ্ব হলো দুটি সমান ও সমান্তরাল বলের একটি সংস্থা (system)। ধরা যাক, একটি বস্তুর ওপর (F, F) দ্বন্দ্বের ক্রিয়ায় বস্তুটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 'θ' কোণে ঘুরে গেল [চিত্র ৫'১৪]। এর ফলে বলদ্বয়ের ক্রিয়াবিন্দু দুটি P থেকে P' এবং Q থেকে Q' বিন্দুতে সরে গেল।

এখন P বিন্দুর সরণের জন্য কৃত কাজ,

$$W_A = F.PP' = F.OP.\theta \; [\because \theta = \frac{PP'}{OP} \text{ (রেডিয়ান এককে) }]$$

এবং Q বিন্দুর সরণের জন্য কৃত কাজ,

$$W_2 = F.QQ' = F.OQ.\theta$$



চিত্র ৫'১৪

$\therefore$ দ্বন্দ্ব কর্তৃক মোট কৃত কাজ,

$$W = W_1 + W_2 = F.OP.\theta + F.OQ.\theta$$

$$= F.\theta.(OP + OQ)$$

$$= F.PQ.\theta = \tau.\theta \; [\tau = F.PQ = \text{দ্বন্দ্বের ভ্রামক (বা টর্ক)}]$$

সুতরাং, কোনো দ্বন্দ্বের প্রভাবে কৃত কাজ = দ্বন্দ্বের ভ্রামক (বা টর্ক) × কৌণিক সরণ। বস্তুটি n পাক ঘুরলে $\theta = 2\pi n$ হয়। সেক্ষেত্রে কৃত কাজ হবে $W = \tau \times 2\pi n$

৫'৫ শক্তি
Energy

কোনো বস্তু কাজ করতে সক্ষম হলে ধরে নিতে হবে তার শক্তি আছে। কোনো বস্তু মোট যে পরিমাণ কাজ করতে পারে তা দিয়ে বস্তুটির শক্তির পরিমাপ করা হয়। অর্থাৎ **কৃত কাজ দিয়ে** আমরা শক্তি পরিমাপ করতে পারি। কোনো বস্তু নিজে কাজ করলে বস্তুটির শক্তি কমে। যে বস্তুর ওপর কাজ করা হয় তার শক্তি বাড়ে। শক্তির ভর, ভার, আয়তন নেই। যার কাজ করার সামর্থ্য যত কম তার শক্তিও তত কম। অতএব বলা যায় **কাজ শক্তির মাপকাঠি**। যদি বলা হয় কোনো বস্তু W পরিমাণ কাজ করল, তবে বুঝতে হবে যে, তার ব্যয়িত শক্তির মান W। কোনো বস্তু বলের বিরুদ্ধে কাজ করলে তখন তা শক্তি হারায়। আবার বস্তুর ওপর বল ক্রিয়া করলে তা শক্তি লাভ করে।

সংজ্ঞা : কাজ করার সামর্থ্যকে শক্তি বলে। যে পরিমাণ কাজ কোনো বস্তু করতে পারে তা দিয়ে শক্তির পরিমাপ হয়। কাজের মতো শক্তিও একটি স্কেলার রাশি।

শক্তির পরিমাণ = কৃত কাজ = প্রযুক্ত বল × বল প্রয়োগে বিন্দুর সরণ।

মোটর ইঞ্জিনে পেট্রোলের বাষ্প, বাষ্পীয় ইঞ্জিনে জলীয় বাষ্পের চাপ পিস্টন দ্বারা সৃষ্টি হয়। সুতরাং বাষ্পের শক্তি আছে। আবার বিদ্যুতেরও শক্তি আছে। এই শক্তিতেই ট্রেন ও কল-কারখানা চলে। শক্তি আছে বলে মহাবিশ্ব চলছে। শক্তি রূপ পরিবর্তন করতে পারে, কিন্তু শক্তি সৃষ্টি বা ধ্বংস করা যায় না। তাই রূপান্তর প্রক্রিয়ায় মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। এ সম্পর্কে শক্তির নিত্যতার সূত্রে আমরা বিস্তারিত জানব। শক্তির বিভিন্ন রূপ আছে যেমন—

(i) যান্ত্রিক শক্তি (Mechanical energy)
(ii) তাপ শক্তি (Heat energy)

(iii) আলোক শক্তি (Light energy)

(iv) শব্দশক্তি (Sound energy)

(v) চৌম্বক শক্তি (Magnetic energy)

(vi) তড়িৎ শক্তি (Electrical energy)

(vii) রাসায়নিক শক্তি (Chemical energy)

(viii) পারমাণবিক শক্তি (Nuclear energy) MAT(12-13)

(ix) সৌর শক্তি (Solar energy)

(x) বায়ু শক্তি (Wind energy)

এই অধ্যায়ে আমরা **যান্ত্রিক শক্তি** আলোচনা করব।

যান্ত্রিক শক্তি
Mechanical energy

কোনো বস্তুর মধ্যে তার পারিপার্শ্বিক অবস্থা বা অবস্থানের সাপেক্ষে অথবা গতির জন্য যদি কাজ করার যে সামর্থ্য তথা শক্তি থাকে, তবে ওই শক্তিকে যান্ত্রিক শক্তি বলে।

যান্ত্রিক শক্তি প্রধানত দুই প্রকার। যথা—

(১) গতিশক্তি (kinetic energy) এবং

(২) স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি (potential energy)।

*** ৫.৫.১ শক্তির রূপান্তর DAT(16-17)
Transformation of energy

এই মহাবিশ্ব জুড়ে শক্তি বিভিন্ন রূপে বিরাজিত। বিভিন্ন প্রকার শক্তি পরস্পরের সাথে সম্পর্কযুক্ত। এক শক্তিকে অন্য শক্তিতে রূপান্তর সম্ভব এবং এর নামই **শক্তির রূপান্তর (Transformation of energy)**।

শক্তি রূপান্তরের কয়েকটি উদাহরণ নিম্নে প্রদত্ত হলো।

(১) পানি উচ্চ স্থান হতে নিম্ন স্থানে প্রবাহিত হয়। উচ্চ স্থানে থাকার সময় তার শক্তি স্থিতিশক্তি। নিম্ন স্থানে প্রবাহিত হবার সময় স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এই **গতিশক্তির সাহায্যে টারবাইন ঘুরিয়ে বিদ্যুৎ শক্তি উৎপন্ন করা হয়। অর্থাৎ যান্ত্রিক শক্তি বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।** MAT(16-17)

(২) বিদ্যুৎ শক্তি যখন বৈদ্যুতিক বাতির মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হয় তখন আমরা আলো পাই। এক্ষেত্রে **বিদ্যুৎ শক্তি আলোক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৩) বৈদ্যুতিক ইস্ত্রিতে তড়িৎ বা বিদ্যুৎ চালনা করে তাপ উৎপন্ন করা হয়। এই তাপের সাহায্যে কাপড়-চোপড় ইস্ত্রি করা হয়। এক্ষেত্রে **বিদ্যুৎ শক্তি তাপ শক্তিতে এবং তাপ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

বৈদ্যুতিক পাখার মধ্য দিয়ে বিদ্যুৎ প্রবাহিত করলে পাখা ঘুরতে থাকে। এ স্থলেও বৈদ্যুতিক শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। DAT(20-21)

(৪) একটি কাঁচা লোহার ওপর অন্তরীত (insulated) তামার তার জড়িয়ে বিদ্যুৎ চালনা করলে লোহার পাতটি চুম্বকে পরিণত হয়। এক্ষেত্রে **বিদ্যুৎ শক্তি চুম্বক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৫) ক্যালসিয়াম, পটাসিয়াম, রুবিডিয়াম প্রভৃতি ধাতুর ওপর আলো পড়লে ইলেকট্রন নির্গত হতে দেখা যায়। ফটো-ইলেকট্রিক কোষ এই নীতির ওপর প্রতিষ্ঠিত। এরূপ একটি কোষে আলো ফেলে বিদ্যুৎ প্রবাহ তৈরি করা হয়। এক্ষেত্রে **আলোক শক্তি বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৬) দুই হাতের তালু পরস্পরের সাথে ঘষলে তাপ উৎপন্ন হয়। এক্ষেত্রে **যান্ত্রিক শক্তি তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৭) ফটোগ্রাফিক ফিল্মের ওপর আলোক সম্পাত করে রাসায়নিক ক্রিয়ার মাধ্যমে আলোক চিত্র তৈরি করা হয়। এক্ষেত্রে **আলোক শক্তি রাসায়নিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৮) ওষুধের কারখানায় শ্রবণোত্তর বা শব্দোত্তর তরঙ্গের সাহায্যে জীবাণু ধ্বংস করা হয় এবং কর্পূরকে পানিতে দ্রবণীয় করা হয়। এ ছাড়া শব্দোত্তর তরঙ্গ দ্বারা বস্ত্রাদির ময়লাও পরিষ্কার করা হয়। এসব ক্ষেত্রে **শব্দ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(৯) আমরা জানি **বৈদ্যুতিক ঘণ্টা বিদ্যুতের সাহায্যে চলে।** টেলিফোনও বিদ্যুতের সাহায্যে চলে। **দুই ক্ষেত্রেই** আমরা শব্দ শুনতে পাই। এস্থলে **বিদ্যুৎ শক্তি শব্দ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(১০) কয়লা পোড়ালে তাপ উৎপন্ন হয়। রাসায়নিক ক্রিয়ার ফলে এটি ঘটে। এক্ষেত্রে **রাসায়নিক শক্তি তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

(১১) বিদ্যুৎ কোষে রাসায়নিক দ্রব্যের বিক্রিয়ার ফলে বিদ্যুৎ উৎপন্ন হয়। এক্ষেত্রে **রাসায়নিক শক্তি তড়িৎ বা বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়।**

শক্তি যখন একরূপ হতে অন্যরূপে পরিবর্তিত হয় তখন এর কোনো ঘাটতি বা বাড়তি ঘটে না। অর্থাৎ শক্তির বিনাশ ও সৃষ্টি উভয়ই অসম্ভব। যখন এক প্রকার শক্তি বিলুপ্ত হয় তখন তা অন্যরূপে আত্মপ্রকাশ করে। **এর নাম শক্তির নিত্যতা বা শক্তির অবিনশ্বরতা** (Conservation of Energy)। **এ সম্পর্কে একটি সূত্র বা বিধি আছে। এর নাম শক্তির নিত্যতা সূত্র বা শক্তির নিত্যতা বিধি। একে শক্তির সংরক্ষণ সূত্রও বলা হয়।**

মডেল তৈরি : মাথায় দেওয়া একটি ক্যাপের ওপর সামনের দিকে একটি আয়তাকার সোলার প্যানেল বসাও। সোলার প্যানেলের সাথে সংযোগকারী তার ও ইলেকট্রনিক সংযোগের মাধ্যমে মোবাইল ফোন এবং চার্জিং করার পয়েন্ট প্রবেশ করাও। ক্যাপ মাথায় দিয়ে চলাফেরা করলে সৌরশক্তির মাধ্যমে মোবাইল ফোন চার্জিত হবে [চিত্র ৫'১৫]। এক্ষেত্রে সৌরশক্তি বিদ্যুৎশক্তিতে রূপান্তরিত হচ্ছে।

চিত্র ৫'১৫

৫'৫'২ শক্তির একক
Unit of energy

যেহেতু কৃত কাজ দিয়েই শক্তির পরিমাপ করা হয় সুতরাং কাজ ও শক্তির একক একই। অর্থাৎ এস. আই. (S.I.) পদ্ধতিতে শক্তির একক জুল (J)।

৫'৫'৩ শক্তির মাত্রা
Dimension of energy

শক্তি ও কাজের মাত্রা একই, $[E] = [ML^2T^{-2}]$

বস্তু গতিশীল হলে সেটি গতিশক্তি অর্জন করে। যেমন m ভরের বস্তু v বেগে গতিশীল হলে $\frac{1}{2}mv^2$ পরিমাণ গতিশক্তি অর্জন করে। শক্তির সবচেয়ে সাধারণ রূপ হচ্ছে যান্ত্রিক শক্তি। কোনো বস্তুর অবস্থান বা গতির কারণে তার মধ্যে যে শক্তি থাকে তাকে যান্ত্রিক শক্তি বলে। যান্ত্রিক শক্তি দুই প্রকার; যথা— (i) গতিশক্তি (Kinetic energy) ও (ii) স্থিতিশক্তি (Potential energy)। এই অধ্যায়ে এ বিষয়ে আলোচনা করব।

অনুধাবনমূলক কাজ : সমবেগে গতিশীল বস্তুর ক্ষমতা বেগের ওপর নির্ভর করে কি না ?

নিউটনের প্রথম সূত্রানুযায়ী সমবেগে গতিশীল রাখতে কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল ত্বরণ বা বল শূন্য হয়। তাই এক্ষেত্রে কোনো কাজ সম্পন্ন হয় না। তাই সমবেগে গতিশীল বস্তুর ক্ষমতা শূন্য হয় যা বেগের ওপর নির্ভরশীল নয়।

৫'৬ গতিশক্তি
Kinetic energy

হাতুড়ি দিয়ে দেয়ালে পেরেক ঠুকলে হাতুড়ি তীব্র বেগে পেরেককে আঘাত করে। তখন পেরেকটি দেয়ালের বাধা অতিক্রম করে ঢুকে যায়। হাতুড়ি তার গতির জন্যই এই কাজ করতে সক্ষম হয় অর্থাৎ হাতুড়িটির গতিশক্তির জন্যই পেরেকটি দেয়ালের বাধা অতিক্রম করতে পারে। তোমরা নদীতে পাল তোলা নৌকা চলতে দেখেছ। নদীর স্রোতের গতিশক্তি নৌকাকে ভাসিয়ে নিয়ে যায়। জোরে বাতাস বইলে পাল টাঙালে নৌকা এগিয়ে যেতে পারে। বায়ু প্রবাহের গতিশক্তিকে পাল টাঙিয়ে কাজে লাগিয়ে নৌকা এভাবে এগোয়।

পাহাড় পর্বত থেকে সমতলে নামার সময় নদী অত্যন্ত খরস্রোতা হয়। স্রোতের গতিশক্তি খুব বেশি বলে নদী বড় বড় পাথর খণ্ডকে গড়িয়ে নিয়ে যায়।

আবার হাই জাম্প বা লং জাম্প দেওয়ার সময় প্রতিযোগীরা স্থির অবস্থা থেকে লাফ দেয় না, কিছু দূর পিছন থেকে দৌড়ে এসে লাফ দেয়। ফলে লাফ দিয়ে অনেক দূর যেতে পারে।

ওপরের সকল ঘটনা লক্ষ করলে দেখা যায় যে, বাইরে থেকে বল প্রয়োগ করে কোনো সচল বস্তুকে থামালে থেমে যাওয়ার আগের মুহূর্ত পর্যন্ত বস্তুটি ওই বলের বিরুদ্ধে মোট যে পরিমাণ কাজ করে তাই দিয়ে বস্তুটির গতিশক্তির পরিমাপ করা যায়।

সংজ্ঞা : কোনো গতিশীল বস্তু তার গতির জন্য কাজ করার যে সামর্থ্য বা শক্তি লাভ করে তাকে বস্তুটির গতিশক্তি বলে। যেকোনো সচল বস্তুর মধ্যে গতিশক্তি থাকে।

একক : গতিশক্তি ও কাজের একক একই। অর্থাৎ গতিশক্তির একক জুল।

মাত্রা : $[E_k] = [\frac{1}{2}mv^2]$

$= [M]\,[LT^{-1}]^2 = [ML^2T^{-2}]$

কোনো বস্তুর গতি চলন ও ঘূর্ণন অথবা চলন-ঘূর্ণন মিলিয়ে জটিল গতিও হতে পারে। অতএব বস্তুর গতিশক্তি রৈখিক গতিশক্তি (translational kinetic energy) বা ঘূর্ণন গতিশক্তি (rotational kinetic energy) বা এই দুই ধরনের গতিশক্তিই হতে পারে। বিনা বাধায় পতনশীল বস্তুর গতিশক্তি হলো রৈখিক গতিশক্তি। ঘুরন্ত বৈদ্যুতিক পাখার গতিশক্তি হলো আবর্ত বা ঘূর্ণন গতিশক্তি। গাড়ির চাকায় এবং ফুটবলে রৈখিক ও আবর্ত দুই ধরনের গতিশক্তি থাকে।

উদাহরণ :

(১) পাথরকে কাচের সঙ্গে ঠেকিয়ে রাখলে কিছু হয় না, কিন্তু পাথর ছুড়ে মারলে কাচ ভেঙে যায়। গতির জন্য পাথরটি ওই কাজ করার সামর্থ্য পায়।

(২) হাতুড়ি দিয়ে দেয়ালে পেরেক ঠুকলে হাতুড়ি তীব্র বেগে পেরেককে আঘাত করে। তখন পেরেকটি দেওয়ালের বাধা অতিক্রম করে ঢুকে যায়। হাতুড়ি তার গতির জন্যই এ কাজ করতে সক্ষম হয়। অর্থাৎ হাতুড়িটির গতিশক্তির জন্যই পেরেকটি দেওয়ালের বাধা অতিক্রম করতে পারে।

(৩) পাহাড় পর্বত থেকে সমতলে নামার সময় নদী অত্যন্ত খরস্রোতা হয়। স্রোতের গতিশক্তি খুব বেশি বলে বড় বড় পাথর খণ্ডকে গড়িয়ে নিয়ে যায়।

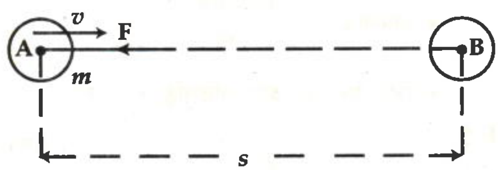
নিজে কর : নদীতে পালহীন একটি নৌকা এবং পালতোলা আর একটি নৌকা পাশাপাশি ভাসিয়ে দাও। জোরে বাতাস বইলে তুমি কী দেখতে পাবে? তুমি দেখবে পালতোলা নৌকা পালহীন নৌকা অপেক্ষা দ্রুত চলছে। এর কারণ ব্যাখ্যা কর।

নদীর স্রোতের গতিশক্তি নৌকাকে ভাসিয়ে নিয়ে যায়। বায়ু প্রবাহের গতিশক্তিকে নৌকায় টাঙানো পাল কাজে লাগিয়ে নৌকাকে দ্রুত বেগে এগিয়ে নিয়ে যায়।

৫·৬·১ গতিশক্তির রাশিমালা প্রতিপাদন
Derivation of equation for kinetic energy

রৈখিক গতির ক্ষেত্রে : গতিশীল বস্তু স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাই গতিশক্তির পরিমাপ।

মনে করি, 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু AB বরাবর v বেগে চলছে। গতির বিপরীত দিকে BA বরাবর তার ওপর F পরিমাণ ধ্রুব বল প্রয়োগ করা হলো। এতে সম-মন্দনের সৃষ্টি হবে। মনে করি, সম-মন্দন $= a$ এবং বস্তুটি A হতে s দূরত্ব অতিক্রম করার পর B বিন্দুতে এসে থেমে গেল। এ ক্ষেত্রে শেষ বেগ $v = 0$।



চিত্র ৫·১৬

$\therefore$ গতিশক্তি $=$ স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত কাজ

$=$ বল $\times$ স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব $= F \times s$

নিউটনের ২য় গতি সূত্র হতে আমরা জানি, বল $=$ ভর $\times$ ত্বরণ বা মন্দন $\therefore$ $F = ma$

বর্ণনা অনুসারে, $0 = v^2 - 2as$

বা, $2as = v^2$ বা, $s = \frac{v^2}{2a}$

ওপরের সমীকরণে F এবং s-এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

গতিশক্তি $= ma \times \frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2} mv^2$ বা, K. E. $= \frac{1}{2} mv^2$

অর্থাৎ **গতিশক্তি (K. E.)** $= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times$ ভর $\times$ বেগ^2 ... ... (5.27)

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি, বস্তুর ওপর একটি পরিবর্তনশীল বল F ক্রিয়া করায় প্রযুক্ত বলের অভিমুখে সরণ হলো ds। অতএব প্রযুক্ত বল দ্বারা কাজ,

$$dW = Fds$$

$$= mads \qquad \left[\because F = ma \text{ এবং } a = \frac{dv}{dt}\right]$$

$$= m\frac{dv}{dt} ds$$

$$= m\frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} \times ds$$

$$= m\frac{ds}{dt} \times \frac{dv}{ds} \times ds = mvdv \qquad \left[\because v = \frac{ds}{dt}\right]$$

$$\therefore\ dW = mvdv \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.28)$$

বস্তুর বেগ শূন্য থেকে বেড়ে v হলে প্রযুক্ত বল মোট যে কাজ করে তা দিয়ে বস্তুর গতিশক্তির পরিমাপ করা হয়। সুতরাং সমীকরণ (5.28) কে 0 এবং v, এই দুই সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

বস্তুর গতিশক্তি, $E_k = W = \int_0^v dW = m\int_0^v vdv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v$

$$= \frac{1}{2} m (v^2 - 0)$$

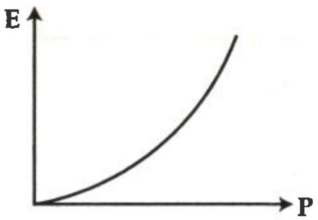
$\therefore\ E_k = \frac{1}{2} mv^2$, এখানে m = ধ্রুবক ... ... (5.29)

$\therefore$ **গতিশক্তি** $= \frac{1}{2} \times$ ভর $\times$ বেগ^2

ইহাই গতিশক্তির রাশিমালা। যেহেতু কোনো বস্তুর ভর ধ্রুব তাই গতিশক্তি বেগের বর্গের সমানুপাতিক [$E_k \propto v^2$]।

সমীকরণ (5.29) থেকে আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে,

- কোনো মুহূর্তে গতিশক্তি হলো ওই মুহূর্তে বস্তুর বেগের বর্গ ও ভরের গুণফলের অর্ধেক।
- নির্দিষ্ট ভরের কোনো বস্তুর গতিশক্তি $E_k \propto v^2$ অর্থাৎ বেগের বর্গের সমানুপাতিক।
- গতিশক্তি $= \frac{1}{2} \frac{(\text{ভরবেগ})^2}{\text{ভর}} = \frac{P^2}{2m}$
- নিট বল শূন্য হলে গতিশক্তি শূন্য হয়।



চিত্র ৫.১৭

গতিশক্তি ও ভরবেগের সম্পর্ক :

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{m^2v^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{P^2}{m} \qquad [\because \text{ভরবেগ, } P = mv]$$

$\therefore$ গতিশক্তি $= \frac{1}{2} \times \frac{(\text{ভরবেগ})^2}{\text{ভর}}$ MAT(14-15,15-16,16-17)

বা, $E_k \propto P^2$ অর্থাৎ গতিশক্তি ভরবেগের বর্গের সমানুপাতিক। ভরবেগ (P) ও গতিশক্তি (E_k) এর মধ্যকার সম্পর্কটি ৫.১৭ চিত্রে দেখানো হলো।
MAT(23-24)

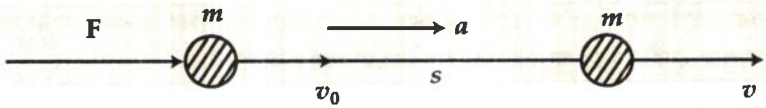
৫.৭ কাজ-শক্তি উপপাদ্য
Work-energy theorem

বিবৃতি : কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান।

প্রতিপাদন : মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 'v_0' আদি বেগে চলছে। গতির দিকে নির্দিষ্ট মানের একটি বল F বস্তুর ওপর প্রয়োগ করলে বস্তুর বেগ বৃদ্ধি পাবে। ফলে বস্তু শক্তি লাভ করবে। মনে করি s দূরত্ব অতিক্রম করার পর শেষ বেগ হলো 'v'। তা হলে কৃত কাজ, $W = F \times s$

বল কর্তৃক সৃষ্ট ত্বরণ, $a = \frac{F}{m} = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$ $\quad [\because v^2 = v_0^2 + 2as]$

বা, $F = ma = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2s}\right)$



চিত্র ৫.১৮

$\therefore$ কৃত কাজ, $W = F \times s = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2s}\right) \times s = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.30)$$

= শেষ গতিশক্তি − আদি গতিশক্তি

$\therefore$ **বলের দ্বারা কৃত কাজ = শক্তি লাভ = গতিশক্তির পরিবর্তন**

সুতরাং কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান। এটি **'কাজ-শক্তি উপপাদ্য'** নামে পরিচিত। সমীকরণ (5.30) উপপাদ্যটি প্রমাণ করে।

সমীকরণ (5.30) থেকে আমরা জানতে পারি যে, ধনাত্মক কাজ অর্থ চূড়ান্ত গতিশক্তি প্রাথমিক গতিশক্তি অপেক্ষা বেশি। অর্থাৎ বস্তুর চূড়ান্ত দ্রুতি প্রাথমিক দ্রুতি অপেক্ষা বড়। সুতরাং ধনাত্মক কাজ বস্তুর দ্রুতি বৃদ্ধি করে; পক্ষান্তরে ঋণাত্মক কাজ বস্তুর দ্রুতি হ্রাস করে।

[বি.দ্র. পরিবর্তনশীল বলের ক্ষেত্রেও উপপাদ্যটি প্রযোজ্য।]

বিকল্প পদ্ধতি

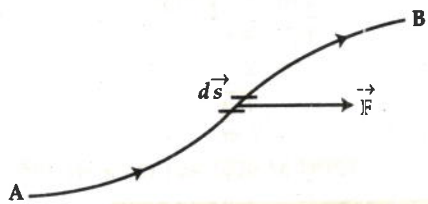
ধরা যাক m ভরের একটি বস্তুকণা A বিন্দু থেকে AB পথে B বিন্দুতে যায়। এই AB পথের একটি অতি ক্ষুদ্র অংশ $\vec{ds}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত করা হয়েছে [চিত্র ৫.১৯]। কণাটির উপর $\vec{ds}$ সরণের সময় ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ হয়, তবে কৃত কাজ,

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

সুতরাং সম্পূর্ণ পথ AB-এর জন্য কৃত কাজ,

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

$$= \int_A^B m\vec{a} \cdot \vec{ds} \qquad [\because \vec{F} = m\vec{a}]$$



চিত্র ৫.১৯

বা, $W = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{ds} = m\int_A^B d\vec{v} \cdot \frac{\vec{ds}}{dt}$

$$= m\int_A^B d\vec{v} \cdot \vec{v} = m\int_A^B v\, dv$$

A ও B বিন্দুতে কণাটির বেগ যথাক্রমে v_a ও v_b হলে,

$$W = m\int_{v_a}^{v_b} v\,dv = \frac{1}{2}m\,[v^2]_{v_a}^{v_b}$$
$$= \frac{1}{2}m\,(v_b^2 - v_a^2)$$
$$= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

অর্থাৎ কৃত কাজ = কণাটির গতিশক্তির পরিবর্তন

এই সম্পর্কটিই কাজ-শক্তি বা কাজ-গতিশক্তি উপপাদ্য।

উল্লেখ্য, বল স্থির হোক বা পরিবর্তনশীল হোক, কৃত কাজ সর্বদাই কণাটির গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান হবে।

কাজটি যাচাই কর : হাই জাম্প বা লং জাম্প দেওয়ার সময় প্রতিযোগীরা স্থির অবস্থা থেকে লাফ দেয় না, কিছু দূর থেকে দৌড়ে এসে লাফ দেয়। ফলে অনেক দূর লাফ দেওয়া যায়। ব্যাখ্যা কর।

সমস্যা সমাধান
Solution of problems

১। গতিশক্তি কি ঋণাত্মক হতে পারে ? না DAT(19-20)

কোনো সচল বস্তুর ভর m এবং বেগ v হলে বস্তুর গতিশক্তি $\frac{1}{2}mv^2$। বস্তুর ভর m কখনোই ঋণাত্মক হতে পারে না। বস্তুর বেগ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে, কিন্তু বেগের বর্গ সবসময় ধনাত্মক হবে। অতএব বস্তুর গতিশক্তি কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না।

২। একটি হালকা বস্তু এবং একটি ভারী বস্তুর ভরবেগ সমান। কোনটির গতিশক্তি বেশি ?

মনে করি, ভারী বস্তুর ভর = M এবং বেগ v_1 এবং হালকা বস্তুর ভর = m এবং বেগ = v_2। বস্তু দুটির ভরবেগ সমান হলে,

$$Mv_1 = mv_2 = P$$

$$\therefore \frac{\text{হালকা বস্তুর গতিশক্তি}}{\text{ভারী বস্তুর গতিশক্তি}} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}Mv_1^2} = \frac{P^2/2m}{P^2/2M} = \frac{M}{m}$$

$\therefore$ m অপেক্ষা M বড়ো হলে $(M > m)$ হালকা বস্তুর গতিশক্তি ভারী বস্তুর গতিশক্তির চেয়ে বেশি হবে।

৩। একটি হালকা বস্তু এবং একটি ভারী বস্তুর গতিশক্তি সমান। কোনটির ভরবেগ বেশি ?

মনে করি, ভারী বস্তুর ভর M ও বেগ v_1 এবং হালকা বস্তুর ভর m ও বেগ v_2। অতএব ভারী বস্তুর ভরবেগ $P_1 = Mv_1$ এবং হালকা বস্তুর ভরবেগ $P_2 = mv_2$। কিন্তু দুটি বস্তুর গতিশক্তি সমান।

$$\therefore \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$
$$\therefore \frac{P_1^2}{2M} = \frac{P_2^2}{2m}$$
$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{M}{m}}$$

m অপেক্ষা M বড়ো হলে $(M > m)$ ভারী বস্তুর ভরবেগ হালকা বস্তুর ভরবেগের চেয়ে বেশি হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৩

১। 14 g ভরের একটি রাইফেলের গুলি 3·6 ms^{-1} বেগে 0·21 m পুরু একটি কাঠের গুঁড়ি ভেদ করতে পারে। বাধাদানকারী বলের মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি কৃত কাজ গতিশক্তির পরিবর্তন,

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

বা, $Fs = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$

বা, $F = \dfrac{\frac{1}{2}\times 14\times 10^{-3}\,[0-(3{\cdot}6)^2]}{0{\cdot}21} = -0{\cdot}432\ \text{N}$

এখানে,
$m = 14\ \text{g} = 14\times 10^{-3}\ \text{kg}$
$v_0 = 3{\cdot}6\ \text{ms}^{-1}$
$v = 0$
$s = 0{\cdot}21\ \text{m}$

২। 10 ms^{-1} বেগে ছুটে আসা একটি ক্রিকেট বলকে ব্যাট দিয়ে বিপরীত দিকে 15 ms^{-1} বেগে ফেরত পাঠানো হলো। বলটির গতিশক্তির পরিবর্তন 7·5 J হলে বলটির ভরবেগের পরিবর্তন নির্ণয় কর।

ক্রিকেট বলের ভর m হলে এর গতিশক্তির পরিবর্তন,

$$\Delta E = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$
$$= \frac{1}{2} \times m \times (15^2 - 10^2)$$
$$= \frac{1}{2} m \times 125 = 62·5 \text{ mJ}$$

এখানে,
বলটির বেগ, $v_1 = 10 \text{ ms}^{-1}$
বলটির বিপরীত দিকে বেগ, $v_2 = 15 \text{ ms}^{-1}$
গতিশক্তির পরিবর্তন, $\Delta E = 7·5$ J
ভরবেগের পরিবর্তন, $\Delta P = ?$

প্রশ্নানুসারে,

$$7·5 = 62·5 \text{ m}$$
$$\therefore \quad m = \frac{7·5}{62·5} = 0·12 \text{ kg}$$

এখন বলের ভরবেগের পরিবর্তন,

$$\Delta P = m\{v_2 - (-v_1) = m(v_2 + v_1)$$
$$= 0·12 \times (15 + 10) = 0·12 \times 25 = 3 \text{ kgms}^{-1}$$

৩। 20 g ভরের একটি গুলি 5 kg ভরবিশিষ্ট একটি বন্দুক হতে ছুড়লে 300 ms^{-1} বেগে নির্গত হয়। রাইফেল থেকে নির্গত গুলিটি একটি তক্তা ভেদ করতে পারে। (ক) গুলির বেগ তিনগুণ হলে একই পুরুত্বের কয়টি তক্তা ভেদ করতে পারবে ? (খ) গুলি ও বন্দুকের ভরবেগ একই হওয়া সত্ত্বেও গতিশক্তি ভিন্ন হবে কী ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) এখানে ১ম ক্ষেত্রে গুলির ভর, $m = 20 \text{ g} = 0·02$ kg এবং গুলির বেগ $v_1 = 300 \text{ ms}^{-1}$
২য় ক্ষেত্রে, গুলির বেগ তিনগুণ করা হলে, $v_2 = 3v_1 = 3 \times 300 = 900 \text{ ms}^{-1}$
১ম ক্ষেত্রে গতিশক্তি,

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \times 0·02 \times (300)^2 = 900 \text{ J}$$

এই গতিশক্তি নিয়ে 1টি তক্তা ভেদ করতে পারে।

২য় ক্ষেত্রে গতিশক্তি,

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \times 0·02 \times (900)^2$$
$$= 8100 \text{ J} = 9 \times 900 \text{ J}$$

= 9 × 1টি তক্তা ভেদ করতে পারে

= 9টি তক্তা ভেদ করতে পারে।

(খ) আমরা জানি গুলির গতিশক্তি,

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 v_1)^2}{m_1} = \frac{P_1^2}{2m_1}$$

এখানে,
গুলির ভর, $m_1 = 20 \text{ g} = 0·02$ kg
বন্দুকের ভর, $m_2 = 5$ kg
গুলির বেগ, $v_1 = 300 \text{ ms}^{-1}$
বন্দুকের বেগ, $v_2 = ?$

আবার বন্দুকের গতিশক্তি,

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_2 v_2)^2}{m_2} = \frac{P_2^2}{2m_2}$$

$$\therefore \quad \frac{E_{k_1}}{E_{k_2}} = \frac{P_1^2}{2m_1} \times \frac{2m_2}{P_2^2}$$
$$= \frac{P_1^2 \times 2m_2}{2m_1 \times P_1^2} \quad (\because P_1 = P_2)$$
$$= \frac{m_2}{m_1} = \frac{5}{0·02}$$
$$\therefore \quad \frac{E_{k_1}}{E_{k_2}} = \frac{5}{0·02}$$

বা, $E_{k_1} : E_{k_2} = 5 : 0·02$

সুতরাং গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায় যে, বন্দুক ও গুলির ভরবেগ একই হওয়া সত্ত্বেও গতিশক্তি ভিন্ন হবে।

৪। 2 kg ভরের একটি বস্তু 30 m উচ্চতাসম্পন্ন একটি বিল্ডিং-এর ছাদ থেকে নিচে ফেলে দেয়া হলো। (i) বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি, (ii) বস্তুটি যে বেগে ভূমি স্পর্শ করে, (iii) বস্তুটি সর্বোচ্চ গতিশক্তি এবং (iv) ভূমি হতে 3 m উঁচুতে বস্তুটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি নির্ণয় কর।

(i) বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি $= mgh = 2 \times 9.8 \times 30 = 588$ J

(ii) মনে করি, বস্তুটি v বেগে ভূমি স্পর্শ করে।

এখন, ছাদে থাকাকালীন বস্তুটির স্থিতিশক্তি = ভূমি স্পর্শ করার সময় বস্তুটির গতিশক্তি অর্থাৎ $mgh = \frac{1}{2}mv^2$

$\therefore \quad 588 = \frac{1}{2} \times 2 \times v^2$

বা, $v^2 = 588$

$\therefore \quad v = \sqrt{588} = 24.25 \text{ ms}^{-1}$

(iii) বস্তুটির সর্বোচ্চ গতিশক্তি = বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি

অতএব, বস্তুর সর্বোচ্চ গতিশক্তি = 588 J

(iv) ভূমি হতে 3 m উঁচুতে বস্তুটির স্থিতিশক্তি $= 2 \times 9.8 \times 3 = 58.8$ J

ওই স্থানে বস্তুটির গতিশক্তি = স্থিতিশক্তি হ্রাস $= 588 - 58.8 = 529.2$ J

৫। একজন বালক ও একজন লোক একত্রে দৌড়াচ্ছেন। বালকটির ভর লোকটির ভরের অর্ধেক এবং লোকটির গতিশক্তি বালকটির গতিশক্তির অর্ধেক। লোকটি যদি তার বেগ 1 ms⁻¹ বৃদ্ধি করেন তবে তার গতিশক্তি বালকটির গতিশক্তির সমান হয়। এদের আদিবেগ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১, ২০০৩; সি. বো. ২০০৩; Admission Test : BUET 2015–16 (মান ভিন্ন); CKRUET 2021-22]

এখানে, বালকের ভর $= m_1$
লোকের ভর, $m_2 = 2m_1$
বালকের আদিবেগ, $v_1 = ?$
লোকের আদিবেগ, $v_2 = ?$
লোকের শেষ বেগ, $v_2' = v_2 + 1$

গতিশক্তির সমীকরণ থেকে পাই,

বালকের গতিশক্তি, $KE_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

এবং লোকটির গতিশক্তি,

$$KE_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m_1v_2^2$$
$$= m_1 v_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

প্রশ্নমতে লোকটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}$(বালকের গতিশক্তি)

$$m_1v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2\right)$$

$\therefore \quad 2m_1v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$

আবার, $v_2' = v_2 + 1$ হলে প্রশ্নমতে $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = m_1(v_2+1)^2$

সমীকরণ (iii) থেকে প্রাপ্ত $\frac{1}{2}m_1v_1^2$-এর মান বসিয়ে পাই,

$$2m_1v_2^2 = m_1(v_2+1)^2$$

বা, $2v_2^2 = v_2^2 + 2v_2 + 1$

বা, $v_2^2 - 2v_2 - 1 = 0$

$\therefore \quad v_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

বেগ ধনাত্মক বলে, $v_2 = 1 + \sqrt{2} = 2.41 \text{ ms}^{-1}$

সমীকরণ (iii) হতে পাই,

$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = 2\,m_1v_2^2$

বা, $v_1^2 = 4 \times (2.41)^2$

বা, $v_1 = \sqrt{23.2324}$

$\therefore \quad v_1 = 4.82 \text{ ms}^{-1}$

উত্তর : বালকের আদি বেগ 4.82 ms^{-1} এবং লোকের আদি বেগ 2.41 ms^{-1}

৬। 40 kg ভরের একটি ট্রলি 180 J গতিশক্তিসহ একটি অনুভূমিক রাস্তায় চলাকালে এর মধ্যে 20 kg ভরের একটি বস্তু খাড়াভাবে নামিয়ে দিলে মোট গতিশক্তি কত হবে ?

ধরি, ১ম বস্তুর বেগ = v_1

গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m v_1^2 = 180$ J

বা, $\frac{1}{2} \times 40 \times v_1^2 = 180$ J

বা, $v_1^2 = \frac{2 \times 180}{40} = 9\ m^2s^{-2}$

$\therefore\ v_1 = 3\ ms^{-1}$

এখানে,
১ম বস্তুর ভর, $m_1 = 40$ kg
২য় বস্তুর ভর, $m_2 = (40 + 20) = 60$ kg
১ম বস্তুর গতিশক্তি, $E_{k_1} = 180$ J
২য় বস্তুর গতিশক্তি, $E_{k_2} = ?$

আমরা জানি, গতিশীল বস্তুর ভরের পরিবর্তন করা হলে এর ভরবেগের কোনো পরিবর্তন হয় না।

$\therefore\ m_1 v_1 = m_2 v_2$

বা, $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{40 \times 3}{60} = 2\ ms^{-1}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে গতিশক্তি,

$E_{k_2} = \frac{1}{2} m^2 v_2^2 = \frac{1}{2} \times 60 \times (2)^2 = 120$ J

$\therefore$ মোট গতিশক্তি = 120 J

৭। 6 kg ওজনের একটি ব্লক মসৃণ অনুভূমিক টেবিলের ওপর 3 ms^{-1} বেগে চলাকালীন অবস্থায় একটি স্প্রিংকে আঘাত করল এবং স্থিরাবস্থায় এল। স্প্রিং–এর বল ধ্রুবক 25 Nm^{-1} হলে স্প্রিংটি কতটা সংকুচিত হবে ?

আমরা জানি,

ব্লকের গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times (3)^2 = 27$ J

এখানে,
ব্লকের ভর, $m = 6$ kg
ব্লকের বেগ, $v = 3\ ms^{-1}$
বল ধ্রুবক, $K = 25\ Nm^{-1}$

এই গতিশক্তি স্প্রিংটিকে সংকুচিত করতে ব্যয়িত হয়।

এখন, স্প্রিং–এর সংকোচন x হলে, আমরা পাই,

$\frac{1}{2} Kx^2 = 27$

$\therefore\ x = \sqrt{\frac{27 \times 2}{25}} = 1{\cdot}47$ m

৮। ভূমি হতে 5 m উঁচু স্থান থেকে 2 kg ভরের একটি বস্তু 3 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে উৎক্ষেপণ করা হলো। ভূমি স্পর্শ করার ঠিক আগের মুহূর্তে বস্তুটির গতিশক্তি কত ?

ধরা যাক, ভূমি স্পর্শ করার আগের মুহূর্তে বস্তুটির বেগ = v

বস্তুটি যখন প্রক্ষেপণ বিন্দুতে ফিরে আসে তখন এর বেগ 3 ms^{-1} (নিচের দিকে)।

অতএব,

$v^2 = u^2 + 2gh$

$= (3)^2 + 2 \times 9{\cdot}8 \times 5$

$= 9 + 98 = 107\ (ms^{-1})^2$

এখানে,
$h = 5$ m
$u = 3\ ms^{-1}$
$m = 2$ kg
E = ?

সুতরাং ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে বস্তুর গতিশক্তি,

$E = \frac{1}{2} m v^2$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 107 = 107$ J

৫·৮ স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি
Potential energy

সংজ্ঞা : বস্তু তার অবস্থানের জন্য যে শক্তি অর্জন করে অথবা বস্তুস্থিত কণাসমূহের পারস্পরিক অবস্থান পরিবর্তনের জন্য বস্তু যে শক্তি অর্জন করে তাকে বস্তুর স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি বলে।

ধর এক খণ্ড ইট ছাদের ওপর উঠিয়ে রেখে দিলে, আবার মোটরের সাহায্যে পানি তুলে ছাদের ওপর রক্ষিত একটি ট্যাংকে রেখে দিলে। উভয় ক্ষেত্রে দেখা যাবে যে ইট এবং পানি কম-বেশি শক্তি প্রাপ্ত হয়েছে। এরূপ সকল শক্তিই হলো **স্থিতিশক্তি**। কোনো বস্তুর স্থিতিশক্তি বস্তুর ভর, ভূমি থেকে উচ্চতা এবং পরীক্ষাধীন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের ওপর নির্ভর করে।

উদাহরণ :

(ক) খেলনার মোটর গাড়িতে স্প্রিং লাগানো থাকে [চিত্র ৫·২০]। এই স্প্রিং-এ দম দিলে তা আকারে ছোট হয়। এই আকার পরিবর্তনের জন্য আমরা কাজ করি যা স্থিতিশক্তিরূপে স্প্রিং-এ সঞ্চিত হয়। দম ছেড়ে দিলে স্প্রিং-এর প্যাঁচ খুলে পুনরায় পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে। স্প্রিং-এর সাথে খেলনার চাকা লাগানো থাকে। ফলে চাকা ঘুরতে থাকে অর্থাৎ স্প্রিং স্থিতিশক্তির দরুন গাড়ি চালাতে কাজ করে।

চিত্র ৫·২০

(খ) হাত ঘড়িতে স্থিতিস্থাপক স্প্রিং-এর সাথে ঘড়ির চাকা যুক্ত থাকে [চিত্র ৫·১৮]। এই স্প্রিং-এ দম দিলে তা আকারে ছোট হয়। এই আকার পরিবর্তন তথা দম দেওয়ার জন্য আমরা কাজ করি যা স্প্রিং-এর মধ্যে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত হয়। স্প্রিং-এর সাথে ঘড়ির কাঁটার এমন একটি সংযোগ থাকে যে স্প্রিং প্যাঁচ খুলে উল্টা দিকে ঘুরে আগের অবস্থায় ফিরে আসার সময় ঘড়ির কাঁটা ঘুরতে থাকে। স্প্রিং-এর স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে পরিণত হয়।

এরূপ ধনুকের ছিলাতে তীর লাগিয়ে টানলে, ধাতব পাতকে বাঁকালে, রবারকে প্রসারণ করলে সকলেই আকার পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি লাভ করে।

(গ) উচ্চে অবস্থিত পানিতে, পাহাড়ের চূড়ায় বরফে এবং আকাশের মেঘে অবস্থান পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি সঞ্চিত থাকে।

কোনো একটি বস্তু বর্তমান অবস্থা হতে অন্য কোনো স্বাভাবিক বা প্রমাণ অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাই স্থিতিশক্তির পরিমাপ।

কাজ : সূর্যের চারদিকে আবর্তনের জন্য গ্রহগুলোর স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি কেমন হয় ব্যাখ্যা কর।

সূর্যের চারদিকে আবর্তনকালে গ্রহগুলোর মোটশক্তি ধ্রুব বা স্থির থাকে। প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের ফোকাসে রেখে উপবৃত্তাকার পথে সূর্যকে প্রদক্ষিণ করে। সূর্য থেকে গ্রহের দূরত্ব অনেক বেশি, তাই এর গতি খুব ধীর হয়। অর্থাৎ এর গতিশক্তি খুব কম হয়। পক্ষান্তরে এর স্থিতিশক্তি সর্বাধিক হয়। এখন কক্ষপথে গ্রহের দূরত্ব যখন কম হয় তখন এর গতিশক্তি বাড়ে এবং স্থিতিশক্তি কমে; কিন্তু মোট শক্তি সবসময়ই ধ্রুব থাকে।

৫·৮·১ স্থিতিশক্তির প্রকারভেদ
Types of potential energy

স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি বিভিন্ন প্রকার যার কয়েকটি নিচে দেওয়া হলো :

(১) অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি বা অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি (Gravitational potential energy)

(২) স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি (Elastic potential energy)

(৩) তড়িৎ বিভবশক্তি (Electric potential energy)

এখানে অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি, স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি ও তড়িৎ বিভবশক্তি আলোচনা করা হলো।

১. অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি
Gravitational potential energy

কোনো একটি বস্তুকে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে ওপরে তুলতে বাইরের কোনো উৎস বা প্রতিনিধি (agent) প্রয়োজন হয়। এই কাজ বস্তুর মধ্যে স্থিতিশক্তি বা বিভবশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে। এর নাম অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি। এক্ষেত্রে ভূপৃষ্ঠকে প্রামাণ্য তল (reference level) হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

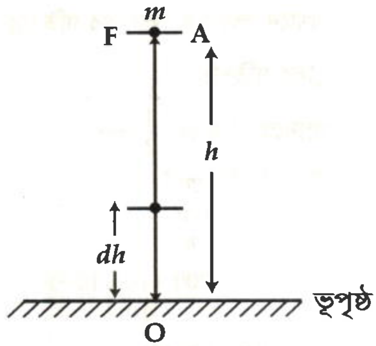
এখন শক্তির পরিমাপ করা যাক—

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি m ভরের একটি বস্তুকে ভূপৃষ্ঠ থেকে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে অতি ক্ষুদ্র উচ্চতা dh পর্যন্ত উঠানো হলো। এতে কৃত কাজ,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{h}$$

বা, $$dW = Fdh \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.31)$$

$$[\because \theta = 0°]$$



চিত্র ৫.২১

এখানে F = বাহ্যিক উৎস কর্তৃক প্রযুক্ত বল এবং F ও dh-এর মধ্যবর্তী কোণ শূন্য।

একটি বস্তুকে ওপরে উঠাতে হলে এর ওজনের সমপরিমাণ বল ওপর দিকে প্রয়োগ করতে হবে।

∴ **প্রযুক্ত বল, F = বস্তুর ওজন =** mg

সুতরাং, বস্তুটিকে h উচ্চতায় A স্থানে [চিত্র ৫.২১] উঠাতে হলে মোট কৃত কাজের পরিমাণ সমীকরণ (5.31)-এ প্রদত্ত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কাজের সমষ্টির সমান।

∴ অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি = বস্তুটিকে ভূপৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় তুলতে মোট কাজ

$$P.E. = \int_0^h Fdh = \int_0^h mgdh$$

স্বল্প উচ্চতার জন্য g-এর মান ধ্রুব ধরে আমরা লিখতে পারি,

$$P.E. = mg\int_0^h dh = mg[h]_0^h = mg[h-0] = mgh$$

অর্থাৎ অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি

$$P.E. = mgh \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.32)$$

= ভর × অভিকর্ষীয় ত্বরণ × উচ্চতা

[**বি. দ্র.** উল্লেখ্য বস্তু যতই নিচে নামতে থাকবে h-এর মান ততই কমবে এবং অভিকর্ষীয় বিভবশক্তিও কমতে থাকবে। ভূপৃষ্ঠে h-এর মান শূন্য হওয়ায় অভিকর্ষীয় বিভবশক্তিও শূন্য হবে।]

কোনো বস্তুর অভিকর্ষীয় বিভবশক্তির মান প্রামাণ্য তলের সাপেক্ষে বস্তুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে। সমুদ্র পৃষ্ঠকে প্রামাণ্য তল বিবেচনা করে কোনো অবস্থানের বিভবশক্তি এবং কোনো উঁচু পাহাড়ের চূড়া প্রামাণ্য তল বিবেচনা করলে ওই একই অবস্থানের বিভবশক্তি এক হবে না, ভিন্নতর হবে। প্রকৃতপক্ষে কোনো স্থানের বিভবশক্তির পরম মান নির্ণয় করা যায় না, প্রমাণ তল বা প্রসজ্ঞা তল সাপেক্ষে বিভবশক্তির পরিবর্তন নির্ণয় করা হয়।

বিভবশক্তির মান ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। এটা নির্ভর করে প্রসজ্ঞা বা প্রামাণ্য তলের ওপর। ভূপৃষ্ঠকে প্রামাণ্য তল বিবেচনা করলে ওপরের দিকে বিভব শক্তি ধনাত্মক হবে আবার ভূগর্ভে বা খনিতে বিভব শক্তি ঋণাত্মক হবে।

কাজ : দুটি পানিপূর্ণ চৌবাচ্চা নাও যাদের নির্গম নল একই আকৃতির। একটি চৌবাচ্চাকে ভূমিতে রাখ। অন্য চৌবাচ্চাকে দালানের ছাদের ওপর স্থাপন কর। এবার দুটি চৌবাচ্চার নির্গম নলকে খুলে দাও। কোন চৌবাচ্চার পানির বেগ বেশি হবে?

ছাদের ওপরের চৌবাচ্চা উঁচু জায়গায় থাকার জন্য স্থিতিশক্তি অর্জন করে। তাই নির্গম নল খুলে দিলে ভূমিতে রাখা চৌবাচ্চা অপেক্ষা ছাদে রাখা চৌবাচ্চার পানি বেশি বেগে প্রবাহিত হবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি বস্তুর শক্তি আছে কিন্তু ভরবেগ নেই অথবা ভরবেগ আছে কিন্তু শক্তি নেই—এরকম হওয়া কী সম্ভব?

উঁচুতে অবস্থিত স্থির কোনো বস্তুর স্থিতিশক্তি থাকে; কিন্তু কোনো ভরবেগ থাকে না। আবার কোনো বস্তুর ভরবেগ থাকলে অবশ্যই বেগ থাকবে। সুতরাং ওই বস্তুর গতিশক্তি থাকবে। অতএব কোনো বস্তুর শক্তি থাকলে ভরবেগ নাও থাকতে পারে, তবে ভরবেগ থাকলে অবশ্যই শক্তি থাকবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৪

১। একটি বন্দুকের স্প্রিংকে 4 cm সংকুচিত করে 10 g ভরের একটি গুলি ছোড়া হলো। স্প্রিংটি যখন সাম্যাবস্থায় পৌঁছে তখন সদ্যমুক্ত গুলির বেগ কত? (স্প্রিং ধ্রুবকের মান 200 Nm^{-1})

দেওয়া আছে,

K = স্প্রিং ধ্রুবক = 200 Nm^{-1}

দৈর্ঘ্য সংকোচন, $x = 4\ cm = 4 \times 10^{-2}\ m$

m = গুলির ভর = $10\ g = 10^{-2}\ kg$

এখানে সংকুচিত স্প্রিং-এর গতিশক্তি $= \frac{1}{2} Kx^2$

গুলির গতিশক্তি $= \frac{1}{2} mv^2$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} mv^2$

বা, $Kx^2 = mv^2$

বা, $v^2 = \frac{Kx^2}{m}$

$= \frac{200 \times (4 \times 10^{-2})^2}{10^{-2}} = 32$

$\therefore\ v = 5{\cdot}657\ ms^{-1}$

২। দেখাও যে, পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রমে গতিশক্তি যতটুকু বৃদ্ধি পায় বিভবশক্তি ততটুকু হ্রাস পায়।

মনে করি, গতিশক্তি = T

বিভবশক্তি = V

মোট শক্তি, $E = T + V$ ... ... (i)

আরও মনে করি নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রমে, গতিশক্তি ΔT পরিমাণ বৃদ্ধিতে বিভবশক্তি ΔV পরিমাণ হ্রাস পায়।

$\therefore$ পরিবর্তিত স্থিতিশক্তি + পরিবর্তিত গতিশক্তি = মোট শক্তি

$\therefore\ T + \Delta T + V - \Delta V = E$ ... ... (ii)

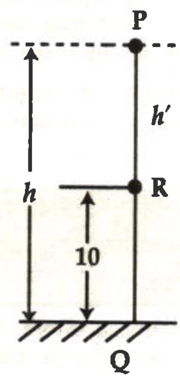
সমীকরণ (ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$\Delta T - \Delta V = 0$

বা, $\Delta T = \Delta V$

$\therefore$ গতিশক্তির বৃদ্ধি = বিভবশক্তি হ্রাস

*** ৩। একটি বস্তুকে নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে ফেলে দেয়া হলো। ভূমি হতে 10m উচ্চতায় গতিশক্তি বিভবশক্তির দ্বিগুণ হলে কত উচ্চতা থেকে বস্তুটি ফেলা হয়েছিল? [সি. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০০৬; KUET Admisstion Test : 2019-20]



মনে করি, P বিন্দু হতে m ভরের বস্তুটিকে ফেলা হলো এবং R বিন্দুতে বস্তুটির গতিশক্তি = 2 × বিভবশক্তি

R বিন্দুতে বিভবশক্তি, $E_p = mgx$

$= mg \times 10 = 10\,mg$ ... ... (i)

ধরা যাক, R বিন্দুতে বস্তুটির বেগ $= v$

আমরা জানি, $v^2 = v_0^2 + 2gh'$

বা, $v^2 = 2g(h - x)$ $[\because v_0 = 0]$

$= 2g(h - 10)$

R বিন্দুতে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \times 2g(h - 10)$

$= mg(h - 10)$

প্রশ্নানুসারে,

$mg(h - 10) = 2 \times 10\,mg = 20\,mg$ ... ... (ii)

$\therefore\ h - 10 = 20$

বা, $h = 20 + 10 = 30\ m$

উত্তর : উচ্চতা 30 m

৪। স্থির অবস্থায় থাকা 50 kg ভরের একটি গাড়ি নির্দিষ্ট বলের ক্রিয়ায় 2 s পর 15 ms^{-1} বেগ অর্জন করে। এর ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর এবং 4 s পর এর গতিশক্তি কত হবে ?

এখানে,
$m = 50$ kg
$v_0 = 0$
$v = 15\ ms^{-1}$
$t = 2$ s
ত্বরণ, $a = ?$
বল, F = ?
$t_1 = 4$s
4 sec পর বেগ, $v_1 = ?$
4 sec পর গতিশক্তি, K = ?

আমরা জানি, $F = ma$

আবার, $v = v_0 + at$

বা, $15 = 0 + a \times 2$

বা, $a = \frac{15}{2} = 7.5\ ms^{-2}$

$\therefore\ F = ma = 50 \times 7.5 = 375$ N

আবার, $v_1 = v_0 + at_1$
$= 0 + 7.5 \times 4 = 30\ ms^{-1}$

গতিশক্তি, $K = \frac{1}{2} mv_1^2$
$= \frac{1}{2} \times 50 \times (30)^2 = 22500$ J

৫। 100 m উচ্চতা থেকে 5 kg ভর মুক্তভাবে অভিকর্ষের টানে পড়তে থাকলে 4 sec পরে ভরটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি কত হবে ? [RUET Admission Test, 2010-11]

এখানে,
$h = 100$ m
$m = 5$ kg
$u = 0$
$t = 4$ s
$g = 9.8\ ms^{-2}$
K.E. = ?
P.E. = ?

আমরা জানি, $v = u + gt$

সুতরাং, 4 sec পরের বেগ,

$v = u + gt = 0 + 9.8 \times 4 = 39.2\ ms^{-1}$

$\therefore$ গতিশক্তি $= \frac{1}{2} mv^2$
$= \frac{1}{2} \times 5 \times (39.2)^2 = 3841.6$ J

4s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব h হলে,

$h = \frac{1}{2} \times gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4^2 = 78.4$ m

ভূমি হতে উচ্চতা, $h_1 = 100 - h = 21.6$ m

স্থিতিশক্তি, $mgh_1 = 5 \times 9.8 \times 21.6 = 1058.6$ J

৬। একটি বন্দুকের স্প্রিং–এর বল ধ্রুবক $1.8 \times 10^4\ Nm^{-1}$। যখন লোড করা হয় তখন তা 12 cm সংকুচিত হয়। (ক) লোড অবস্থায় স্প্রিং-এর বিভবশক্তি নির্ণয় কর। (খ) যখন স্প্রিংটিকে মুক্ত করা হয় তখন গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। গুলির ভর 0.36 g হলে নির্গমনের সময় এর বেগ কত হবে নির্ণয় কর।

এখানে,
বল ধ্রুবক, $K = 1.8 \times 10^4\ Nm^{-1}$
সংকোচন, $x = 12$ cm $= 0.12$ m
গুলির ভর, $m = 0.36$ g $= 0.36 \times 10^{-3}$ kg
বিভব শক্তি, U = ?
বেগ, $v = ?$

(ক) আমরা জানি,

স্প্রিং-এর বিভব শক্তি,

$$U = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} \times 1.8 \times 10^4 \times (0.12)^2$$
$$= 129.6 \text{ J}$$

(খ) স্প্রিং-এর গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$

এখন প্রশ্নানুসারে, স্প্রিং-এর বিভব শক্তি = গতিশক্তি

$$129.6 = \frac{1}{2} mv^2$$

$$v^2 = \frac{129.6 \times 2}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{129.6 \times 2}{m}}$$

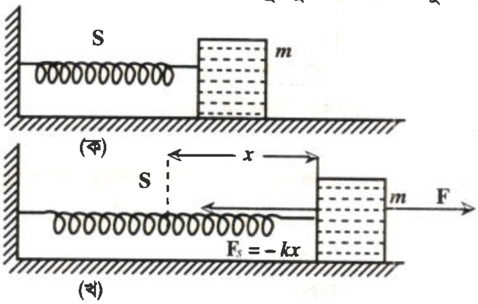
$$= \sqrt{\frac{129.6 \times 2}{0.36 \times 10^{-3}}} = 848.53\ ms^{-1}$$

২. স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি
Elastic potential energy

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে একটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করা হলে বস্তুর বিকৃতি ঘটে। বিকৃতি ঘটাতে বস্তুর ওপর কাজ সাধিত হয়। এই কাজ বস্তুর মধ্যে স্থিতি বা বিভবশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে। এর নাম **স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি**।

স্প্রিং-এ সৃষ্ট বিভবশক্তি নিম্নের আলোচনা থেকে বোঝা সহজ হবে।

স্প্রিং-এর বিভবশক্তি : ধরি একটি অনুভূমিক আদর্শ স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দেওয়ালের সাথে আটকানো এবং অপর প্রান্তে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু যুক্ত আছে। বস্তুটি অনুভূমিক ও ঘর্ষণহীন তলের ওপর দিয়ে যাতায়াত করতে পারে [চিত্র ৫·২২]। বস্তুটিকে টেনে স্প্রিংটিকে দৈর্ঘ্য বরাবর বিকৃত করলে স্থিতিস্থাপক ধর্মের দরুন প্রযুক্ত বলের বিপরীতে স্প্রিং-এ প্রত্যায়নক বলের উদ্ভব ঘটবে। F অনুভূমিক বল প্রয়োগে স্প্রিংটিকে বাম হতে ডানদিকে অনুভূমিক বরাবর তার দৈর্ঘ্য x পরিমাণ বৃদ্ধি পেলে স্প্রিং-এ $-kx$ পরিমাণ প্রত্যায়নক বল উৎপন্ন হবে। এখন বস্তুটিকে x দূরত্ব সরাতে তার ওপর এর সমান ও বিপরীতমুখী $F = kx$ বল প্রয়োগ করে কাজ করতে হবে। এই সম্প্রসারণে প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃত কাজই হবে স্প্রিংটির মধ্যে সঞ্চিত বিভবশক্তি।



চিত্র ৫·২২

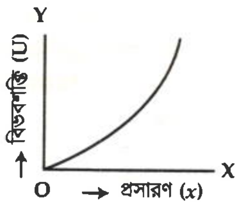
সুতরাং বিভবশক্তি, $U = \int_0^x F dx = \int_0^x kx\, dx$

$$= k\int_0^x x\, dx = \frac{1}{2}k\ [x^2]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (5.33)$$

স্প্রিংটিকে দৈর্ঘ্য x পরিমাণ সংকুচিত করলেও সঞ্চিত বিভব শক্তি $\frac{1}{2}Kx^2$ হবে। এখানে K = স্প্রিং ধ্রুবক = $\frac{F}{x}$

বিভবশক্তি (U) এবং প্রসারণ (x)-এর মধ্যকার সম্পর্কটি ৫·২২(ক) চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ৫·২২(ক)

অনুধাবনমূলক কাজ : কোনো একটি স্প্রিং এর প্রত্যায়নক বল (restoring force) কোনো মুহূর্তে 15 N বলতে কী বুঝ ?

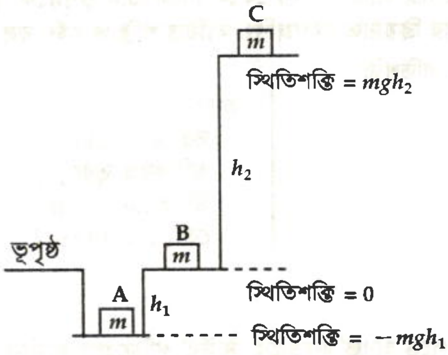
কোনো স্প্রিং এর প্রত্যায়নক বল 15 N বলতে বুঝায় স্প্রিংটি 15 N বলে টেনে ছেড়ে দিলে এটি একই বলে পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে।

সমস্যা সমাধান
Solution of problems

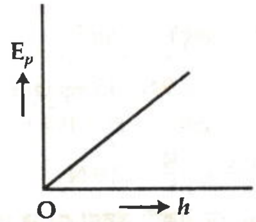
১। **স্থিতিশক্তি কি ঋণাত্মক হতে পারে ?** হ্যাঁ

নির্দেশনা : স্থিতিশক্তি ঋণাত্মক হতে পারে। যেমন অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তির বেলায় ভূপৃষ্ঠের ওপর যেকোনো বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি ধনাত্মক হয়। ভূপৃষ্ঠের নিচে যেমন খনির ভিতরে অবস্থিত বস্তুর স্থিতিশক্তি ঋণাত্মক হয় [চিত্র ৫·২৩]। এই চিত্রে ভূপৃষ্ঠের B বিন্দুতে বস্তুটির স্থিতিশক্তি শূন্য। h_2 উচ্চতায় C বিন্দুতে স্থিতিশক্তি mgh_2। C থেকে B-তে নেমে আসার সময় বস্তুর স্থিতিশক্তি কমতে থাকে। একইভাবে B থেকে নিচে A বিন্দুতে যাওয়ার সময় বস্তুর স্থিতিশক্তি কমবে। অতএব, B বিন্দুতে স্থিতিশক্তি শূন্য বলে A বিন্দুতে স্থিতিশক্তি ঋণাত্মক হবে। A বিন্দু যদি h_1 গভীরতায় থাকে, তবে ওই বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি $-mgh_1$ হবে। বস্তুটিকে আবার A থেকে B বিন্দুতে নিয়ে

যেতে হলে বস্তুটির ওপর ওজন অর্থাৎ অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কাজ করতে হবে। উচ্চতা ও বিভবশক্তির সম্পর্ককে ৫.২৩(ক) চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ৫.২৩



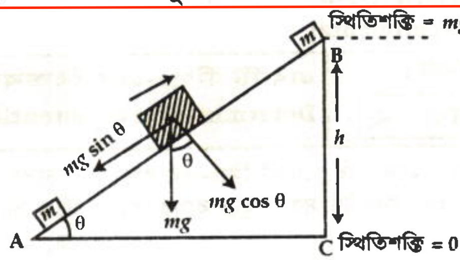
চিত্র ৫.২৩(ক)

২। একটি বস্তুর স্থিতিশক্তি কীভাবে শূন্য হয় ?

নির্দেশনা : প্রমাণ অবস্থান বা আকৃতি থেকে বস্তুকে অন্য অবস্থান বা আকৃতিতে নিয়ে যেতে হলে বস্তুটির ওপর সবসময়ই কোনো বলের বিরুদ্ধে কাজ করতে হয়। এই কাজ বস্তুটিতে স্থিতিশক্তি রূপে সঞ্চিত থাকে। বস্তুটি তার প্রমাণ অবস্থান বা আকৃতিতে ফিরে আসার সময় এই স্থিতিশক্তির দরুন নিজে কাজ করতে পারে। নিজে কাজ করায় বস্তুটির স্থিতিশক্তি ক্রমশ হ্রাস পায় এবং হ্রাস পেতে পেতে প্রমাণ অবস্থান বা আকৃতিতে ফিরে এলে বস্তুটির স্থিতিশক্তি শূন্য হয়। এই অবস্থায় বস্তুটি আর কাজ করে না।

৩। অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি কেবলমাত্র h-এর ওপর নির্ভর করে কিন্তু পথের ওপর নির্ভর করে না ~~কেন~~ ?

নির্দেশনা : কোনো বস্তুকে খাড়াভাবে h উচ্চতায় কোনো পথে নেওয়া হলে স্থিতিশক্তি তার ওপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ বস্তুটিকে খাড়াভাবে h উচ্চতায় না তুলে অন্য যেকোনো পথে যদি এই উচ্চতায় নিয়ে যাওয়া হয়, তা হলেও স্থিতিশক্তির মান একই থাকে। যেমন m ভরের বস্তুকে C বিন্দু হতে খাড়া B বিন্দুতে নিলে বস্তুটির স্থিতিশক্তি $= mgh$ [চিত্র ৫.২৪]।



চিত্র ৫.২৪

আবার মনে করি m ভরের বস্তুটি একটা ঘর্ষণহীন নততল AB-এর ওপর দিয়ে টেনে h উচ্চতায় তোলা হলো। নততল বরাবর নিচের দিকে বস্তুর ওজন mg-এর উপাংশ হলো $mg \sin \theta$। নততল বরাবর বস্তুকে ওপরে টেনে তুলতে এই উপাংশের বিরুদ্ধে কাজ করতে হয়। বস্তুর ওজনের অন্য উপাংশ $mg \cos \theta$ বস্তুর সরণের লম্ব দিকে ক্রিয়া করে বলে কোনো কাজ করে না। নততল বরাবর বস্তুর সরণ হলো AB। অতএব,

মোট কাজ = বল × সরণ $= mg \sin \theta \times AB = mg \times AB \sin \theta = mg \times BC = mgh$

সংজ্ঞা অনুযায়ী এই কাজ হলো বস্তুটির স্থিতিশক্তি। অতএব কোনো বস্তুকে যে পথেই ওপরে তোলা যাক না কেন, নির্দিষ্ট উচ্চতায় এর অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তির মান একই হয়।

হিসাব কর : 50N ওজনের একটি বস্তুকে 6 m উচ্চতায় উঠানোর জন্য একটি লিফ্ট ব্যবহার করা হলো। এটি 70 J শক্তি ব্যয় করে। অপচয়কৃত শক্তির পরিমাণ কত হবে হিসাব কর।

এখানে সরবরাহকৃত শক্তি = কাজ = বল × সরণ = ওজন × উচ্চতা $= 50 \times 6 = 300$ J

অপচয়কৃত শক্তি = সরবরাহকৃত শক্তি − ব্যয়িত শক্তি = 300 J − 70 J = 230 J

কাজ : কয়েকটি সমান ভরের কাচের মার্বেল একই সারিতে পরস্পর সংলগ্ন অবস্থায় একটি মসৃণ অনুভূমিক টেবিলের ওপর রাখ। অনুরূপ দুটি মার্বেল একত্রে গড়িয়ে দিয়ে ওই সারির এক প্রান্তে আঘাত কর। কী দেখতে পাবে ? সারির অপর প্রান্ত থেকে দুটি মার্বেল এক সাথে একই বেগে গতিশীল হবে— কেন ?

এক্ষেত্রে ভরবেগ ও যান্ত্রিক শক্তি উভয়েই সংরক্ষণ নীতি মেনে চলে। তার ফলে সারির অপর প্রান্ত থেকে দুটি মার্বেল একই সাথে একই বেগে গতিশীল হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৫

১। 2 kg ভরের একটি বস্তু ভূপৃষ্ঠ হতে 15 m ওপরে আছে। নিচে ফেলে দিলে এটি ভূপৃষ্ঠকে 10 ms^{-1} বেগে আঘাত করে। পতনের সময় স্থিতিশক্তি এবং বস্তুটির ওপর ক্রিয়ারত ঘর্ষণজনিত ব্যয়িত শক্তি ও ঘর্ষণ বল কত হবে ?

এখানে স্থিতিশক্তি = ঘর্ষণে ব্যয়িত শক্তি + চূড়ান্ত গতিশক্তি

$$mgh = Fh + \frac{1}{2}mv^2$$

বা, $$Fh = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

$$= 2 \times 9{\cdot}8 \times 15 - \frac{1}{2} \times 2 \times (10)^2$$

$$= 294 - 100 = 194 \text{ J}$$

$$\therefore \quad F = \frac{194}{h} = \frac{194}{15} = 12{\cdot}9 \text{ N}$$

এখানে,
ভর, $m = 2$ kg
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}
উচ্চতা, $h = 15$ m
বেগ, $v = 10$ ms^{-1}

২। 250 m উঁচু একটি ঝরণা থেকে পানি মাটিতে পড়ে অনুভূমিকভাবে নির্দিষ্ট গতিবেগে গড়িয়ে যাচ্ছে। শক্তির কোনো অপচয় নেই ধরে নিয়ে পানি কী বেগে গড়িয়ে যাবে বের কর ?

250 m উঁচু হতে মাটিতে পানি পড়ার ফলে পানি যে পরিমাণ স্থিতিশক্তি হারায়, তাই গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এখন পানির ভর m, পানির বেগ v এবং পানির উচ্চতা h হলে আমরা লিখতে পারি,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

বা, $$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{\cdot}8 \times 250}$$

$$= 70 \text{ ms}^{-1}$$

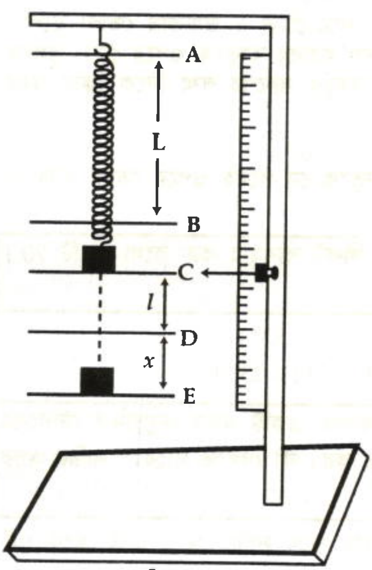
৫.৯ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	একটি স্প্রিং-এর বিভবশক্তি নির্ণয় Determination of potential energy of a spring

তত্ত্ব : মনে করি, একটি স্প্রিং-এর প্রান্তে m ভরের ভার ঝুলালে বা F পরিমাণ বল প্রয়োগে স্প্রিংটি x পরিমাণ সম্প্রসারিত হয়। স্প্রিংটির সরণ প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক হয় অর্থাৎ $F \propto x$ হয়

বা, $$F = Kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

[এখানে K = স্প্রিং ধ্রুবক]



চিত্র ৫.২৫

এখন স্প্রিংটিকে x_1 থেকে x_2 অবস্থানে প্রসারিত করতে বাইরের বল দ্বারা কাজ,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} Kx\,dx = K\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$= K\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{K}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

এই কাজ ধনাত্মক কাজ। সম্পাদিত এই কাজ স্প্রিং-এর মধ্যে বিভব শক্তিরূপে সঞ্চিত থাকবে।

$x_1 = 0$ এবং $x_2 = x$ ধরলে

$$W = \frac{1}{2}K(x^2 - 0)$$

বা, $$W = \frac{1}{2}Kx^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

m পরিমাণ ভরের জন্য স্প্রিংটি l পরিমাণ প্রসারিত হয় এবং এই অবস্থায় স্প্রিংটিকে x পরিমাণ টেনে ছেড়ে দিলে ইহা সরল ছন্দিত গতিতে স্পন্দিত হয় এবং এর দোলন কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ হয়।

যন্ত্রপাতি :

(১) পরীক্ষণীয় স্প্রিং।
(২) একটি মিটার স্কেল।
(৩) সুবিধাজনক কয়েকটি ভার।
(৪) স্প্রিং ঝুলাবার জন্য হুক।
(৫) একটি স্টপ ওয়াচ।

কার্যপদ্ধতি :

(১) চিত্র অনুযায়ী স্প্রিংটিকে একটি হুক থেকে ঝুলিয়ে দিতে হবে।

(২) এর প্রান্তে অর্থাৎ নিচের হুকে একটি ওজন বা ভার ঝুলিয়ে দিলে তা কিছু পরিমাণ লম্বা হবে। স্থির অবস্থান এবং পরিবর্তিত অবস্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব মিটার স্কেল দিয়ে পরিমাপ করতে হবে। ইহাই বর্ধিত দৈর্ঘ্য, l।

(৩) এরপর ভারটিকে নিচের দিকে টেনে x পরিমাণ সম্প্রসারণ করে ছেড়ে দিতে হবে। পুনরায় মিটার স্কেল দিয়ে দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণ x পরিমাপ করতে হবে।

(৪) স্প্রিংটি এই অবস্থায় ওপরে নিচে স্পন্দিত হবে। একটি স্টপওয়াচের সাহায্যে 20 দোলনের সময় নির্ণয় করতে হবে। এই সময়কে দোলন সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে পর্যায়কাল T নির্ণয় করতে হবে।

(৫) ভার পরিবর্তন করে (৩) ও (৪)নং পরীক্ষণটি কয়েকবার সম্পন্ন করা হয়।

ডাটা ছক—১ (T এবং x নির্ণয়ের ছক)

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	স্প্রিং এর আদি দৈর্ঘ্য L(m)	ভার ঝুলাবার পর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি l (m)	বল প্রয়োগ করে দোলন দেওয়ার জন্য স্প্রিং-এর সম্প্রসারণ x (m)	20 দোলনের সময় (sec)	পর্যায়কাল T (sec)	স্প্রিং ধ্রুবক K	বিভব শক্তি $W = \frac{1}{2}Kx^2$ (J)	গড় W (J)

হিসাব ও গণনা :

$l = \ldots\ldots$ m
$x = \ldots\ldots$ m

পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$

$\therefore \quad K = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$

বিভব শক্তি, $W = \frac{1}{2}Kx^2 = \ldots\ldots\ldots$ Joule

সতর্কতা ও আলোচনা :

(১) স্প্রিংটিকে এমনভাবে ঝুলাতে হবে যাতে এর প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর এটি ওপরের হুক থেকে খুলে না যায়।
(২) ভার ক্রমান্বয়ে বর্ধিত করে স্প্রিং-এর সম্প্রসারণ নির্ণয় করা হয়।
(৩) স্প্রিংটির প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সময় যাতে বাধা প্রাপ্ত না হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।
(৪) সঠিক দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণ পরিমাপে ক্যাথেডোমিটার ব্যবহার করা উচিত।

৫.১০ শক্তির নিত্যতার নীতির ব্যবহার
Use of conservation principle of energy

দুই হাতের তালু একত্রে ঘষলে তালু গরম হয়; এক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তি তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। পতনশীল বস্তু মাটিতে আঘাত করে থেমে গেলে যান্ত্রিক শক্তি তাপশক্তিতে এবং কিছুটা শব্দ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। আবার যেকোনো যন্ত্রের বিভিন্ন অংশের মধ্যে ঘর্ষণের ফলে তাপ শক্তির উদ্ভব হয়। এই ঘটনাগুলো লক্ষ করলে দেখা যায় যে, শক্তি এক রূপ থেকে অন্য রূপে রূপান্তরিত হয়। আবার আইনস্টাইনের আপেক্ষিক তত্ত্বে দেখা যায় যে, ভর শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কোনো বস্তুর মধ্যে শক্তির পরিমাণ বাড়লে ওই বস্তুর ভরও বাড়ে। আবার বস্তুর মধ্যে শক্তির পরিমাণ কমলে এর ভরও কমে। মেঝের ওপর দিয়ে একটি বাক্সকে টানলে ঘর্ষণে তাপ সৃষ্টি হয়।

উপরোক্ত সকল ক্ষেত্রে (সংরক্ষিত বা অসংরক্ষিত) দেখা যায় যে, শক্তি কেবল এক রূপ থেকে অন্য রূপে রূপান্তরিত হচ্ছে কিন্তু এই শক্তি শেষ বা ধ্বংস হয় না। **এটাই শক্তির নিত্যতা।**

সূত্র : শক্তি অবিনশ্বর, শক্তি সৃষ্টি বা ধ্বংস করা যায় না। কেবল এক রূপ থেকে অন্য রূপে রূপান্তরিত করা যায় (Energy is eternal, it can neither be created nor be destroyed, but can only be converted from one form to another)। বিশ্বের মোট শক্তির পরিমাণ ধ্রুবক। বৈদ্যুতিক ইস্ত্রিতে তড়িৎ বা বিদ্যুৎ চালনা করলে তাপ উৎপন্ন হয়। এই তাপ দিয়ে আমরা কাপড় ইস্ত্রি করি। এক্ষেত্রে বিদ্যুৎ শক্তি তাপ শক্তিতে এবং তাপ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এক্ষেত্রে শক্তির কোনো ক্ষয় বা বিনাশ নেই। কেবলমাত্র রূপান্তর আছে।

নিউক্লিয়ার রিয়্যাক্টরের কথা তোমরা শুনেছ। নিউক্লিয়ার রিয়্যাক্টরের মধ্যে একটি নিউট্রন দ্বারা ভারী পরমাণু $\left({}^{235}_{92}U\right)$ কে আঘাত করে নিউক্লিও ফিশন বিক্রিয়া ঘটানো হয়। এই বিক্রিয়ায় প্রচুর পরিমাণে তাপ শক্তি উৎপন্ন হয়। এই তাপ শক্তিকে কাজে লাগিয়ে টারবাইন ঘুরিয়ে আবার বিদ্যুৎ শক্তি উৎপন্ন করা হয়। এক্ষেত্রে দেখা যায় পারমাণবিক শক্তি তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হয় এবং তাপ শক্তি আবার বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এক্ষেত্রেও শক্তির কোনো বিনাশ বা ধ্বংস নেই। এক রূপ থেকে অন্য রূপে রূপান্তরিত হচ্ছে।

শক্তি যখন এক রূপ থেকে অন্য রূপে পরিবর্তিত হয় তখন এর কোনো ঘাটতি বা বাড়তি ঘটে না। অর্থাৎ শক্তির বিনাশ বা সৃষ্টি উভয়ই অসম্ভব। যখন এক প্রকার শক্তি বিলুপ্ত হয় তখন তা অন্য রূপে কোথাও আত্মপ্রকাশ করে। এর নাম শক্তির নিত্যতা বা শক্তির অবিনশ্বরতা (Conservation of energy)।

যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণশীলতা : যান্ত্রিক শক্তির রূপান্তরের এরকম অসংখ্য দৃষ্টান্ত দেওয়া যায়— যেমন সরল দোলকের দোলন এবং নততলে বস্তুর গতি। আমরা জানি, শক্তি সৃষ্টি বা ধ্বংস করা যায় না। অতএব, এসব উদাহরণে বস্তুর গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে ও স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয় মাত্র; স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির যোগফল অর্থাৎ বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তি সব সময় স্থির থাকে। একে **যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ নীতি** (Principle of conservation of mechanical energy) বলে। কিন্তু ঘর্ষণ বল থাকলে এই বল সব সময় বস্তুর গতিকে বাধা দেয়। ফলে কিছু পরিমাণ যান্ত্রিক শক্তি এই বাধা অতিক্রম করার জন্য অপচয় হয় এবং তাপশক্তিতে রূপান্তরিত হয়।

বিবৃতি : কোনো ব্যবস্থায় কেবল সংরক্ষণশীল বল ক্রিয়া করলে ব্যবস্থার গতিশক্তি ও বিভবশক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব থাকে, অর্থাৎ গতিশক্তি + বিভবশক্তি = ধ্রুবক।

উপরের উদাহরণের ক্ষেত্রে শক্তির নিত্যতার সূত্র প্রযোজ্য হয়। কোনো অপচয়ী বল না থাকলে এবং সংঘর্ষটি সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক হলে মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। অতএব

সংঘর্ষের আগে গতিশক্তি + সঞ্চিত স্থিতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 =$ ধ্রুবক

কোনো প্রক্রিয়ায় কোনো রাশির মান সবসময় অপরিবর্তিত থাকলে রাশিটি সংরক্ষিত (conserved) আছে বলা হয়। অতএব মোট যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত আছে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি গ্যাস বেলুন ওপরের দিকে ওঠার সময় এর গতিশক্তি এবং স্থিতিশক্তি উভয়ই বৃদ্ধি পায়। এক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণ সূত্র লঙ্ঘিত হয় কি না—ব্যাখ্যা কর।

এক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণ সূত্র লঙ্ঘিত হয় না। ঊর্ধ্বগামী কোনো বস্তুর ওপর অভিকর্ষ ছাড়া অন্য কোনো বাহ্যিক বল ক্রিয়াশীল হলে শক্তির সংরক্ষণসূত্র প্রযোজ্য হয় না।

গ্যাসপূর্ণ বেলুনের মোট ওজন অপেক্ষা এর ওপর প্লবতা অর্থাৎ ঊর্ধ্বমুখী ঘাত অনেক বেশি। ফলে বেলুনের ওপর একটি ঊর্ধ্বমুখী বল (প্লবতা-ওজন) ক্রিয়া করে। অর্থাৎ অভিকর্ষ ছাড়া আর একটি বল ওই বেলুনের ওপর ক্রিয়াশীল হয়। মোট ঊর্ধ্বমুখী বলের জন্য বেলুনের ওপর একটি ঊর্ধ্বমুখী ত্বরণ থাকে। ফলে বেলুনটির ওপরের দিকের বেগ ধীরে ধীরে বাড়ে, তাই গতিশক্তিও ধীরে ধীরে বাড়ে। আবার ওপরের দিকে ওঠার ফলে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে কৃত কাজও বাড়ে। এতে বেলুনের স্থিতিশক্তিও বাড়তে থাকে।

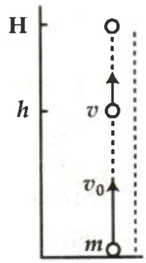
ক. উৎক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতায় শক্তির নিত্যতার সূত্র
Conservation of energy of a body thrown up at maximum height

গতির জন্য বস্তুতে গতিশক্তি এবং অবস্থানের জন্য স্থিতিশক্তি থাকে। একটি সচল বস্তুর গতিশক্তি (E_k) এবং স্থিতিশক্তি (E_p) দুই-ই থাকতে পারে। যেমন একটি উড়ন্ত বিমানের বা ওপর দিকে ছোড়া পাথরের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি দুই-ই থাকে। তখন বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তি বলতে এর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল বোঝায়। অতএব, মোট যান্ত্রিক শক্তি—

$$E_T = E_k + E_p \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5.34)$$

বস্তুর গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে বা স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হতে পারে। এরকম রূপান্তরের অনেক উদাহরণ দেওয়া যায়। এখন আমরা উৎক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতার শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রয়োগ করব।

মনে করি, ভূপৃষ্ঠ থেকে m ভরের একটি পাথরকে v_0 বেগে ওপরের দিকে খাড়াভাবে নিক্ষেপ করা হলো [চিত্র ৫·২৬]। ভূপৃষ্ঠকে নির্দেশ তল ধরে নিলে পাথরটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি $= 0$ ও প্রাথমিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_0^2$। পাথরটি যত ওপরে ওঠে এর অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি তত বাড়তে থাকে; কিন্তু সাথে সাথে পাথরটির বেগ কমতে থাকে অর্থাৎ এর গতিশক্তি কমতে থাকে। অতএব, ওপরে ওঠার সময় পাথরটির গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে রূপান্তরিত হতে থাকে। h উচ্চতায় পাথরটির ওপরের দিকে বেগ যদি v হয় $(v < v_0)$, তবে এই বিন্দুতে পাথরটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$ ও স্থিতিশক্তি $= mgh$ হয়। সুতরাং পাথরটির মোট যান্ত্রিক শক্তি হয় $= \frac{1}{2}mv^2 + mgh$। সর্বোচ্চ অবস্থানে পৌঁছে পাথরটি মুহূর্তের জন্য স্থির থাকে। তখন পাথরটির গতিশক্তি শূন্য কিন্তু এর স্থিতিশক্তি সবচেয়ে বেশি হয়। পাথরটির সর্বোচ্চ উচ্চতা যদি H হয় তবে এই অবস্থানে পাথরটির স্থিতিশক্তি $= mgH$ হয়।



চিত্র ৫·২৬

অতএব সর্বোচ্চ অবস্থানে পাথরটির সম্পূর্ণ গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়ে যায়।

সর্বোচ্চ অবস্থানে পৌঁছানোর পর পাথরটি আবার নিচের দিকে পড়তে থাকে। তখন ঠিক বিপরীত ক্রিয়া হয়; পাথরটির স্থিতিশক্তি ক্রমশ কমতে থাকে এবং গতিশক্তি বাড়তে থাকে। নির্দেশ তলে বস্তুটির কেবল গতিশক্তি থাকে; ওর স্থিতিশক্তি আবার শূন্য হয়।

এক্ষেত্রে সহজে প্রমাণ করা যায় যে, ঘর্ষণ বলের মতো কোনো অপচয়ী বল (dissipative force) না থাকলে প্রাথমিক অবস্থানে পাথরটির নিট শক্তি (যা সম্পূর্ণই গতিশক্তি) সর্বোচ্চ অবস্থানে পাথরটির মোট শক্তির (যা সম্পূর্ণই স্থিতিশক্তি) সমান হয়, অর্থাৎ $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH$। অর্থাৎ আগের কোনো বিন্দুতেও মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। অতএব,

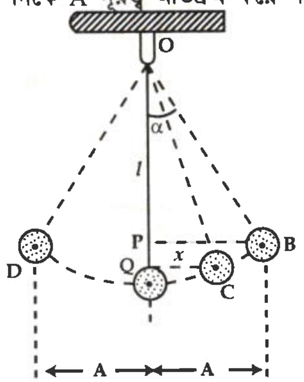
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.35)$$

অবাধে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রেও এই নীতি প্রযোজ্য হয়। যে স্থান থেকে বস্তুকে ওপরের দিকে v_0 বেগে ছোড়া হয়েছিল, বস্তুটি যখন আবার সেই প্রাথমিক অবস্থানে ফিরে আসে তখন এর বেগ v_0 হয়। এই সময় বস্তুটির শক্তি সম্পূর্ণই গতিশক্তি। অতএব এর মোট শক্তি পুনরায় $\frac{1}{2}mv_0^2$ হয়। অতএব **উৎক্ষিপ্ত বস্তু সর্বাধিক উচ্চতায় শক্তির নিত্যতার সূত্র মেনে চলে।**

খ. সরল ছন্দিত গতির শক্তি
Energy of simple harmonic motion

সরল দোলকের গতি হলো সরল ছন্দিত গতি। সরল দোলক যখন দুলতে থাকে তখন কখনো দোলকের গতিশক্তি স্থিতিশক্তিতে, আবার কখনো দোলকের স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কিন্তু প্রতি মুহূর্তে দোলকের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল ধ্রুব থাকে।

মনে করি, সরল দোলকের ববের ভর m এবং সাম্যাবস্থা 0। দোলায়মান অবস্থার সাম্যাবস্থা থেকে যেকোনো এক দিকে A দূরত্ব অতিক্রম করে সর্বোচ্চ বিন্দু B তে পৌঁছলে [চিত্র ৫·২৭] B বিন্দুতে বেগ $v = 0$ বলে এর সকল শক্তি বিভবশক্তি। সরল দোলকের ওপর ক্রিয়ারত বল F হলে $F = -Kx$। অতএব সর্বোচ্চ বিন্দু B তে বিভবশক্তি,



চিত্র ৫·২৭

$$E_p = \int_0^A -F\,dx = \int_0^A K\,x\,dx$$

$$= K\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^A = \frac{1}{2}KA^2$$

আমরা জানি,

$$\frac{K}{m} = \omega^2 \quad \therefore \; K = \omega^2 m$$

$$\therefore \; E_p = \frac{1}{2} \times m\omega^2 A^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.36)$$

যেহেতু B বিন্দুর গতিশক্তি $E_k = 0$ অতএব B বিন্দুতে ববের মোট শক্তি

$$E_1 = E_P + E_K = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 + 0$$

$$\therefore \quad E_1 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5.37)$$

এখন ধরা যাক, একটি বব B বিন্দু থেকে সাম্যাবস্থায় O-এর দিকে যাত্রা করে কোনো এক সময় C বিন্দুতে পৌছাল। সাম্যাবস্থান হতে C এর দূরত্ব x এবং এর ববের বেগ v হলে C বিন্দুর গতিশক্তি $E_{k_C} = \frac{1}{2} mv^2$

কিন্তু সরল ছন্দিত গতির ক্ষেত্রে বেগ,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

অতএব $E_{k_C} = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5.38)$

C বিন্দুতে ববের কিছু বিভবশক্তি থাকবে। যার পরিমাণ,

$$E_{p_C} = \int_0^x K\, x dx$$

$$= K\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2} Kx^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad [\because K = m\omega^2] \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5.39)$$

C বিন্দুতে মোট শক্তি,

$$E_2 = E_{k_C} + E_{p_C}$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2 + x^2)$$

$$\therefore \quad E_2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5.40)$$

মন্তব্য : ওপরের সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, B ও C বিন্দুর মোট শক্তি একই। $\therefore$ $E_1 = E_2$ অর্থাৎ দোলায়মান একটি সরল দোলক 'শক্তির নিত্যতার সূত্র' মেনে চলে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৬

১। একটি সরল দোলকের ববের ভর 0·2 kg ও কার্যকর দৈর্ঘ্য 1 m। উল্লম্ব রেখা হতে 0·4 m দূরে টেনে ছেড়ে দিলে গতিপথের সাম্যাবস্থান অতিক্রম কালে ববের গতিশক্তি ও বেগ নির্ণয় কর। A ও B বিন্দুতে শক্তির সংরক্ষণশীলতা প্রযোজ্য হয় কি না—বিশ্লেষণ কর।

ধরি নির্ণেয় বেগ $= v$

শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুসারে, O বিন্দু হতে ঝুলন্ত ববের সর্বোচ্চ বিন্দু B-তে স্থিতিশক্তি = সাম্যাবস্থান বিন্দু A-তে গতিশক্তি

এখন OA বরাবর সর্বোচ্চ উল্লম্ব সরণ,

$$AN = OA - ON = h$$

$$= OA - \sqrt{OB^2 - NB^2}$$

$$= 1 - \sqrt{(1)^2 - (0{\cdot}4)^2}$$

$$= 0{\cdot}083 \text{ m} \quad \therefore h = 0{\cdot}083 \text{ m}$$

এখানে,

ববের ভর, $m = 0{\cdot}2$ kg

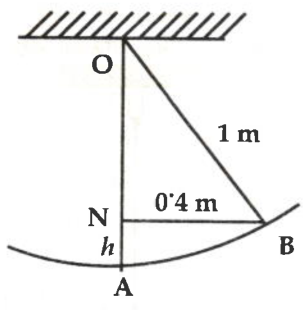
সর্বোচ্চ বিন্দু B = 0·4 m

সাম্যাবস্থায় A = 0

$$OB^2 = ON^2 + BN^2$$

বা, $ON^2 = OB^2 - BN^2$

$\therefore$ $ON = \sqrt{OB^2 - BN^2}$



এখন সর্বোচ্চ বিন্দুতে (B) স্থিতিশক্তি,

$$E_P = mgh = 0{\cdot}2 \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}083 = 0{\cdot}163 \text{ J}$$

B বিন্দুতে বেগ $v = 0$, কাজেই গতিশক্তি, $E_k = 0$

$\therefore$ B বিন্দুতে মোট শক্তি, $E' = E_P + E_k = 0{\cdot}163 \text{ J} + 0 = 0{\cdot}163 \text{ J}$

আবার, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \therefore v^2 = 2gh$

বা, $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.083}$

$= 1.275 \text{ ms}^{-1}$

শক্তির নিত্যতার সূত্রানুসারে ঝুলন্ত বিন্দু হতে ববের সর্বোচ্চ বিন্দু (B)-তে স্থিতিশক্তি = সাম্যাবস্থান বিন্দু (A) তে গতিশক্তি।

স্থির অবস্থায় A বিন্দুতে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (1.275)^2 = 0.163$ J এবং A বিন্দুতে বিভবশক্তি, $E_P = 0$

$\therefore$ সাম্যাবস্থায় বা A বিন্দুতে মোট শক্তি, $E = E_k + E_P = 0.163 + 0 = 0.163$ J

যেহেতু $E = E'$, কাজেই A ও B বিন্দুতে শক্তির সংরক্ষণশীলতা প্রযোজ্য হয়।

৫.১১ ক্ষমতা ✱✱✱ DAT(19-20,20-21
Power
MAT(20-21)

ক্ষমতার ধারণা
Concept of power

বল প্রয়োগে কোনো যন্ত্র বা বস্তু গতির পরিবর্তন ঘটালে ওই যন্ত্র বা বস্তুকে আমরা কাজ করার ক্ষমতা আছে বলে ধরে নেই। বলের ক্রিয়ায় বস্তুর সরণ দ্রুত না ধীরে কীভাবে সম্পন্ন হয়েছে কাজের পরিমাণ দ্বারা তা বুঝা যায় না, ক্ষমতা দ্বারা বুঝা যায়। একক সময়ে কী পরিমাণ কাজ সম্পন্ন হয় তাই ক্ষমতা।

কোনো একটি উৎসের কাজ করার হারকে ক্ষমতা বলে এবং একক সময়ের কৃত কাজ দ্বারা ক্ষমতা পরিমাপ করা হয়। যেহেতু কাজ একটি স্কেলার রাশি তাই ক্ষমতাও স্কেলার রাশি।

ব্যাখ্যা : মনে করি কোনো ব্যক্তি বা উৎস t সময়ে W পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে।

$\therefore$ একক সময়ের কৃত কাজ বা ক্ষমতা,

$$\boxed{P = \frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}} = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.41)$$

DAT(23-24)

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, কোনো যন্ত্র যদি F বল প্রয়োগে বলের প্রয়োগ বিন্দুকে v বেগে গতিশীল রেখে কাজ সম্পন্ন করে তার ক্ষমতা হবে বল ও বেগের গুণফলের সমান।

কাজ সম্পাদনের হার সুষম না হলে তাৎক্ষণিক ক্ষমতা

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$\vec{F}$ পরিমিত একটি ধ্রুব বল কোনো কণার ওপর dt সময় ক্রিয়া করে $\vec{dr}$ সরণ ঘটালে, ওই ধ্রুব বল কর্তৃক কৃত কাজ, $dW = \vec{F}.\vec{dr}$ এবং একক সময়ে কৃত কাজ বা ক্ষমতা $= \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$

ক্ষমতা একটি স্কেলার রাশি। ক্ষমতা কেবল কাজের মোট পরিমাণের ওপর নির্ভর করে না, কত সময়ে ওই কাজ করা হলো তার ওপর নির্ভর করে। কম সময়ে একই কাজ করলে ক্ষমতা বেশি হয়।

যেমন, একটি যন্ত্র 4 ঘণ্টায় 2000 জুল কাজ করে। অপর একটি যন্ত্র 6 ঘণ্টায় 2400 জুল কাজ করে। প্রথম যন্ত্রটির ক্ষমতা = 2000/4 = 500 জুল/ঘণ্টা। দ্বিতীয় যন্ত্রটির ক্ষমতা 2400/6 = 400 জুল/ঘণ্টা। সুতরাং যদিও প্রথম যন্ত্রটির দ্বারা কাজ দ্বিতীয় যন্ত্র অপেক্ষা কম, কিন্তু প্রথম যন্ত্রটির ক্ষমতা বেশি।

ক্ষমতার একক
Unit of power

ক্ষমতার সংজ্ঞা হতে এর একক বের করা যায়।

$$\text{ক্ষমতা} = \frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}} = \frac{\text{জুল}}{\text{সেকেন্ড}} = \text{জুল/সেকেন্ড } (\text{Js}^{-1})$$

মাত্রা : $[P] = [ML^2T^{-3}]$

MAT(19-20)

এস. আই. বা আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে ক্ষমতার একক জুল/সে. বা ওয়াট (watt)। এক সেকেন্ডে এক জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক জুল/সে. বা এক ওয়াট বলে।

"কোনো যন্ত্রের ক্ষমতা 50 জুল/সে।"—উক্ত উক্তি দ্বারা বুঝি যন্ত্রটি প্রতি সেকেন্ডে 50 জুল কাজ করতে পারে। ওয়াট অপেক্ষা বড় মানের আরও একটি একক ক্ষমতা প্রকাশের জন্য ব্যবহৃত হয়। এর নাম কিলোওয়াট (kW)।

অশ্ব-ক্ষমতা
Horse-power

এককের আন্তর্জাতিক পদ্ধতি চালু হবার আগে থেকেই ক্ষমতার এই ব্যবহারিক এককের ব্যবহার প্রচলন ছিল। প্রতি সেকেন্ডে 746 জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক অশ্ব-ক্ষমতা বলে।

∴ 1 অশ্ব-ক্ষমতা = 746 জুল/সে = 746 ওয়াট (watt)। MAT(19-20)

বৈদ্যুতিক ব্যবহারিক একক

ক্ষমতার বৈদ্যুতিক ব্যবহারিক একককে ওয়াট (watt) বলে। পরিমাপের আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতেও 'ওয়াট' ক্ষমতার একক।

ওয়াট : 1 সেকেন্ডে 1 জুল কাজ করার ক্ষমতাকে 1 ওয়াট (W) বলে।

∴ 1 ওয়াট = 1 জুল/সে

∴ 1 কিলোওয়াট = 1000 ওয়াট। অর্থাৎ কিলোওয়াট ওয়াট অপেক্ষা এক হাজার গুণ বড়। আধুনিক কালে কিলোওয়াট অপেক্ষা হাজার গুণ বড় অর্থাৎ ওয়াট অপেক্ষা দশ লক্ষ গুণ বড় ক্ষমতার আর একটি একক ব্যবহৃত হচ্ছে। এর নাম মেগাওয়াট (Mega watt)।

∴ 1 মেগাওয়াট (MW) = 1000 কিলোওয়াট
$= 10^6$ ওয়াট $= 10^6$ জুল/সে।

'কোনো বিদ্যুৎ উৎপাদন কেন্দ্রের ক্ষমতা 2 মেগাওয়াট'। এর অর্থ—কেন্দ্রের সরবরাহকৃত বিদ্যুৎ শক্তি দ্বারা প্রতি সেকেন্ডে 2×10^6 জুল বা 2 মেগা-জুল কাজ করা যায়।

ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ (Dimension of power)

আমরা জানি, ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{\text{বল} \times \text{সরণ}}{\text{সময়}}$

∴ ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ, $[P] = \frac{[\text{বল}]\,[\text{সরণ}]}{[\text{সময়}]}$

$$= \left[\frac{MLT^{-2} \times L}{T}\right]$$

$$= [ML^2T^{-3}]$$

ক্ষমতা, বল ও বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation among power, force and velocity

মনে করি, কোনো বস্তুর ওপর F বল t সময় ধরে ক্রিয়া করল। এই সময়ে যদি বস্তুটি প্রযুক্ত বলের অভিমুখে s দূরত্ব সরে যায়, তবে ওই বল দ্বারা কাজ, $W = F \times s$

আবার ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv \quad \left[\because v = \frac{s}{t}\right]$ ... ... (5.42)

অতএব ক্ষমতা = প্রযুক্ত বল × বস্তুর বেগ

বস্তুর সরণ প্রযুক্ত বলের অভিমুখে না হয়ে যদি এর সঙ্গে θ কোণে ক্রিয়াশীল হয়, তবে

$P = Fv \cos\theta$ ... ... (5.43)

এই সমীকরণ দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বোঝায়।

∴ ভেক্টর চিহ্ন অনুযায়ী $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ... ... (5.44)

এই সমীকরণ ক্ষমতা, বল ও বেগের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

আবর্ত ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে ক্ষমতা :

আবর্ত গতির ক্ষেত্রে আমরা জানি কাজ, W = টর্ক × কৌণিক সরণ

$\therefore$ ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{\text{টর্ক} \times \text{কৌণিক সরণ}}{\text{সময়}}$

$\therefore$ ক্ষমতা, P = টর্ক × কৌণিক বেগ

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একই উচ্চতায় উঠতে একটি খাড়া সিঁড়ি অপেক্ষা একটি হেলানো সিঁড়ি ব্যবহার করলে কষ্ট কম হয় কেন?

সিঁড়ির দৈর্ঘ্য = l, উচ্চতা = h, আরোহনকারীর ভর = m এবং বেগ = v হলে কৃত কাজ, $W = mgh$

এই কাজ করতে সময় লাগে, $t = \frac{l}{v}$

$\therefore$ আরোহণকারী কর্তৃক প্রদত্ত ক্ষমতা, P = কৃত কাজ/সময় $= \frac{mgh}{\frac{l}{v}} = \frac{mgh.v}{l}$

সুতরাং, h অপেক্ষা l যত বেশি হবে ক্ষমতা তত কম লাগবে। তাই খাড়া সিঁড়ি অপেক্ষা হেলানো সিঁড়ি ব্যবহার করলে কৃত কাজের হার অর্থাৎ প্রদত্ত ক্ষমতা কম লাগবে, তাই কম কষ্ট করতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৭

১। একটি 20 W ক্ষমতার বৈদ্যুতিক পাখা মিনিটে 200 বার ঘুরছে। পাখার মোটর কত টর্ক উৎপন্ন করছে ?

ধরা যাক, মোটর কর্তৃক উৎপন্ন টর্ক = τ Nm

আমরা জানি n বার ঘূর্ণনে কাজ, $W = 2\pi\tau n$

সুতরাং 200 বার ঘূর্ণনে কৃত কাজ,

$W = 200 \times 2\pi \times \tau$ জুল

এখানে,
$n = 200$ বার
কাজ, $W = 20$ J
টর্ক, $\tau = ?$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{200 \times 2\pi \times \tau}{60} = 20$

বা, $\tau = \frac{20 \times 60}{200 \times 2\pi} = \frac{1200}{200 \times 2 \times 3.14}$ m $= 0.995$ Nm

২। একটি দমকলের পাম্প মাটি থেকে 2m নিচে থাকা একটি জলাশয় থেকে পানি তুলে প্রতি সেকেন্ডে 60 kg পানি ছুড়ছে এবং ওই পানি মাটি থেকে 10m ওপরে একটি দেয়ালে লম্বভাবে 6 ms^{-1} বেগে ছুড়ছে। পাম্পটির ক্ষমতা নির্ণয় কর।

মোট কৃত কাজ,

W = পানির মোট শক্তি = পানির স্থিতি শক্তি + পানির গতিশক্তি

$= mgh + \frac{1}{2}mv^2$; এই শক্তি পাম্প সরবরাহ করে

এখানে,
মোট উচ্চতা $= 2m + 10m = 12m$
প্রতি সেকেন্ডে ছোড়া পানির পরিমাণ,
$m = 60$ kg
পানি ছোড়ার বেগ, $v = 6\ ms^{-1}$

$\therefore$ 1s-এ পাম্প দ্বারা কৃত কাজ $= 60 \times 9.8 \times 12 + \frac{1}{2} \times 60 \times (6)^2 = 7056 + 1080 = 8136$J

সুতরাং, পাম্পের ক্ষমতা = 8136W = 8.136 kW

৫.১২ কর্মদক্ষতা

Efficiency

আমরা যখন কোনো যন্ত্র বা বস্তু থেকে কাজ পাই তা ওই যন্ত্র বা বস্তুকে কর্মক্ষম করার জন্য সরবরাহকৃত শক্তি অপেক্ষা কম। কেবল যন্ত্রের ক্ষেত্রেই নয়, বাস্তব জীবনের অনেক ক্ষেত্রেই যে শক্তি প্রয়োগ করা হয় তার অংশ বিশেষ কাজে লাগে। বাকি অংশ অপচয় হয়। ইঞ্জিনের ক্ষেত্রে এই অপচয় হওয়া শক্তি ব্যয় হয় চাকার ঘর্ষণ, ইঞ্জিন গরম হওয়া ইত্যাদি কাজে। এ অপচয় সম্পূর্ণরূপে বন্ধ করা যায় না, তবে বিভিন্ন প্রযুক্তি ব্যবহারের মাধ্যমে এই অপচয় হ্রাস করা যায়। এক্ষেত্রে শক্তির সমীকরণ হলো প্রদত্ত শক্তি = লভ্য কার্যকর শক্তি + অন্যভাবে ব্যয়িত শক্তি।

সংজ্ঞা : কোনো যন্ত্রে সরবরাহকৃত শক্তি এবং কাজে পরিণত হওয়ার শক্তির অনুপাতকে কর্মদক্ষতা বলে।

অর্থাৎ কর্মদক্ষতা, $\eta = \dfrac{\text{কার্যকর শক্তি}}{\text{মোট সরবরাহকৃত শক্তি}}$

কর্মদক্ষতাকে শতকরা হিসেবে প্রকাশ করা যায়। কর্মদক্ষতার একক HP

1 HP = 746 watt

মনে করি, কোনো যন্ত্রে E_1 পরিমাণ শক্তি প্রদান করা হলো এবং E_2 পরিমাণ শক্তির অপচয় ঘটল। তা হলে কর্মদক্ষতা,

$$\eta = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \times 100\% \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5.45)$$

কোনো যন্ত্রেরই কর্মদক্ষতা 100% পাওয়া যায় না। কোনো যন্ত্রের কর্মদক্ষতা 80% বলতে বুঝায় 100 একক শক্তি সরবরাহ করলে তার মাত্র 80 একক শক্তি কাজে লাগবে, বাকি 20 একক শক্তি অপচয় হবে।

৫.১৩ বলের প্রকারভেদ
Types of force

বল দুই প্রকার; যথা— (১) সংরক্ষণশীল বল (Conservative force) এবং
(২) অসংরক্ষণশীল বল (Non-conservative force)

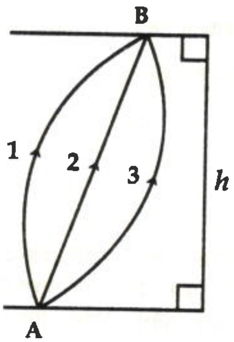
৫.১৩.১ সংরক্ষণশীল বল
Conservative force

যে সংস্থায় বা সিস্টেমে যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত থাকে তাকে সংরক্ষণশীল সংস্থা বা সিস্টেম বলে এবং এরূপ সংস্থায় ক্রিয়াশীল বলকে সংরক্ষণশীল বল বলে। অন্যভাবে বলা যায়, একটি বন্ধ পথে কোনো বল দ্বারা মোট কৃত কাজের পরিমাণ শূন্য হলে সেই বলকে সংরক্ষণশীল বল বলা হয়।

অথবা, যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে তাকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে। উদাহরণ—অভিকর্ষীয় বল, বৈদ্যুতিক বল, আদর্শ স্প্রিং-এর বিকৃতি প্রতিরোধী বল প্রভৃতি। MAT(18-19)

সংরক্ষণশীল বলের বৈশিষ্ট্য : ***

(১) এই বল শুধু অবস্থানের ওপর নির্ভর করে।
(২) সংরক্ষণশীল বল দ্বারা কৃত কাজ সম্পূর্ণভাবে পুনরুদ্ধার করা যায়।
(৩) একটি বস্তুকে এক স্থান হতে অন্য স্থানে স্থানান্তরে কাজ পথের ওপর নির্ভর করে না; কেবল বস্তুর আদি ও চূড়ান্ত অবস্থানের ওপর নির্ভর করে।
(৪) সংরক্ষণশীল বলের ক্রিয়ায় যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতার সূত্র পালিত হয়।
(৫) পূর্ণচক্রে মোট কাজ শূন্য হয়।
(৬) সংরক্ষণশীল বল স্থিতিশক্তির ঋণাত্মক নতিমাত্রার সমান হয়—অর্থাৎ $F = -\dfrac{dU}{dr}$



চিত্র ৫.২৮

ধরি m ভরের একটি বস্তুকে A বিন্দু হতে ওপরে উঠিয়ে B বিন্দুতে স্থাপন করা হলো এবং এতে বস্তুটির উল্লম্ব সরণ হলো h [চিত্র ৫.২৮]। এই স্থানান্তর 1নং, 2নং বা 3নং পথে হলেও প্রত্যেক পথের সকল বিন্দুতে অভিকর্ষীয় বল mg খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে এবং প্রত্যেক পথে অভিকর্ষীয় বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর বস্তুর সরণ h। এই তিন পথের প্রত্যেক পথে কাজের পরিমাণ সমান এবং কাজ $W = -mgh$।

আবার বস্তুটিকে A বিন্দু হতে 1নং পথে B বিন্দুতে এনে পুনরায় তাকে B বিন্দু হতে A বিন্দুতে স্থানান্তর করলে, প্রথম স্থানান্তরে অভিকর্ষীয় বলের বিপরীত দিকে সরণ = h ও কাজ $W_1 = -mgh$ এবং দ্বিতীয় স্থানান্তরে অভিকর্ষীয় বলের অভিমুখে সরণ = h ও কাজ $W_2 = mgh$

$\therefore$ মোট কৃত কাজ, $W_2 + W_1 = mgh + (-mgh) = 0$

কাজেই অভিকর্ষীয় বল সংরক্ষণশীল বল এবং এই বল কর্তৃক কৃত কাজ পুনরুদ্ধার করা সম্ভব। সংরক্ষণশীল বলের বৈশিষ্ট্য অনুসারে এর আর একটি সংজ্ঞা দেয়া যায়। যেমন যে বলের ক্রিয়ায় কোনো বস্তুকে এক বিন্দু হতে অপর কোনো বিন্দুতে নিয়ে যেতে ওই বল কর্তৃক কৃত কাজ শুধু বিন্দুদ্বয়ের অবস্থানের ওপর নির্ভর করে—পথের ওপর নির্ভর করে না তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে।

অনুধাবনমূলক কাজ : "মহাকর্ষ বল সংরক্ষণশীল বল"—ব্যাখ্যা কর।

মহাকর্ষ বল দ্বারা কাজ আদি ও চূড়ান্ত অবস্থানের ওপর নির্ভর করে, গতিপথের ওপর নয়। এই বল দ্বারা কাজ পুনরুদ্ধার করা যায়। মহাকর্ষ ক্ষেত্রে কোনো বস্তুকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে আদি অবস্থানে আনলে কাজ শূন্য হয়। তাই মহাকর্ষ বল সংরক্ষণশীল বল।

সংরক্ষণশীল সংস্থায় কণায় শক্তির সংরক্ষণ
Conservation of energy of a particle in conservative system

ধরা যাক, m ভরের কোনো একটি কণার ওপর একটি সংরক্ষণশীল বল $\vec{F}$ ক্রিয়া করার ফলে কণাটি A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে গেল। কণাটির গতিপথের কোনো এক বিন্দুতে কণার বেগ v হলে আমরা পাই,

$$\vec{F}.d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\vec{v}.d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$\therefore$ A থেকে B বিন্দুতে যেতে বল $\vec{F}$ কর্তৃক কৃত কাজ,

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_{v_A}^{v_B} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

এখানে, A ও B বিন্দুতে কণাটির বেগ যথাক্রমে v_A ও v_B

আমরা জানি সংরক্ষণশীল বল স্থিতিশক্তির ঋণাত্মক নতি মাত্রার সমান অর্থাৎ,

$$F = -\frac{dU}{dr} \text{ বা, } \vec{F}.d\vec{r} = -dU$$

$$\therefore \quad W = = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{U_A}^{U_B} dU = U_A - U_B$$

এখানে, U_A ও U_B যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে কণাটির স্থিতিশক্তি।

অতএব, $U_A - U_B = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv_A{}^2 + U_A = \frac{1}{2}mv_B{}^2 + U_B$$

সুতরাং, $\frac{1}{2}mv^2 + U =$ ধ্রুবক

অর্থাৎ, সংরক্ষণশীল সংস্থার প্রতি বিন্দুতে কণার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুবক হয়।

৫.১৩.২ অসংরক্ষণশীল বল
Non-conservative force

যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে তাকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে ওই বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় না তাকে অসংরক্ষণশীল বল বলে। উদাহরণ—ঘর্ষণ বল, সান্দ্র বল প্রভৃতি। MAT(24-25)

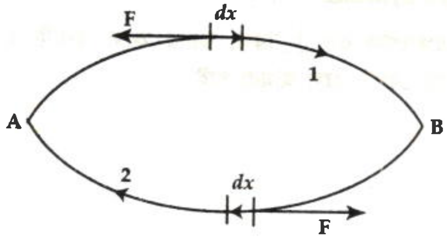
অথবা, যে সংস্থায় বা সিস্টেমে বাধাজনিত বল উপস্থিত থাকে সেখানে যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত থাকে না, বরং যান্ত্রিক শক্তির অপচয় হয়, এ ধরনের সংস্থা বা সিস্টেমকে অসংরক্ষণশীল সংস্থা বলা হয় এবং এই বাধাজনিত বলকে অসংরক্ষণশীল বল বলা হয়।

অন্যভাবে বলা যায়, একটি বন্ধ পথে কোনো বল দ্বারা কৃত মোট কাজের পরিমাণ যদি শূন্য না হয় তবে সেই বলকে অসংরক্ষণশীল বল বলা হয়।

***অসংরক্ষণশীল বলের বৈশিষ্ট্য :**

(১) এই বল শুধু অবস্থানের ওপর নির্ভর করে না।
(২) একটি বস্তুকে এক স্থান থেকে আরেক স্থানে স্থানান্তরে কাজ পথের ওপর নির্ভর করে।
(৩) অসংরক্ষণশীল বল দ্বারা কাজ সম্পূর্ণরূপে পুনরুদ্ধার করা যায় না।
(৪) অসংরক্ষণশীল বলের ক্রিয়ায় যান্ত্রিক সূত্রের নিত্যতার সূত্র সংরক্ষিত হয় না।
(৫) পূর্ণচক্রে মোট কাজ শূন্য হয় না।

ধরি একটি বস্তুকে মসৃণ অনুভূমিক মেঝের ওপর দিয়ে ঠেলে A বিন্দু হতে 1নং পথে B বিন্দুতে আনা হলো [চিত্র ৫.২৯]। এই ক্ষেত্রে ঘর্ষণ বল বস্তুর গতি অভিমুখের বিপরীতে ক্রিয়া করবে। কাজেই এই স্থানান্তরে ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে কাজ করতে হবে; কারণ ঘর্ষণ বল সর্বদাই গতিপ্রতিরোধী বল। গতিপথে একটি ক্ষুদ্র সরণ dx এবং এই সরণ গড় F ঘর্ষণ বলের বিপরীতে সংঘটিত হলে, কাজ $W = -Fdx$



চিত্র ৫.২৯

∴ 1নং পথে A হতে B পর্যন্ত নিতে মোট কৃত কাজ এরূপ ছোট ছোট কাজের সমষ্টির সমান ও মোট কাজ, $W_1 = -\int_1 Fdx$

এখন যদি বস্তুটিকে B হতে 2নং পথে পুনরায় A বিন্দুতে নিয়ে যাওয়া হয় তবে এই ক্ষেত্রেও ঘর্ষণ বল বস্তুর গতিপথের বিপরীতে ক্রিয়া করবে।

কাজেই এই ক্ষেত্রেও কাজ,

$$W_2 = -\int_2 Fdx$$

উভয় ক্ষেত্রে কাজ ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে হওয়ায় উভয় কাজ ঋণাত্মক এবং তাদের যোগফল শূন্য হবে না। অর্থাৎ $W_1 + W_2 = -\int_1 Fdx - \int_2 Fdx \neq 0$

ঘর্ষণ বল কর্তৃক কৃত কাজ পুনরুদ্ধার করা সম্ভব নয়। অতএব ঘর্ষণ বল অসংরক্ষণশীল বল।

সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বল ক্ষেত্রের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী দেখানো যায় যে,

কোনো বস্তুকে অভিকর্ষ বল F-এর বিরুদ্ধে মাটি হতে h ওপরে তুলতে কাজের পরিমাণ $= -Fh$। এখন তাকে সেখান থেকে ছেড়ে দিলে মাটিতে ফিরে আসতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজের পরিমাণ হবে $+Fh$

সুতরাং বস্তুর মাটি হতে ওপরে ওঠার পর আবার মাটিতে ফিরে আসতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজের পরিমাণ $(-Fh + Fh)$ শূন্য হবে। সুতরাং অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ বল সংরক্ষণশীল বল। তেমনি বিদ্যুৎ বল, চৌম্বক বল ইত্যাদি সংরক্ষণশীল বল।

অপর পক্ষে, ঘর্ষণের ক্ষেত্রে, ঘর্ষণ বল বস্তুকে চলতে বাধা দেয়। সেজন্যে এর দ্বারা বস্তুর ওপর কাজ ঋণাত্মক হয়। অতএব ঘর্ষণ বল হলো অসংরক্ষণশীল বল।

DAT(20-21)

অনুধাবনমূলক কাজ : ঘর্ষণ বল সংরক্ষণশীল বল নয় কেন ? ব্যাখ্যা কর।

এক্ষেত্রে কোনো এক বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে যেকোনো পথ ঘুরে আবার ওই বিন্দুতে ফিরে এলে কৃত কাজ শূন্য হয় না। ঘর্ষণ বল দ্বারা কাজ আদি ও চূড়ান্ত পথের ওপর নির্ভর করে না, গতিপথের ওপর নির্ভর করে। ঘর্ষণ বল কর্তৃক কাজ পুনরুদ্ধার করা সম্ভব নয়। অতএব ঘর্ষণ বল অসংরক্ষণশীল বল।

গাণিতিক উদাহরণ ৫.৮

১। 270 kg ভরের একটি বোঝা একটি ক্রেনের সাহায্যে 0.1 ms^{-1} বেগে ওঠানো হলো। ক্রেনের ক্ষমতা নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); সি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০১০; Admission Test : KU, JKKNIU 2019-20 (মান ভিন্ন); BUET 2021-22 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \times s}{t} = Fv$$

$$= mgv \quad [\because F = mg]$$

$$\therefore \quad P = 270 \times 9.8 \times 0.1\ W = 264.6\ W$$

এখানে,
ভর, $m = 270$ kg
বেগ, $v = 0.1\ ms^{-1}$
$g = 9.8\ ms^{-2}$
ক্ষমতা, $P = ?$

২। 900 kg ভরের একটি লিফট 350 kg ভরের বোঝাসহ 100 s-এ নিচতলা থেকে 18 তলায় 75 m ওপরে ওঠে। কৃত কাজ ও প্রযুক্ত ক্ষমতা নির্ণয় কর। [CKRUET Admission Test, 2021-22]

আমরা জানি,

কৃত কাজ, $W = mgh$

$\therefore \quad W = 1250 \times 9.8 \times 75$

$= 9.187 \times 10^5$ J

আবার, ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t}$

$\therefore \quad P = \frac{9.187 \times 10^5}{100} = 9.187 \times 10^3 = 9.187$ kW

এখানে,

মোট ভর, $m = 900 + 350 = 1250$ kg

উচ্চতা, $h = 75$ m

সময়, $t = 100$ s

$g = 9.8$ ms^{-2}

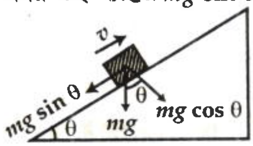
$W = ?$

$P = ?$

৩। 60 kg ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি 40 kg-এর একটি বোঝা নিয়ে $\frac{1}{10}$ নতিবিশিষ্ট একটি নততল বরাবর প্রতি ঘণ্টায় 6 km বেগে চলছে। ওই ব্যক্তি কত ক্ষমতা প্রয়োগ করছে?

বোঝাসহ ব্যক্তির ওজন $= mg = 100 \times 9.8$ N

নততল বরাবর ওঠার সময় ওই ব্যক্তির $mg \sin\theta$ বলের বিরুদ্ধে কাজ করবে [চিত্র ১]।



চিত্র-১

সুতরাং ওই ব্যক্তি দ্বারা প্রযুক্ত ক্ষমতা,

$P = mg \sin\theta \times v$

$= 100 \times 9.8 \times \frac{1}{10} \times \frac{5}{3}$ [এখানে যেহেতু θ ক্ষুদ্র,

$= 163.3$ watt সুতরাং $\tan\theta \simeq \sin\theta = \frac{1}{10}$]

এখানে,

বোঝাসহ ব্যক্তির ভর,

$m = (60 \text{ kg} + 40 \text{ kg})$

$= 100$ kg

$v = 6$ km/hr

$= \frac{6 \times 1000}{60 \times 60} = \frac{5}{3}$ ms^{-1}

$\tan\theta = \frac{1}{10}$

৪। 60 kg ভরের জনৈক ব্যক্তি 20 মিনিটে 180 m উচ্চ একটি চূড়ায় আরোহণ করেন। তার বিভবশক্তি কত ? কাজ ও প্রযুক্ত ক্ষমতা নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে অভিকর্ষীয় বলের বিরুদ্ধে কাজ,

W = বল × বলের ক্রিয়া রেখায় সরণ

= ওজন × উল্লম্ব সরণ

$= mg \times h$

এখানে, $m = 60$ kg

$g = 9.8$ ms^{-2}

$h = 180$ m

$\therefore$ নির্ণেয় কাজ, $W = 60 \text{ kg} \times 9.8 \text{ ms}^{-2} \times 180 \text{ m} = 10.584 \times 10^4$ J

অর্থাৎ, 180 মিটার উচ্চতায় বিভবশক্তি = অভিকর্ষীয় বলের বিরুদ্ধে কৃত কাজ $= 10.584 \times 10^4$ J

প্রযুক্ত ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{10.584 \times 10^4 \text{ J}}{20 \times 60 \text{ s}} = 88.2$ W

এখানে,

$t = 20$ মিনিট $= 20 \times 60$ s

৫। এক ব্যক্তি সিঁড়ি দিয়ে তিন তলায় ওঠতে 50 সেকেন্ড সময় নিলেন। সিঁড়িতে সর্বমোট 80টি ধাপ রয়েছে এবং প্রতিটি ধাপের উচ্চতা 12 cm। ওই ব্যক্তির ভর 60 kg হলে তাঁর অশ্বক্ষমতা কত ?

[CUET Admission Test, 2014-15(মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t}$

এখানে কৃত কাজ,

$W = mgh = 60 \times 9.8 \times 80 \times 0.12$ J

$\therefore$ ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{60 \times 9.8 \times 80 \times 0.12}{50}$ watt

$= 112.9 \text{ watt} = \frac{112.9}{746}$ H.P.

$= 0.15$ HP

এখানে,

সময়, $t = 50$ s

ধাপ সংখ্যা = 80

প্রতিটি ধাপের উচ্চতা, $h = 12 \text{ cm} = 0.12$ m

মোট উচ্চতা, $h = 80 \times 0.12$ m

ভর, $m = 60$ kg

৬। 3430 W ক্ষমতাসম্পন্ন একটি মোটর চালিত পাম্প দ্বারা একটি কূপ হতে গড়ে 7·20 m উচ্চতায় পানি ওঠানো হয়। মোটরের দক্ষতা 90% হলে প্রতি মিনিটে কত কিলোগ্রাম পানি ওঠে ? [ব. বো. ২০০৬; Admission Test : RUET 2008-09 (মান ভিন্ন); CKRUET 2020-21 (মান ভিন্ন); BUET 2019-20]

ধরি নির্ণেয় ভর = m kg

আমরা জানি কার্যকর ক্ষমতা, (P′) = দক্ষতা (η) × প্রকৃত ক্ষমতা (P)

প্রশ্নানুযায়ী মোটরের কার্যকর ক্ষমতা, $P' = \eta \times P = \frac{90}{100} \times 3430\ W = 3087\ W$

প্রতি মিনিটে প্রাপ্ত কাজ,

$$W = mg \times h = (m \times 9{\cdot}8) \times 7{\cdot}20\ J$$

$\therefore$ কার্যকর ক্ষমতা, $P' = \frac{W}{t} = \frac{m \times 9{\cdot}8 \times 7{\cdot}20}{60} W$

শর্তানুযায়ী, $\frac{m \times 9{\cdot}8 \times 7{\cdot}20}{60} = 3087$

$$\therefore \quad m = \frac{3087 \times 60}{9{\cdot}8 \times 7{\cdot}20} = 2625\ kg$$

এখানে, $P = 3430\ W$

$\eta = 90\% = 90/100$

$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

$h = 7{\cdot}20\ m$

t = 1 মিনিট = 60 s

$m = ?$

৭। একটি কূয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি মিনিটে 1000 kg পানি 10 m গড় উচ্চতায় ওঠানো হয়। যদি ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 40% নষ্ট হয়, তা হলে এর অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৫; Admission Test : BUET 2012-13 (মান ভিন্ন); CKRUET 2020-21 (মান ভিন্ন); BUET 2021-22 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি কার্যকর ক্ষমতা,

$$P' = \frac{P \times 60}{100}$$

$$\therefore \quad P = \frac{P' \times 100}{60}$$

এক্ষেত্রে ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 40% নষ্ট হওয়াতে কার্যকর ক্ষমতা = (100 − 40) % = 60%

$$\therefore \quad P = \frac{mgh \times 100}{60 \times t}$$

$$= \frac{1000 \times 9{\cdot}8 \times 10 \times 100}{60 \times 60}$$

$$= 2{\cdot}7222 \times 10^3\ watt$$

$$= \frac{2{\cdot}7222 \times 10^3}{746} HP = 3{\cdot}65\ HP$$

$$\therefore \quad P = 3{\cdot}65\ HP$$

এখানে,

$P' = \frac{mgh}{t}$

$m = 1000\ kg$

$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

$h = 10\ m$

$t = 60\ s$

$P = ?$

৮। একটি ক্রেন প্রতিটি 50 kg ওজনের 12টি সিমেন্টের ব্যাগ সমদ্রুতিতে 160 m উঁচু একটি নির্মাণাধীন ভবনের ছাদে ওঠাতে 1 min 10 sec সময় নেয়। ক্রেনটির ক্ষমতা অশ্বশক্তিতে বের কর। [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি,

$$P = \frac{mgh}{t \times 746} HP$$

$$= \frac{600 \times 9{\cdot}8 \times 160}{70 \times 746} HP$$

$$= 18{\cdot}016\ HP$$

এখানে,

$m = 50 \times 12 = 600\ kg$

$h = 160\ m$

$t = 1\ min\ 10\ sec = 70\ sec$

৯। একটি পানি পূর্ণ কুয়ার দৈর্ঘ্য 10 m, প্রস্থ 6 m এবং গভীরতা 10 m। 80% কর্মদক্ষতাবিশিষ্ট একটি পাম্প 30 মিনিটে কুয়াটিকে পানি শূন্য করতে পারে। পাম্পটির অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); Admission Test : CUET 2004-05 (মান ভিন্ন), 2009-10; KUET 2019-20 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$P' = \frac{mgh'}{t} = \frac{\rho V \times g \times h'}{t}$$

$$= \frac{10^3 \times 10 \times 6 \times 10 \times 9{\cdot}8 \times \frac{10}{2}}{30 \times 60}$$

$$= 16333{\cdot}33 \text{ W}$$

আবার,

$$P = \frac{P'}{\eta}$$

বা, $P = \frac{P'}{0{\cdot}8} = \frac{16333{\cdot}33}{0{\cdot}8 \times 746} \text{ HP} = 27{\cdot}37 \text{ HP}$

এখানে,

$\rho = 10^3 \text{kg/m}^3$
$l = 10 \text{ m}$
$d = 6 \text{ m}$
$h = 10 \text{ m}$
$\therefore V = 10 \times 6 \times 10 \text{ m}^3$
গড় সরণ,
$h' = \frac{0 + 10}{2} = 5 \text{m}$
$t = 30 \text{ min} = 30 \times 60 \text{ s}$

১০। একটি দালানের ছাদের সাথে লাগানো 5 m লম্বা একটি মই অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে আছে। 60 kg ভরের এক ব্যক্তি 20 kg ভরের ইট সহ 10 sec-এ ছাদে উঠলে তার অশ্বক্ষমতা বের কর।
[সি. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); Admission Test : RUET 2011-12, 2019-20(মান ভিন্ন); CUET 2009-10 (মান ভিন্ন); বিশ্ব. গুচ্ছ ভর্তি পরীক্ষা ইউনিট– A 202-21 (মান ভিন্ন)]

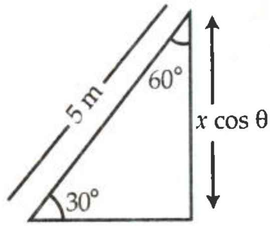
আমরা জানি,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fx\cos\theta}{t} = \frac{mgx\cos\theta}{t}$$

বা, $P = \frac{80 \times 9{\cdot}8 \times 5 \times \cos 60°}{10}$

$$= \frac{1960}{10} = 196 \text{ W}$$

$$= \frac{196}{746} \text{ HP} = 0{\cdot}263 \text{ HP}$$



এখানে,
$x = 5 \text{ m}$
$\theta = 90° - 30° = 60°$
$m = 60 + 20 = 30 \text{ kg}$
$t = 10 \text{ sec}$

১১। 80% দক্ষতাসম্পন্ন একটি মোটর একটি ক্রেন নিয়ন্ত্রণ করে যার দক্ষতা 50%। মোটরটি 3·73 kW ক্ষমতা প্রয়োগ করলে ক্রেনে 746 N ওজনের একটি বস্তুর ঊর্ধ্বমুখী গড় বেগ কত হবে ?

এখানে, মোটরের দক্ষতা = 3·73 kW = 3730 W

মোটর কর্তৃক ক্রেনের ওপর প্রযুক্ত ক্ষমতা $= 3730 \times 80\% = \frac{3730 \times 80}{100} = 2984 \text{ W}$

আবার, ক্রেনের কার্যকর শক্তি $= 2984 \times 50\% = \frac{2984 \times 50}{100} = 1492 \text{ W}$

এখানে বস্তুর ওজন, $F = 746 \text{ N}$
গড় বেগ v হলে, আমরা জানি,

$$P = F \times v$$

$$\therefore v = \frac{P}{F} = \frac{1492}{746} = 2 \text{ ms}^{-1}$$

১২। সর্বোচ্চ 1800 kg ভর বহনে সক্ষম একটি লিফট 2 ms⁻¹ সমবেগে ওপরের দিকে উঠছে। গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়ারত ঘর্ষণ বলের মান 4000 N, লিফটের জন্য সর্বনিম্ন কত HP বিশিষ্ট মোটরের প্রয়োজন হবে ?

লিফটের ঊর্ধ্বমুখী বল,

$$F = m(g + a) + \text{ঘর্ষণ বল}$$
$$= 1800 \times (9{\cdot}8 + 0) + 4000$$
$$= 21640 \text{ N}$$

আমরা জানি ক্ষমতা,

$$P = Fv = 21640 \times 2 = 43280 \text{ W}$$
$$= \frac{43280}{746} \text{ HP} = 58{\cdot}016 \text{ HP}$$

এখানে,
$m = 1800 \text{ kg}$
$a = 0$
$v = 2$ ms–1
ঘর্ষণ বল = 4000 N

১৩। একটি বানর 20 মিটার উঁচু নারিকেল গাছ থেকে নারিকেল ফেলছে। প্রত্যেকটি নারিকেলের ভর 2 kg এবং বানরটি প্রতি সেকেন্ডে 2টি করে নারিকেল ফেলছে। নারিকেলের সমস্ত শক্তি বিদ্যুৎশক্তিতে রূপান্তরিতে হলে উক্ত বিদ্যুৎ শক্তির সাহায্যে কতটি 60 ওয়াট বৈদ্যুতিক বাতি প্রজ্বলিত করা যাবে ? [CKRUET Admission Test, 2020-21]

প্রতি সেকেন্ডে পতিত নারিকেলের ভর,

$$M = 2 \times 2\ kg = 4\ kg$$

আমরা জানি,

$$P = \frac{mgh}{t}$$

$$nP' = \frac{mgh}{t}$$

$$\therefore \quad n = \frac{mgh}{t \times P'} = \frac{4 \times 9{\cdot}8 \times 20}{1 \times 60} = 13{\cdot}067 \simeq 13\text{টি}$$

এখানে,

উচ্চতা, $h = 20\ m$

সময়, $t = 1\ s$

$m' = 2\ kg$

বাতির ক্ষমতা, $P' = 60\ W$

বাতিগুলোর মোট ক্ষমতা $= nP'$

বৈদ্যুতিক বাতির সংখ্যা, $n = ?$

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

কাজ, $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ ... ... (1)

$W = Fs$ ... ... (2)

কাজ, $W = Fs \cos\theta$ ... ... (3)

$W = \int_{r_0}^{r} F dr$ ... ... (4)

স্প্রিং প্রসারণে কাজ, $W = \frac{1}{2} Kx^2$ ... ... (5)

$W = \frac{GMm}{R^2} \times h$ ... ... (6)

স্প্রিং ধ্রুবক, $K = \frac{F}{x}$ ... ... (7)

$W = -GMm\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$ ... ... (8)

বিভব শক্তি, $E_p = mgh$ ... ... (9)

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ ... ... (10)

$W = Frd$ ... ... (11)

ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = Fv$ ... ... (12)

স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি, $E_p = \frac{1}{2} Kx^2$ ... ... (13)

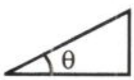
$E_P = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ ... ... (14)

$Ek = \frac{1}{2} n\omega^2 (A^2 - x^2)$ ... ... (15)

যান্ত্রিক শক্তি, $E = E_p + E_k$ ... ... (16)

কর্মদক্ষতা, $\eta = \frac{\text{কার্যকর শক্তি}}{\text{প্রদত্ত মোট শক্তি}}$ ... ... (17)

$F = -\frac{dv}{dr}$ ... ... (18)



ক্ষমতা, $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos\theta$ ... ... (19)

$F = \tau\omega$ ... ... (20)

কার্যকর ক্ষমতা, $P' = \eta \times$ প্রকৃত ক্ষমতা (P) ... ... (21)

কাজ, $W = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$ ... ... (22)

$W = \Delta K$ ... ... (23)

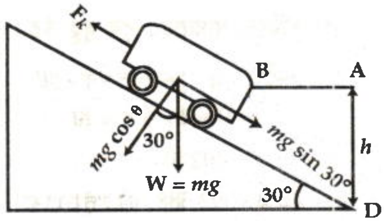
বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। একজন ড্রাইভার 1000 kg ভরের একটি ট্রাক মাটির সাথে 30° কোণে একটি আনত তলের ওপর দিয়ে 25 ms^{-1} বেগে চালাচ্ছিল। সামনে 50 m দূরে এক বালককে দেখে ট্রাকটি থেমে গেল।

(ক) ট্রাকটি ভূমি হতে কত উঁচুতে আছে ?

(খ) এক্ষেত্রে B ও D বিন্দুতে সংরক্ষণশীলতার নীতি পালিত হবে কি?—ব্যাখ্যা কর। [ধর ঘর্ষণ বল = 11150 N]

[কু. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন)]



(ক) মনে করি, ট্রাকটি B বিন্দু হতে 50 m অতিক্রম করে D বিন্দুতে থেমে যায়। তা হলে B হতে D বিন্দুর উল্লম্ব দূরত্ব $AD = h$

$\therefore \sin 30° = \frac{h}{50}$ বা, $\frac{1}{2} = \frac{h}{50}$ বা, $h = \frac{50}{2} = 25\,m$

B বিন্দুতে ট্রাকটি ভূমি হতে 25 m উচ্চতায় অবস্থিত।

(খ) B বিন্দুতে ট্রাকটির মোট শক্তি = গতিশক্তি + বিভবশক্তি

$= \frac{1}{2} mv_B^2 + mgh$

$= \frac{1}{2} \times 1000 \times (25)^2 + 1000 \times 9{\cdot}8 \times 25$

$= 500 \times (25)^2 + 25000 \times 9{\cdot}8$

$= 312500 + 245000 = 557500$ J

এখানে,
$m = 1000$ kg
$\theta = 30°$
$s = 50$ m
শেষ বেগ, $v = 0$
B বিন্দুতে ট্রাকটির বেগ, $v_B = 25\ ms^{-1}$
ঘর্ষণ বল = 11150 N

D বিন্দুতে গাড়িটির বেগ = 0, গতিশক্তি = 0, বিভবশক্তি = 0

$\therefore$ ঘর্ষণ বলের জন্য শক্তির রূপান্তর = D বিন্দুতে গাড়িটিকে থামাতে প্রয়োজনীয় শক্তি

= ঘর্ষণ বল × সরণ $= F_k \times s = 11150 \times 50 = 557500$ J

$\therefore$ D বিন্দুতে গাড়িটির মোট শক্তি $= 557500 + 0 + 0 = 557500$ J

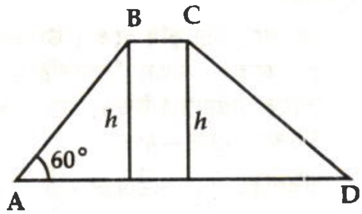
$\therefore$ B বিন্দুতে গাড়িটির মোট শক্তি = D বিন্দুতে গাড়িটির মোট শক্তি। কাজেই গাড়িটি সংরক্ষণশীলতার নীতি মেনে চলে।

২। চিত্রে প্রদর্শিত AB মই বেয়ে 30 kg ভরের একটি বালক ওপরে ওঠে এবং CD আনত তল বেয়ে নিচে নেমে আসে। তলের ঘর্ষণ বল 50 N।

চিত্রে AB = 4 m, BC = 1 m এবং CD = 5 m [চ. বো. ২০১৫]

(ক) বালকটি A হতে C বিন্দুতে পৌঁছাতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ হিসাব কর।

(খ) CD পথে নামার সময় বালকটির ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণ থেকে কম না বেশি হবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।



(ক) AD হতে BC তলের উচ্চতা h হলে $\frac{h}{AB} = \sin 60°$

$\therefore h = AB \sin 60° = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3{\cdot}464$ m

A হতে B বিন্দুতে পৌঁছাতে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কাজ, $W = E_p = 30 \times 9{\cdot}8 \times 3{\cdot}464 = 1018{\cdot}4$ J

এবং B থেকে C বিন্দুতে যেতে কৃত কাজ $W = mg \times BC = 30 \times 9{\cdot}8 \times 1 = 294$ J

A হতে C বিন্দুতে পৌঁছাতে কৃত কাজ $= 294 + 1018{\cdot}4 = 1312{\cdot}4$ J

(খ) CD পথে কোনো ঘর্ষণ না থাকলে CD তল বরাবর নিচের দিকে বালকটির ত্বরণ হতো $g' = g \sin\theta$, θ হলো ভূমির সাথে CD তলের আনতি।

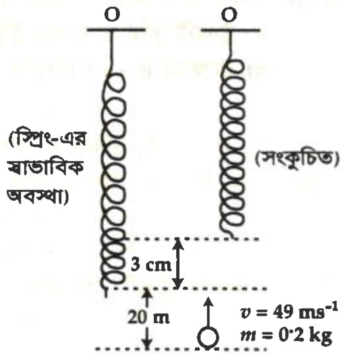
আবার $\sin\theta = \frac{h}{CD} = \frac{3{\cdot}464}{5} = 0{\cdot}6928$

বা, $\theta = \sin^{-1}(0{\cdot}6928) = 43{\cdot}85°$

$\therefore\ g' = 9{\cdot}8 \times \sin 43{\cdot}85° = 6{\cdot}79\ ms^{-2}$ [সূত্র : যেকোনো হেলানো তলে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g' = g \times \sin\theta$]

$\therefore\ g' < g$। সুতরাং কোনো ঘর্ষণ না থাকলে CD বরাবর নিচের দিকে ত্বরণ হতো $6{\cdot}79\ ms^{-2}$, আর ঘর্ষণ থাকলে ত্বরণ আরো কম হবে। অতএব CD পথে নামার সময় বালকটির ত্বরণ অভিকর্ষজ ত্বরণের চেয়ে কম হবে।

৩। চিত্রে একটি স্প্রিং-এর এক প্রান্ত O বিন্দু হতে ঝুলানো হলো। 0·2 kg ভরের একটি বলকে 49 ms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করায় এটি 20 m ওপরে স্প্রিংটির অপর প্রান্তে আঘাত করে 3 cm সংকুচিত করে, স্প্রিংটিও বলের ওপর প্রত্যায়নক বল প্রয়োগ করে। [রা. বো. ২০১৫]



(ক) ভূমিতে আঘাতের পূর্ব মুহূর্তে বলটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক থেকে স্প্রিং বল দ্বারা কৃত কাজ নির্ণয় সম্ভব কি না— গাণিতিক যুক্তি দিয়ে ব্যাখ্যা কর।

(ক) ভূমিতে আঘাতের পূর্ব মুহূর্তের বেগ v হলে,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh = 0 + 2gh$$
$$= 0 + 2 \times 9·8 \times 20·03 \qquad [\because h = 20 + 0·03 = 20·03 \text{ m}]$$
$$= 392·588$$
$$\therefore \quad v = \sqrt{392·588} = 19·81 \text{ ms}^{-1}$$

(খ) স্প্রিংটি শুধুমাত্র সংকোচনের সময় কাজ সম্পন্ন করবে। যা স্প্রিংটি স্পর্শের সময় বলটির গতিশক্তির সমান। এই সময় বেগ v হলে,

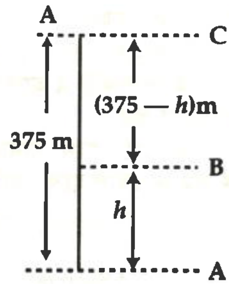
$$v^2 = v_0^2 - 2gh = (49)^2 - 2 \times 9·8 \times 20$$
$$= 2009 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$$

$\therefore$ স্প্রিং বল দ্বারা কৃত কাজ = আঘাত করার মুহূর্তে বলটির গতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0·2 \times 2009$$
$$= 200·9 \text{ J}$$

সুতরাং উদ্দীপক থেকে স্প্রিং বল দ্বারা কৃত কাজ নির্ণয় করা সম্ভব।

৪। পেট্রোনাস টুইন টাওয়ারের শীর্ষতলের উচ্চতা 375 m। কাসেম 10 kg ভরের একটি বস্তুসহ শীর্ষতলে আরোহণ করে। এতে সময় লাগে 40 মিনিট। সে শীর্ষতল থেকে বস্তুটি নিচে ফেলে দিল। উহা বিনা বাধায় ভূমিতে পতিত হলো। মনির বলল, "আমি এ কাজটি করতে পারব।" কাসেমের ভর এবং মনিরের ভর যথাক্রমে 60 kg ও 55 kg। [সি. বো. ২০১৫]



(ক) ভূমি থেকে কত উচ্চতায় বস্তুটির বিভব শক্তি এর গতিশক্তির দ্বিগুণ হবে?

(খ) মনির কি একই সময়ে কাজটি করতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণ পূর্বক মতামত দাও।

(ক) মনে করি ভূমি হতে h উচ্চতায় বিভবশক্তি গতিশক্তির দ্বিগুণ।

ভূমি হতে h উচ্চতায় বিভবশক্তি $E_p = mgh$ ... ... (i)

যেহেতু টাওয়ারের উচ্চতা 375 m কাজেই ওপর থেকে B বিন্দুর উচ্চতা = $(375 - h)$ m

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,[v_0^2 + 2g(375 - h)]$

$$= \frac{1}{2}m\,[2g(375 - h)] \qquad [\because v_0 = 0]$$

$E_k = mg\,(375 - h)$ ... ... (ii)

প্রশ্নমতে, $E_p = 2E_k$

বা, $mgh = 2 \times mg\,(375 - h)$

বা, $h = 2\,(375 - h)$

বা, $h = 750 - 2h$

বা, $3h = 750$

$\therefore \quad h = 250$ m

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী টাওয়ারের উচ্চতা, $h = 375$ m
কাসেমের ক্ষেত্রে ভর, $m = (10 + 60)$ kg = 70 kg
সময়, $t = 40$ min = 40×60 sec = 2400 sec

$\therefore$ ক্ষমতা, $P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{mgh}{t} = \dfrac{70 \times 9{\cdot}8 \times 375}{2400} = 107{\cdot}2$ watt

আবার মনিরের ক্ষেত্রে ভর, $m' = (10 + 55)$ kg = 65 kg
সময় $t = 40$ min = 2400 sec

ক্ষমতা, $P' = \dfrac{W'}{t} = \dfrac{m'gh}{t} = \dfrac{65 \times 9{\cdot}8 \times 375}{2400} = 99{\cdot}5$ watt

মনির 99·5 watt ক্ষমতা। কাসেমের প্রযুক্ত ক্ষমতার চেয়ে কম। সুতরাং মনির একই সময়ে কাজটি করতে পারবে।

৫। একটি স্প্রিং–এর এক প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকিয়ে মুক্ত প্রান্তে 300g ভরের একটি বস্তু যুক্ত করলে স্প্রিংটি 9 cm প্রসারিত হয়ে সাম্যাবস্থায় আসে। সাম্যাবস্থা হতে 6 cm টেনে ছেড়ে দিলে এটি দুলতে থাকে। [$g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}]

(গ) স্প্রিংটির স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় কর।

(ঘ) সাম্যাবস্থা হতে বস্তুটির সরণ যখন 3 cm হয় তখন এর বিভবশক্তি ও গতিশক্তির তুলনা কর।

[দি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০২১; ম. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]

(ক) আমরা জানি,

$F = Kx$

এবং $F = mg = 0{\cdot}3 \times 9{\cdot}8$

$\therefore K = \dfrac{F}{x} = \dfrac{0{\cdot}3 \times 9{\cdot}8}{0{\cdot}09} = 32{\cdot}67\ \text{Nm}^{-1}$

এখানে,
K = স্প্রিং ধ্রুবক
$m = 300$ gm $= 0{\cdot}3$ kg
$g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}
$x = 9$ cm $= 0{\cdot}09$ m

(খ) এখানে, $x = 3$ cm অবস্থানে বিভব শক্তি,

$E_P = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$
$= \dfrac{1}{2} \times 0{\cdot}3 \times (10{\cdot}43)^2 \times (0{\cdot}03)^2$
$= 0{\cdot}0147$ J

এখানে,
$x = 3$ cm $= 0{\cdot}03$ m
$A = 6$ cm $= 0{\cdot}06$ m
$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$
$\omega = \sqrt{\dfrac{32{\cdot}67}{0{\cdot}3}} = 10{\cdot}43$ rads^{-1}

এবং গতিশক্তি,

$E_K = \dfrac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$
$= \dfrac{1}{2} \times 0{\cdot}3 \times (10{\cdot}43)^2 \{(0{\cdot}06)^2 - (0{\cdot}03)^2\}$
$= \dfrac{1}{2} \times 0{\cdot}3 \times 27 \times 10^{-4} = 0{\cdot}044$ J

$\dfrac{E_K}{E_P} = \dfrac{0{\cdot}0441}{0{\cdot}0147} = 3$

অর্থাৎ ওই অবস্থানে গতিশক্তি বিভব শক্তির 3 গুণ।

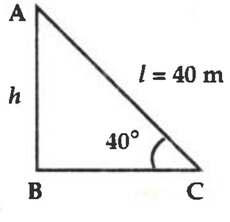
৬। 80 kg ভরের একজন লোক 20 kg ভরের বোঝা মাথায় নিয়ে 40 m দৈর্ঘ্যের মই দিয়ে একটি দালানের ছাদে উঠল। মইটি অনুভূমিকের সাথে 40° কোণ উৎপন্ন করে দালানের ছাদে লাগানো ছিল।

(ক) লোকটি কর্তৃক কৃত কাজ বের কর।

(খ) মইটির দৈর্ঘ্য 60m হলে অনুভূমিকের সাথে কত কোণে স্থাপন করলে একই পরিমাণ কাজ সম্পাদিত হবে এবং এক্ষেত্রে কোনো সুবিধা পাওয়া যাবে কি না—গাণিতিকভাবে মতামত দাও।

[রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০১৭; ম. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন);]

(ক)



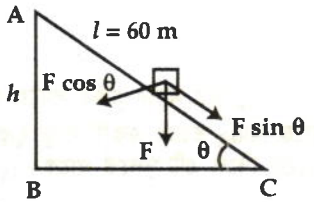
এখানে,
মোট ভর, $m = (80 + 20)$ kg = 100 kg
মই এর দৈর্ঘ্য, $l = 40$ m
অনুভূমিকের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 40°$
ছাদের উচ্চতা $= h$
কৃত কাজ, $W = ?$

আমরা জানি, $\sin\theta = \frac{h}{l}$

$\therefore\ h = l \times \sin\theta = 40 \sin 40° = 25.71$ m

এবং কৃত কাজ, $W = mgh = 100 \times 9.8 \times 25.71$
$= 25195.8$ J

(খ)



এখানে,
মোট ভর, $m = 100$ kg
মইটির দৈর্ঘ্য, $l = 60$ m
ছাদের উচ্চতা, $h = 25.71$ m

যেহেতু উভয় ক্ষেত্রে কাজের পরিমাণ একই।

আবার, ধরি মইটি অনুভূমিকের সাথে θ কোণে স্থাপন করা হলো।

$\therefore$ ছাদের উচ্চতা, $h = l\sin\theta = 60 \times \sin\theta$

$\therefore\ 25.71 = 60 \times \sin\theta$

বা, $\sin\theta = \frac{25.71}{60} = 0.4285$

$\therefore\ \theta = \sin^{-1}(0.4285) = 25.37°$

এক্ষেত্রে একই কাজ সম্পাদিত হবে যদি মইটিকে অনুভূমিকের সাথে 25.37° কোণে স্থাপন করা হয়। θ-এর মান যত কম হবে চিত্র অনুযায়ী F sin θ এর মান তত কম হবে এবং ওপরে উঠতে তত কম কষ্ট হবে।

যেহেতু θ-এর মান পূর্বের তুলনায় হ্রাস পেয়েছে সেহেতু এক্ষেত্রে লোকটির ওপরে ওঠতে কম কষ্ট হবে।

৭। একটি কূপের গভীরতা এবং ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 10m এবং 3.44m। একটি ইঞ্জিন 3 মিনিটে কূপটি পানিশূন্য করতে পারে। পরে ইঞ্জিনটিকে 1200 kg ভরের একটি গাড়ির ইঞ্জিন হিসেবে ব্যবহার করা হলো।

(ক) কূপের ক্ষেত্রে ইঞ্জিন দ্বারা সম্পাদিত কাজের হিসাব কর।

(খ) 2.4 সেকেন্ড সময়ের মধ্যে স্থিরাবস্থা থেকে 20 ms^{-1} বেগ অর্জন ওই গাড়িটির পক্ষে সম্ভব কি না? গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। [কু. বো. ২০২১]

(ক) কুয়ার আয়তন, $V = \pi r^2 h = 3.14 \times (3.44)^2 \times 10$

পানির ভর, $m = V\rho = 3.14 \times (3.44)^2 \times 10 \times 10^3$
$= 3.716 \times 10^5$ kg

কুয়ার পানির গড় সরণ, $h_1 = \frac{h}{2} = \frac{10}{2} = 5$m

এখানে,
$h = 10$ m
$r = 3.44$ m
$\rho = 10^3$ kgm^{-3}

$\therefore$ সম্পাদিত কাজ, $W = Fh_1 = mgh_1 = 3.716 \times 10^5 \times 9.8 \times 5 = 18 \times 10^6$ J

(খ) আমরা জানি ইঞ্জিনের ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t}$

$\therefore\ P = \frac{18 \times 10^6}{3 \times 60} = 1 \times 10^5$ watt

আবার গাড়ির ইঞ্জিন কর্তৃক কৃত কাজ,

$W = Pt' = 1 \times 10^5 \times 2.4 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 1200\ v^2$

এখানে,
$m = 1200$ kg
$t' = 2.4$ s
$t = 3$ min $= 3 \times 60$ s

বা, $v^2 = \frac{2 \times 2.4 \times 10^5}{1200}$

বা, $v = \sqrt{4 \times 10^2} = 20\ ms^{-1}$

সুতরাং ওই গাড়িটির পক্ষে 2.4 সেকেন্ডে 20 ms^{-1} বেগ অর্জন করা সম্ভব।

৮। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা 20 m ও ব্যাস 2 m। কুয়াটিকে পানিশূন্য করার জন্য 5 HP-এর একটি পাম্প লাগানো হলো। অর্ধেক পানি তোলার পর পাম্পটি নষ্ট হয়ে গেল। বাকি পানি তোলার জন্য একই ক্ষমতাসম্পন্ন আর একটি পাম্প লাগানো হলো।

(ক) প্রথম পাম্প দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রথম ও দ্বিতীয় পাম্প দ্বারা পানি তুলতে একই সময় লাগবে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও।

[ঢা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০২২ (মান ভিন্ন), ২০১৭; কু. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ২০২১ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); সি. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০১৭]

(ক) ১ম পাম্পের ক্ষেত্রে উত্তোলিত পানির আয়তন,

$$V = \frac{\pi r^2 l}{2} = \frac{3.14 \times (1)^2 \times 20}{2}$$
$$= 31.4 \text{ m}^3$$

এখানে,
কুয়ার গভীরতা, $l = 20\text{ m}$
কুয়ার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{2}{2}\text{ m} = 1\text{ m}; \rho = 1000\text{ kgm}^{-3}$
$P = 5\text{ HP} = 5 \times 746\text{ watt}$

উত্তোলিত পানির ভর, $m = V\rho = 31.41 \times 1000 = 31.4 \times 10^3\text{ kg}$

পানির গড় সরণ, $h_1 = \frac{l}{4} = \frac{20}{4} = 5\text{m}$

১ম পাম্প দ্বারা সম্পাদিত কাজ,

$$W = mgh = 31.4 \times 10^3 \times 9.8 \times 5 = 1.54 \times 10^6 \text{ J}$$

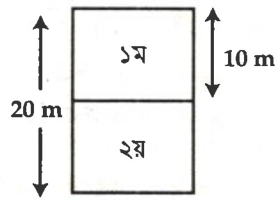
(খ) উভয় পাম্পের ক্ষমতা, $P = 5\text{ HP} = 5 \times 746 = 3730\text{ watt}$

উভয় ক্ষেত্রে পানির ভর, $m = 31.4 \times 10^3\text{ kg}$

$\therefore$ ভরকেন্দ্র থেকে উচ্চতা, $h_1 = \frac{0+10}{2} = 5\text{m}$

১ম ক্ষেত্রে গড় সরণ, $h_1 = 0 + \frac{l}{2} = \frac{0 + 20/2}{2} = 5\text{m}$

$\therefore$ ভরকেন্দ্র থেকে উচ্চতা, $h_2 = 10 + \frac{10}{2} = 15\text{m}$



২য় ক্ষেত্রে গড় সরণ, $h_2 = \frac{l + l/2}{2} = \frac{20+10}{2} = 15\text{m}$

১ম ও ২য় পাম্প দ্বারা পানি তুলতে যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময় লাগলে

১ম ক্ষেত্রে, $P = \frac{W_1}{t_1} \quad \therefore t_1 = \frac{mgh_1}{P} = \frac{31.4 \times 10^3 \times 9.8 \times 5}{3730} = 412.70\text{ sec}$

২য় ক্ষেত্রে, $P = \frac{W_2}{t_2} \quad \therefore t_2 = \frac{mgh_2}{P} = \frac{31.4 \times 10^3 \times 9.8 \times 15}{3730} = 1237.47\text{ sec}$

গাণিতিকভাবে দেখা যায়, $t_1 < t_2$। অতএব ১ম ও ২য় পাম্প দ্বারা পানি তুলতে একই সময় লাগবে না, ২য় পাম্প দ্বারা পানি তুলতে সময় বেশি লাগবে।

Note : পুরো কুয়ার পানি শূন্য করার জন্য, $h = \frac{0 + \text{কুয়ার গভীরতা}}{2}$

৯। জামান রিজার্ভ ট্যাংক থেকে 25m উচ্চতার ছাদে পানি তোলার জন্য 10 kW ক্ষমতা ও 60% দক্ষতার পাম্প ব্যবহার করছে। ট্যাংকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও গভীরতা যথাক্রমে 4m, 3m ও 2m এবং ট্যাংকটি অর্ধেক পানিপূর্ণ ছিল। [$g = 9.8\text{ ms}^{-2}$ এবং পানির ঘনত্ব 1000 kgm^{-3}]

(ক) রিজার্ভ ট্যাংক থেকে 10 kg পানি ছাদে তোলার জন্য কত শক্তি খরচ হবে?

(খ) পাম্পটি 1 ঘণ্টায় ট্যাংকটিকে খালি করতে পারবে কী? গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে তোমার মতামত দাও। [দি. বো. ২০২১]

(ক) পাম্পটির কার্যকর ক্ষমতা, $P' = P \times 60\% = 0.6 \times 10\text{ kW} = 6\text{ kW}$

ট্যাংকটির আয়তন, $V = 4 \times 3 \times 2\text{ m}^3 = 24\text{ m}^3$

ট্যাংকটি অর্ধেক খালি থাকায় পানির ভর,

$$m = \frac{V}{2} \times \rho = \frac{24}{2} \times 10^3 = 12 \times 10^3\text{ kg}$$

$\therefore$ 10 kg পানি তুলতে শক্তি ব্যয়, $W = mgh = 10 \times 9.8 \times 25 = 2450\text{ J}$

এখানে,
$P = 10\text{ kW}$
$l = 4\text{ m}$
$b = 3\text{ m}$
$h = 2\text{ m}$
$g = 9.8\text{ ms}^{-2}$
$\rho = 1000\text{ kgm}^{-3}$

(খ) এখানে, $P' = 6\ kW = 6 \times 10^3$ watt

পানির গড় সরণ $= \dfrac{2}{2 \times 2} = 0{\cdot}5$ m; সুতরাং $h = 25 + 0{\cdot}5 = 25{\cdot}5$

$$W = mgh = 12 \times 10^3 \times 9{\cdot}8 \times 25{\cdot}5$$

আমরা জানি, $W = P' \times t$

$$\therefore \quad t = \frac{W}{P'} = \frac{12 \times 10^3 \times 9{\cdot}8 \times 25{\cdot}5}{6 \times 10^3} = 500\ s = 8{\cdot}33\ min$$

সুতরাং, 1 ঘণ্টার কম সময়ে ট্যাংকটি খালি হবে।

১০। একটি ইঞ্জিন 200 kg ভরের একটি বস্তুকে এক মিনিটে 30 m উঁচু দালানের ছাদে তুলতে পারে। ইঞ্জিনটি ক্রয়ের এক বছর পর এর ক্ষমতার 40% নষ্ট হয়ে যায়। [$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$]

(ক) দালানের ছাদে বস্তুটির বিভবশক্তি নির্ণয় কর।

(খ) এক বছর পরে একই ছাদে বস্তুটিকে তুলতে সময়ের পরিবর্তন কেমন হবে—গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [ম. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি, বিভব শক্তি

$$E_P = mgh$$

$$\therefore \quad E_P = 200 \times 9{\cdot}8 \times 30 = 58800\ J$$

এখানে,
$m = 200$ kg
$h = 30$ m
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

(খ) ক্ষমতা, $P = \dfrac{mgh}{t}$

ইঞ্জিনটির ক্ষমতা,

$$P = \frac{mgh}{t} = \frac{58800}{60} = 980\ \text{watt} = \frac{980}{746}\ HP = 1{\cdot}31\ HP$$

ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 40% নষ্ট হলে কার্যকর ক্ষমতা,

$$P' = P \times \frac{60}{100} = \frac{980 \times 60}{100} = 588\ \text{watt}$$

সুতরাং 200 kg পানি 30 m উঁচু ছাদে তুলতে সময় লাগবে,

$$P' = \frac{mgh}{t}$$

$$\text{বা,} \quad t = \frac{mgh}{P'} = \frac{58800}{588} = 100s$$

অতিরিক্ত সময় = (100 — 60)s = 40s

অর্থাৎ পূর্বের চেয়ে 40s সময় বেশি লাগবে।

১১। খালিদের বাড়িতে 12 m গভীর ও 1·8 m ব্যাসবিশিষ্ট একটি পানিপূর্ণ কুয়া খালি করার জন্য একটি পাম্প চালু করা হলো। কিন্তু দেখা গেল, পানি শূন্য করতে পাম্পটির 21 মিনিট সময় লাগে। খালিদ হিসাব করে দেখল যথাসময়ে কুয়াটিকে পানি শূন্য করতে 2 HP ক্ষমতার পাম্প দরকার।

(ক) 2 kg ভরের বস্তুকে ছেড়ে দিলে পানিশূন্য কুয়ার শীর্ষ হতে তলায় পৌঁছাতে কত সময় লাগবে ?

(খ) গাণিতিক বিশ্লেষণসহ খালিদের হিসাবের যথার্থতা যাচাই কর। [দি. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি,

$$s = h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore \quad 12 = 0 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times t^2$$

$$\text{বা,} \quad t^2 = \frac{2 \times 12}{9{\cdot}8}$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2 \times 12}{9{\cdot}8}} = 1{\cdot}56\ s$$

এখানে,
বস্তুর আদিবেগ, $v_0 = 0$
কুয়ার গভীরতা বা দূরত্ব, $h = 12$ m
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
সময়, $t = ?$

(খ) আমরা জানি ক্ষমতা,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = \frac{Fh}{t}$$

এখানে, F = পানির ওজন $= mg$

এখন পানির ভর, $m = V\rho = \pi r^2 l\rho$ $[\because V = \pi r^2 l]$

অতএব, $P = \frac{Fh}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{\pi r^2 l\rho gh}{t}$

$$\therefore \quad P = \frac{3.14 \times (0.9)^2 \times 12 \times 1000 \times 9.8 \times 6}{1260}$$

$$= 1424.3\ W = \frac{1424.3}{746}\ HP$$

$$= 1.91\ HP$$

এখানে,

কুয়ার ব্যাস, $d = 1.8$ m

কুয়ার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2} = \frac{1.8}{2}$ m $= 0.9$ m

কুয়ার গভীরতা, $l = 12$ m

সময়, $t = 21$ min $= 21 \times 60$ s
$= 1260$ s

পানি তোলার গড় উচ্চতা,

$$h = \frac{0 + 12\ m}{2} = 6\ m$$

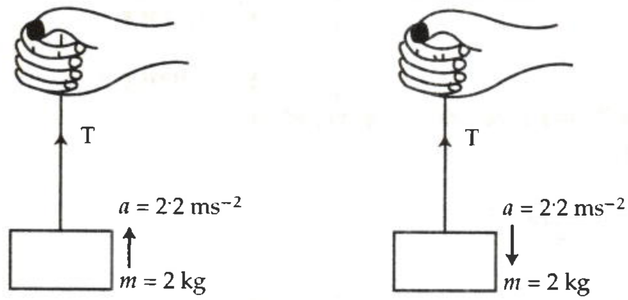
ক্ষমতা, P = ?

পানির ঘনত্ব, $\rho = 1000\ kgm^{-3}$

এখন পানি তোলার জন্য খালিদের হিসাবকৃত পাম্পের ক্ষমতা = 2 HP যথার্থ।

উত্তর : (ক) 1.56 s (খ) খালিদের হিসাব যথার্থ।

১২। একটি সুতার সাহায্যে 2 kg ভরের একটি বস্তুকে ঝুলিয়ে বস্তুটিকে $2.2\ ms^{-2}$ সমত্বরণে 5 m ওপরে ওঠানো হলো এবং পরবর্তীতে নিচে নামানো হলো।



(ক) ওপরে উঠানোর সময় সুতার টান কত ?

(খ) বস্তুটিকে উঠাতে বা নামাতে সুতার টান কর্তৃক বস্তুটির ওপর কৃত কাজ কোন ক্ষেত্রে বেশি হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও। [অভিন্ন সেট 'খ' ২০১৮]

(ক) ধরি সুতার টান = T

বস্তুটি ওপরে ওঠানোর সময় লব্ধি বল,

$T - mg = ma$ $[\because a$ ও g বিপরীতমুখী$]$

বা, $T = ma + mg = m(a + g)$
$= 2(9.8 + 2.2)$

$\therefore \quad T = 24$ N

এখানে,
$m = 2$ kg
$a = 2.2\ ms^{-2}$
$g = 9.8\ ms^{-2}$
$h = 5$ m

(খ) উঠানোর সময় কৃত কাজ, $W_1 = T \times h = 24 \times 5 = 120$ J

নিচে নামানোর সময় টান,

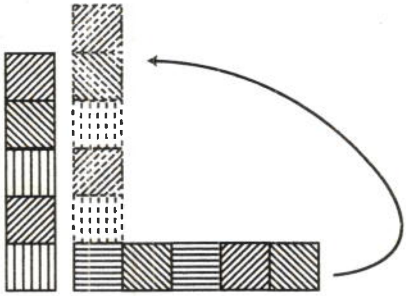
$T = m(g - a) = 2(9.8 - 2.2)$
$= 15.2$ N

কৃত কাজ, $W_2 = T \times h = 15.2 \times 5$
$= 76$ N

$W_1 > W_2$

ওপরে উঠানোর ক্ষেত্রে কাজ বেশি করতে হয়েছে।

১৩। 50 cm বাহুবিশিষ্ট কোনো ঘনকের ভর 25 kg। এরূপ পাঁচটি ঘনককে একটির ওপর আরেকটি রেখে একটি স্তম্ভতৈরি করা হলো। অন্যদিকে অনুরূপ আরও পাঁচটি ব্লককে ভূমিতে পাশাপাশি সংযুক্ত করে স্তম্ভটিকে খাড়া করা হলো।



(ক) স্তম্ভের চূড়া হতে একটি পাথর টুকরা পড়ে গেলে কত বেগে ভূমিতে আঘাত করবে?

(খ) স্তম্ভ তৈরির কোন উপায়টি অধিক গ্রহণযোগ্য—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর।

[দি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$v^2 = u^2 + 2gh'$

বা, $v^2 = 2gh'$

বা, $v = \sqrt{2gh'}$

$= \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.5}$

$= 7\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

ঘনকের ভর, $m = 2.5\ g$

আদি বেগ, $u = 0$

ঘনকের উচ্চতা, $h = 50\ \text{cm} = 0.5\ \text{m}$

স্তম্ভের উচ্চতা, $h' = 5 \times 0.5 = 2.5\ \text{m}$

$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

ভূমিতে পতন বেগ, $v = ?$

(খ) একটির ওপর একটি ঘনক রেখে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ,

$W_1 = mg\dfrac{n(n-1)}{2}h$

$= 25 \times 9.8 \times \dfrac{5(5-1) \times 0.5}{2}$

$= 1225\ \text{J}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কৃত কাজ,

$W_2 = mgh''$

$= mg\left(\dfrac{h}{2} - \dfrac{0.5}{2}\right)$

$= 25 \times 9.8 \times 1 = 245\ \text{J}$

$\therefore\ W_1 > W_2$

এখানে,

ভরকেন্দ্রের সরণ,

$h'' = \dfrac{h}{2} - \dfrac{0.5}{2}$

এখন,

$h = 5 \times 0.5$

$= 2.5\ \text{m}$

স্তম্ভ তৈরির ২য় উপায়টি অধিক গ্রহণযোগ্য।

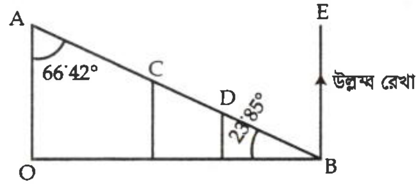
১৪। 250 kg ভরের একটি গাড়ি উল্লম্বের সাথে 66.42° কোণে আনত একটি রাস্তা ধরে 12.393 ms^{-1} বেগে নিচে নামার সময় গাড়ির চালক ব্রেক করায় 30 m দূরত্ব অতিক্রম করার পর থেমে গেল।

(ক) গাড়িটি থামাতে বাধাদানকারী বলের মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে সংরক্ষণশীলতার নীতি রক্ষিত হবে কী? গাণিতিক যুক্তিসহ বিশ্লেষণ কর।

[ব. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১৬]

(ক) উদ্দীপক অনুযায়ী চিত্র—



ধরি, গাড়িটি C বিন্দুতে ব্রেক করেছে এবং B বিন্দুতে থেমেছে।

ধরি, বাঁধাদানকারী বলের মান F। তা হলে,

$F = ma'$

আমরা জানি,

$v^2 = u^2 - 2as$

বা, $0^2 = u^2 - 2as$

বা, $u^2 = 2as$

বা, $a = \frac{u^2}{2s} = \frac{(12.393)^2}{2 \times 30}$

$= 2.56 \text{ ms}^{-2}$

এখানে,
$v = 0$
$u = 12.393 \text{ ms}^{-1}$
$s = 30 \text{ m}$

তা হলে,

$a' = a + g \cos 66.42°$

$= 2.56 + 9.8 \times \cos 66.42°$

$= 6.48 \text{ ms}^{-2}$

অতএব বাধাদানকারী বল,

$F = ma' = 250 \times 6.48$

$= 1620 \text{ N}$

(খ) C বিন্দুতে গতিশক্তি,

$(KE)_C = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times m \times 2a's$

$= ma's = 250 \times 6.48 \times 30$

$= 4.86 \times 10^4 \text{ J}$

এখানে, সরণ শূন্য ফলে স্থিতিশক্তি শূন্য। ফলে, মোট শক্তি = গতিশক্তি $= 4.86 \times 10^4$ J

আবার, তলের নিম্ন বিন্দু O-তে বেগ শূন্য ফলে সেখানে গতিশক্তি শূন্য।

সরণ $s = 30$ m

$\therefore$ স্থিতি শক্তি $= ma's = 250 \times 6.48 \times 30 = 4.86 \times 10^4$ J

অর্থাৎ শক্তির সংরক্ষণশীলতা নীতি রক্ষিত হবে।

১৫। সীমা 18 kg ভরের একটি ব্যাগ নিয়ে 50 m উঁচু বিল্ডিং-এ ওঠার পর ছাদ থেকে ব্যাগটি পড়ে গেলে সেটি 'h' উচ্চতার পাশের বিল্ডিং-এর ছাদে 24.25 ms^{-1} বেগে পড়ল।

(ক) উদ্দীপকের h-এর মান কত?

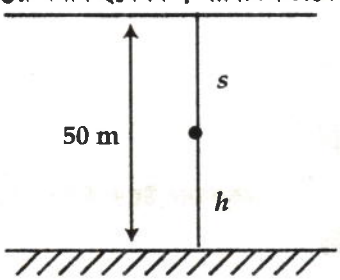
(খ) h উচ্চতায় বিভবশক্তি গতিশক্তির সমান হবে কি ? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি,

$v^2 = u^2 + 2gs$

বা, $s = \frac{v^2}{2g}$ ($\because u = 0$)

$\therefore s = \frac{(24.25)^2}{2 \times 9.8} = 30 \text{ m}$



এখানে,
$m = 18 \text{ kg}$
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$
$v = 24.25 \text{ ms}^{-1}$
$H = 50 \text{ m}$
$h = ?$

অতএব, $h = 50 - 30 = 20$ m

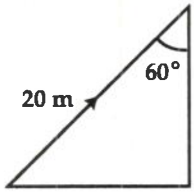
(খ) আমরা জানি h উচ্চতায় বিভবশক্তি,

$E_p = mgh = 18 \times 9.8 \times 20 = 3528 \text{ J}$

এবং গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 18 \times (24.25)^2 = 5292.6 \text{ J}$

সুতরাং h উচ্চতায় বিভবশক্তি ও গতিশক্তি সমান হবে না।

১৬।



উদ্দীপকে 25 kg ভরের একজন বালক 3 kg ভরের একটি গোলক হাতে নিয়ে সিঁড়ি বেয়ে ছাদে উঠতে 2 min সময় নিল। ছাদ হতে গোলকটি ছেড়ে দেয়ায় তা সিঁড়ি বেয়ে গড়িয়ে মাটিতে পড়ল।

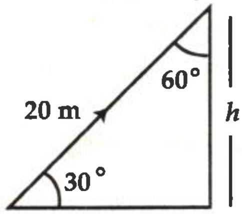
(ক) বালকটি ছাদে উঠতে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কত কাজ করেছে ?

(খ) গোলকটি ছেড়ে দেওয়ার 1 s পর যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্রটি প্রযোজ্য হয় কি না — উদ্দীপকের আলোকে গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [ঢা. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি,

$$\sin\theta = \frac{h}{20}$$

$$\therefore \quad h = \sin\theta \times 20 = \sin 30° \times 20 = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \text{ m}$$



অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কাজ $W = mgh = 28 \times 9.8 \times 10 = 2744$ J [এখানে মোট ভর = 25 kg + 3 kg = 28 kg]

(খ) সিঁড়ির সর্বোচ্চ প্রান্তে গোলকটির বিভব শক্তি,

$$E_P = mgh = 3 \times 9.8 \times 10 = 294 \text{ J}$$

এখানে,
$h = 10$ m
$m = 3$ kg

ওই অবস্থানে গোলকটি মুহূর্তের জন্য স্থির থাকে বলে এর গতিশক্তি $= 0$

$\therefore$ শীর্ষ অবস্থানে মোট শক্তি, $E = E_P + E_K = 294 + 0 = 294$ J

সিঁড়ির তল বরাবর নিচের দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণের উপাংশ,

$$g' = g\cos 60° = 9.8 \times \frac{1}{2} = 4.9 \text{ ms}^{-2}$$

সুতরাং গোলকটি গড়িয়ে পড়ায়, $t = 1$ s পর এর গতিবেগ,

$$v = u + g't = 0 + 4.9 \times 1 = 4.9 \text{ ms}^{-1}$$

এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s' = ut + \frac{1}{2}g't^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 4.9 \times (1) = 2.45 \text{ m}$$

সিঁড়ির নিম্ন প্রান্ত হতে ওই মুহূর্তের $t = 1$ s অবস্থানের উল্লম্ব উচ্চতা, $h = 10 - 2.45 \cos 60° = 8.775$ m

$\therefore$ $t = 1$ s পর গোলকটির গতিশক্তি,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times (4.9)^2 = 36.02 \text{ J}$$

এবং স্থিতিশক্তি, $E_P = mgh = 3 \times 9.8 \times 8.775 = 257.98$ J

$\therefore$ মোট শক্তি, $E = E_K + E_P = 36.02 + 257.98 = 294$ J

যেহেতু সিঁড়ির শীর্ষ বিন্দুতে যান্ত্রিক শক্তি এবং 1 সে. পরের মুহূর্তের যান্ত্রিক শক্তির পরিমাণ সমান কাজেই গোলকটি ছেড়ে দেয়ার 1 s পর শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রযোজ্য হবে।

১৭। পানি পূর্ণ একটি সাঁতার পুকুরের (swimming pool) মাত্রা 25 m × 10 m × 3 m। 10 hp অশ্ব ক্ষমতা-সম্পন্ন একটি পানির পাম্প পুকুরটিকে 30 মিনিটে খালি করতে পারে। অপর একটি পানির পাম্প, 25 hp ক্ষমতাসম্পন্ন একই কাজ 15 মিনিটে করতে সক্ষম।

(ক) দুটি পাম্প একত্রে ব্যবহৃত হলে পুকুরটি খালি করতে কত সময় লাগবে নির্ণয় কর।

(খ) কোন পাম্পটির ব্যবহার অধিক সাশ্রয়ী হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০১৯]

(ক) ১ম পাম্প 30 মিনিটে খালি করে পুকুরে সম্পূর্ণ অংশ (বা 1 অংশ)

১ম পাম্প 1 মিনিটে খালি করে পুকুরের $\frac{1}{30}$ অংশ

আবার, ২য় পাম্প 15 মিনিটে খালি করে 1 অংশ

২য় পাম্প 1 মিনিটে খালি করে $\frac{1}{15}$ অংশ

∴ পাম্প দুটি একত্রে $\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{15}\right)=\frac{1+2}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ অংশ খালি করে 1 মিনিটে

∴ সম্পূর্ণ অংশ বা 1 অংশ খালি করে = 10 মিনিটে।

(খ) ১ম পাম্পের ক্ষেত্রে ক্ষমতা,

$$P_1 = \frac{mgh}{t_1} = \frac{7{\cdot}5\times10^5\times9{\cdot}8\times1{\cdot}5}{30\times60} = 6125\text{ W}$$

$$= \frac{6125}{746}\text{ hp} = 8{\cdot}21\text{ hp}$$

এখানে,

$m = V\rho = 25\times10\times3\times1000$

$= 7{\cdot}5\times10^5$ kg

$t_1 = 30\times60$ s

$h = \frac{3}{2}$ m $= 1{\cdot}5$ m

$P = 10$ hp

আবার ১ম পাম্পের কর্মদক্ষতা, $\eta_1 = \frac{\text{কার্যকর ক্ষমতা}}{\text{প্রদত্ত ক্ষমতা}}\times100\%$

$$= \frac{8{\cdot}21}{10}\times100\% = 82{\cdot}1\%$$

২য় পাম্পের ক্ষেত্রে,

ক্ষমতা, $P_2 = \frac{mgh}{t_2} = \frac{7{\cdot}5\times10^5\times9{\cdot}8\times1{\cdot}5}{15\times60}$

$$= 12250\text{ W} = \frac{12250}{746}\text{ hp} = 16{\cdot}42\text{ hp}$$

এখানে,

$t_2 = 15\times60$ s

$P = 25$ hp

আবার কর্মদক্ষতা, $\eta_2 = \frac{\text{কার্যকর ক্ষমতা}}{\text{প্রদত্ত ক্ষমতা}}\times100\%$

$$= \frac{16{\cdot}42}{25}\times100\% = 65{\cdot}68\%$$

যেহেতু $\eta_1 > \eta_2$, তাই প্রথম পাম্পটি ব্যবহার করা বেশি সাশ্রয়ী হবে।

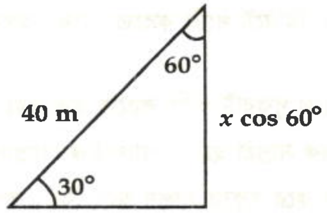
১৮। নতুন ভবন নির্মাণের সময় 60 kg ভরের একজন শ্রমিক 40 kg ভরের সিমেন্টের বস্তা মাথায় নিয়ে 2 min. সময়ে মই বেয়ে ভবনের ছাদে উঠল। মইটির দৈর্ঘ্য 40 m। এর পর সে আনত মসৃণ তল বেয়ে পিছলিয়ে নিচে নামল। মই ও মসৃণ তল উভয়ই ভূমির সাথে 30° কোণে আনত।

(ক) ছাদে উঠতে শ্রমিক কত ক্ষমতা প্রয়োগ করেছিল?

(খ) পিছলিয়ে পড়ার মুহূর্তে শ্রমিকের হাতের হাতুড়িটি পড়ে গেল। শ্রমিক না হাতুড়ি কে আগে ভূমিতে পৌঁছাবে? গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। [সি. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fx\cos 60°}{120}$$
$$= \frac{mgx\cos 60°}{120}$$
$$= \frac{100 \times 9·8 \times 40 \times 0·5}{120}$$
$$= 163·33\ W = \frac{163·33}{746}$$
$$= 0·29\ HP$$



এখানে,
$x = 40m$
$\theta = 90° — 30° = 60°$
$m = 60 + 40 = 100\ kg$
$t = 2\ min = 2 \times 60 = 120\ s$
$P = ?$

(খ) আবার, $x = ut + \frac{1}{2}gt^2 = 0 + \frac{1}{2}g\cos\theta \times t^2$

$$= \frac{1}{2} \times 9·8 \times \cos 60° \times t^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 9·8 \times 0·5 \times t^2$$
$$40 \times 2 = 9·8 \times 0·5 \times t^2$$
$$\therefore\ t^2 = \frac{80}{9·8 \times 0·5} = 16·3 = \sqrt{16·3} = 4\ s$$

অর্থাৎ, মই বেয়ে শ্রমিকের মাটিতে নামতে 4s সময় লাগে।
এখন হাতুড়িটি খাড়াভাবে মাটিতে পড়ে,

সুতরাং, $s = ut' + \frac{1}{2}gt'^2$

বা, $x\cos 60° = 0 + \frac{1}{2} \times 9·8 \times t'^2$

বা, $40 \times 0·5 = \frac{1}{2} \times 9·8 \times t'^2$

বা, $t'^2 = \frac{40}{9·8}$

$\therefore\ t' = \sqrt{\frac{40}{9·8}} = 2\ s$

এখানে, $t' < t$; অর্থাৎ শ্রমিকের আগেই হাতুড়িটা মাটিতে পড়বে।

১১। একটি দালানের ছাদের সাথে দুটি মই লাগানো আছে। একটি মই-এর দৈর্ঘ্য 5 m এবং এটি অনুভূমিকের সাথে 60° কোণ করে রয়েছে। দ্বিতীয় মইটির দৈর্ঘ্য 6 m এবং এটি অনুভূমিকের সাথে 46·2° কোণ করে রয়েছে। দুইজন নির্মাণ শ্রমিক উভয়ে 20 kg বোঝা নিয়ে 1 মিনিটে ভিন্ন ভিন্ন মই ব্যবহার করে ছাদে উঠতে পারেন। প্রথম মই বেয়ে যিনি উঠেন তার ভর 60 kg এবং দ্বিতীয় মই বেয়ে যিনি উঠেন তার ভর 70 kg।

(ক) প্রথম শ্রমিকের ক্ষেত্রে ছাদে উঠার জন্য সম্পাদিত কাজ নির্ণয় কর।

(খ) উভয় শ্রমিকের ক্ষমতা অভিন্ন হবে কী ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি কাজ,

$W = F.s = Fs\cos\theta = mgs\cos\theta$

প্রথম শ্রমিকের সম্পাদিত কাজ,

$W_1 = 80 \times 9·8 \times 5 \times \cos 60°$
$= 80 \times 9·8 \times 5 \times 0·5 = 1960\ J$

এখানে প্রথম শ্রমিকের মোট ভর,
$m_1 = 60\ kg + 20\ kg = 80\ kg$
$s = 5m$
$\theta = 60°$

(খ) আবার ক্ষমতা,

$P = \frac{W}{t}$

প্রথম শ্রমিকের ক্ষমতা,

$P_1 = \frac{W_1}{t}$

$W_1 = 1960\ J$

$\therefore\ P_1 = \frac{W_1}{t} = \frac{1960}{60} = 32·67\ watt$

এখানে,
$t = 1\ min = 60\ s$
$m_2 = 70\ kg + 20\ kg = 90\ kg$
$s_2 = 6m$
$\theta_2 = 46·2°$

এবং দ্বিতীয় শ্রমিকের ক্ষমতা, $W_2 = m_2 g s_2 \cos\theta_2 = 90 \times 9{\cdot}8 \times 6 \times \cos 46{\cdot}2°$

$= 90 \times 9{\cdot}8 \times 6 \times 0{\cdot}692$

$= 3663\ \text{J}$

$\therefore \quad P_2 = \frac{W_2}{t} = \frac{3663}{60} = 61$ watt

উভয় শ্রমিকের ক্ষমতা এক নয়। দ্বিতীয় শ্রমিকের ক্ষমতা বেশি।

২০। 16m গভীর ও 6m ব্যাসের একটি কুয়ার অর্ধেক পানিপূর্ণ ছিল। কুয়াটিকে পানিশূন্য করার জন্য 2 kW ক্ষমতা ও 80% দক্ষতাসম্পন্ন একটি পাম্প চালু করা হলো। কিন্তু অর্ধেক পানি উত্তোলনের পর পাম্পটি বিকল হয়ে যায়। 3 HP ক্ষমতার অপর একটি পাম্প 2 ঘণ্টায় কুয়াটিকে পানিশূন্য করতে সক্ষম হয়।

(ক) চালু করার কত সময় পর প্রথম পাম্প বিকল হয়ে যায়? নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের দ্বিতীয় পাম্পটির দক্ষতা কম ছিল কি না? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ ব্যাখ্যা কর।

[ব. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); দি. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০২১]

(ক) এখানে কার্যকর ক্ষমতা,

$P' = P \times \eta = 2 \times 10^3 \times \frac{80}{100}$

$= 1{\cdot}6 \times 10^3\ \text{W}$

এখানে,

$l = 16\,\text{m}$

$d = 6\,\text{m}$

$\therefore\ r = \frac{d}{2} = 3\,\text{m}$

$P = 2\,\text{kW} = 2 \times 10^3\ \text{W}$

$\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$

উত্তোলিত পানির আয়তন,

$V = \frac{\pi r^2 l}{2 \times 2} = \frac{3{\cdot}14 \times (3)^2 \times 16}{4} = 113\ \text{m}^3$

$\therefore$ উত্তোলিত পানির ভর $m = \rho V = 10^3 \times 113 = 1{\cdot}13 \times 10^5\ \text{kg}$

পানির গড় সরণ,

$h = \frac{l}{4 \times 2} = \frac{16}{8} = 2\,\text{m}$

আমরা জানি,

$P' = \frac{mgh}{t}$

বা, $t = \frac{mgh}{P'} = \frac{\rho V \times gh}{1{\cdot}6 \times 10^3}$

$\therefore\ t = \frac{1{\cdot}13 \times 10^5 \times 9{\cdot}8 \times 2}{1{\cdot}6 \times 10^3}$

$= \frac{1{\cdot}13 \times 2 \times 9{\cdot}8 \times 10^2}{1{\cdot}6}$

$= 1384\ \text{s} = 23\ \text{min}\ 4\ \text{s}$

(খ) $P'' = 3\ \text{HP} = 3 \times 746 = 2238\ \text{W}$

$t = 2\ \text{hr} = 2 \times 60 \times 60 = 7200\ \text{s}$

পানির গড় সরণ, $h_2 = \frac{3l}{4 \times 2} = \frac{3 \times 16}{8} = \frac{48}{8} = 6\,\text{m}$

২য় ক্ষেত্রে,

$P'' = \frac{W_2}{t_2} = \frac{mgh_2}{t_2}$

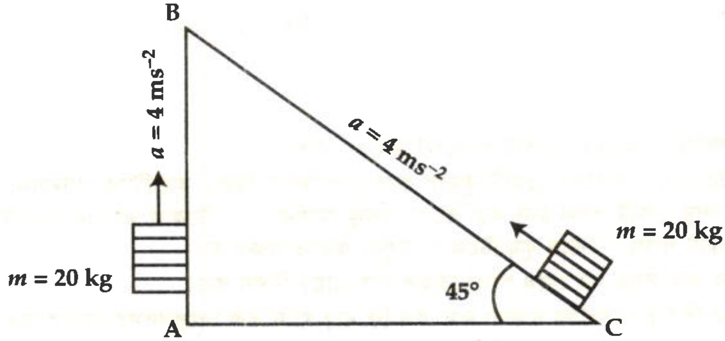
$= \frac{1{\cdot}13 \times 10^5 \times 9{\cdot}8 \times 6}{7200} = 922{\cdot}8\text{watt}$

$= \frac{922{\cdot}8}{746} = 1{\cdot}237\ \text{HP}$

$\therefore\ \eta = \frac{1{\cdot}237}{3} \times 100\% = 41{\cdot}23\%$

সুতরাং, দ্বিতীয় পাম্পটির দক্ষতা কম ছিল।

২১।



20 kg ভরের একটি বস্তুকে চিত্রানুযায়ী A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে উঠানো হলো। একই ভরের অপর একটি বস্তুকে C থেকে B বিন্দুতে নেওয়া হলো।

(ক) প্রথম ক্ষেত্রে কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রথম ও দ্বিতীয় কোন ক্ষেত্রে বস্তুটিকে নিয়ে যাওয়া সহজ হয়েছে? গাণিতিকভাবে দেখাও।

[রা. বো. ২০২৩]

(ক) **১ম ক্ষেত্রে :** A থেকে B-তে উঠানোর ক্ষেত্রে উচ্চতা = AB = h

প্রযুক্ত বল F হলে,

$\Sigma F = ma$

$F - mg = ma$

$\therefore\ F = mg + ma = m(g + a)$

$= 20(9.8 + 4)$

$\therefore\ F = 216$ N

এখানে,
ভর, $m = 20$ kg
ত্বরণ, $a = 4\ ms^{-2}$

AB পথে উঠাতে কৃত কাজ,

$W_{AB} = Fh\cos\theta$

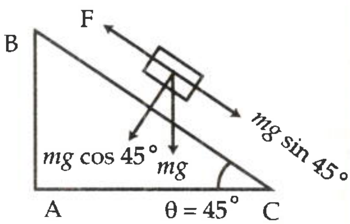
$= 276 \times h \times \cos 0°$

$= 276$ h Jule

এখানে,
$\theta = 0°$
$AB = h$

(খ) **২য় ক্ষেত্রে :**

বস্তুটি C থেকে B-তে উঠাতে F-এর বিভাজিত অংশগুলো নিচের চিত্রে দেখানো হলো :



এখানে,
উচ্চতা, $h = AB$
সরণ, $s = CB$
ত্বরণ, $a = 4\ ms^{-2}$
উল্লম্বের সাথে আনত কোণ,
$\theta = (90° - 45°) = 45°$

চিত্রানুযায়ী, $\sin 45° = \frac{AB}{BC}$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{s}$

$\therefore\ s = h\sqrt{2}$

C থেকে B-তে উঠাতে প্রযুক্ত বল F হলে,

$\Sigma F = ma$ বা, $F - mg \sin 45° = ma$

$\therefore\ F = m(a + 9 \sin 45°)$

$\therefore\ F = 20\left(4 + 9.8 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 218.6$N

CB পথে F দ্বারা কৃত কাজ,

$W_{CB} = F\ s \cos 45° = 218.6 \times h\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 218.6$ h Jule

দেখা যাচ্ছে, $W_{AB} > W_{CB}$, কাজেই ২য় ক্ষেত্রে কাজের পরিমাণ কম হওয়ায় কম শক্তি ব্যয় হবে। তাই CB পথে অর্থাৎ ১ম ক্ষেত্রে বস্তুটিকে নিয়ে যাওয়া সহজ হবে।

২২। একটি স্প্রিংয়ের উপর 10 N বল প্রয়োগ করায় এটি 4 cm প্রসারিত হলো। স্প্রিংটিকে প্রথমে 6 cm এবং পরবর্তীতে আরও 6 cm প্রসারিত করা হলো।

(ক) স্প্রিংটির স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় কর।

(খ) প্রথম ও দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সমান প্রসারণের জন্য কাজের পরিমাণ সমান হবে কি? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

[ম. বো. ২০২৩; দি. বো. ২০২৩]

(ক) আমরা জানি,

$$F = kx$$
$$\therefore K = \frac{F}{x} = \frac{10}{0.04} = 250\ Nm^{-1}$$

এখানে,
$F = 10\ N$
$x = 4\ cm = 0.04\ m$
$K = ?$

(খ) 'ক' থেকে প্রাপ্ত স্প্রিং ধ্রুবক $K = 250\ Nm^{-1}$

এখানে আদি সরণ $x = 0\ m$

$\therefore$ ১ম ক্ষেত্রে সরণ $x_1 = 6\ cm = 0.06\ m$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে আরো 6 cm প্রসারিত করা হলো। সুতরাং মোট সরণ $x_2 = 6 + 6 = 12\ cm = 0.12\ m$

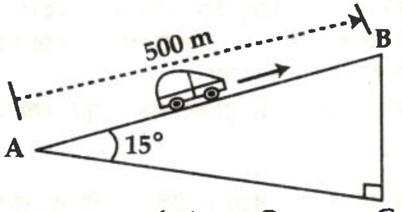
১ম ক্ষেত্রে কাজ, $W_1 = \frac{1}{2} K (x_1^2 - x_0^2) = \frac{250}{2} [(0.06)^2 - 0] = 0.45\ J$

আবার ২য় ক্ষেত্রে কৃত কাজ, W_2 হলে,

$$W_2 = \frac{1}{2} K(x_2^2 - x_0^2) = \frac{250}{2} [(0.12)^2 - 0] = 1.35\ J$$

দেখা যায় যে, $W_1 \neq W_2$ কাজেই ১ম ও ২য় ক্ষেত্রে সমান প্রসারণের জন্য কাজের পরিমাণ সমান হবে না।

২৩। নিচের গাড়িটির ভর 3900 kg এবং ক্ষমতা 152.18 W। [$g = 9.8\ ms^{-2}$]



(ঘর্ষণ উপেক্ষণীয়)

(ক) গাড়িটি A হতে B-তে যেতে কৃত কাজের পরমাণ নির্ণয় কর।

(খ) "AB রাস্তা বরাবর গাড়িটির বেগ 72 kmh⁻¹ সীমা অতিক্রম করা সম্ভব নয়"— গাণিতিকভাবে উক্তিটির সত্যতা যাচাই কর।

[য. বো. ২০২৪]

(ক) AB সরণে কৃত কাজ,

$$W = FS\cos(90° - 15°)$$
$$= Fs\cos 75°$$
$$= mg\, s\cos 75°$$
$$= 3900 \times 9.8 \times 500 \times 0.258$$
$$= 4930380 = 4.95 \times 10^6\ J$$

এখানে,
গাড়ির ভর,
$m = 3900\ kg$
$g = 9.8\ ms^{-2}$
সরণ, $s = 500\ m$
কাজ, $W = ?$

(গ) আমরা জানি, গতিশক্তির পরিবর্তন কৃত কাজের সমান

$$\therefore \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = W$$
$$\therefore \frac{1}{2} mv^2 = W$$
$$\therefore v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 4.95 \times 10^6}{3910}}$$
$$= 50.39\ ms^{-1} = 183.211\ kmh^{-1}$$

$v_0 = 0$

গাড়ির বেগ $183.211\ kmh^{-1}$ যা $72\ kmh^{-1}$ এর তুলনায় বেশি। ফলে প্রাপ্ত কাজ গাড়ির বেগের সীমা অতিক্রম করবে।

সার-সংক্ষেপ

কাজ : কোনো বস্তুর ওপর বল প্রয়োগে বস্তুর সরণ ঘটলে প্রযুক্ত বল ও বলের অভিমুখে সরণের উপাংশের গুণফলকে কাজ বলে।

কাজের একক : কাজের একক নিউটন-মিটার বা জুল।

1 জুল : এক নিউটন বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর 1 মিটার সরণ হলে যে কাজ হয় তাকে এক নিউটন-মিটার বা 1 জুল বলে।

বলের দ্বারা কাজ : বল প্রয়োগ করার ফলে যদি বলের প্রয়োগ বিন্দু বলের ক্রিয়া অভিমুখে সরে যায় বা বলের দিকে সরণের উপাংশ থাকে তবে বলের দ্বারা কাজ বুঝায়। এক্ষেত্রে কাজ ধনাত্মক কাজ।

বলের বিরুদ্ধে কাজ : বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত বলের বিপরীত দিকে যদি বস্তুটিকে সরানো হয় অর্থাৎ বলের অভিমুখের বিপরীত দিকে বলের প্রয়োগ বিন্দু সরে যায়, তবে বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়েছে বুঝায়। বলের বিপরীতে কাজ ঋণাত্মক কাজ।

অভিকর্ষ বল : ভূপৃষ্ঠের ওপর বা নিকটে অবস্থিত প্রতিটি বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বল বলে।

শূন্য কাজ : কোনো বস্তুর ভরের ওপর বল প্রয়োগে লম্ব বরাবর সরণ ঘটলে ওই বলের দ্বারা কাজ শূন্য হয়। সেক্ষেত্রে $W = Fs \cos 90° = 0$

ধনাত্মক কাজ : বলের দ্বারা কৃত কাজকে ধনাত্মক কাজ বলে।

ঋণাত্মক কাজ : বলের বিপরীতে কৃত কাজকে ঋণাত্মক কাজ বলে।

কার্যহীন বল : যে বলের প্রয়োগে বস্তুর সরণ বলের অভিমুখের সমকোণে ঘটে তাকে কার্যহীন বল বলে।

কাজ শূন্য হওয়ার শর্ত : (i) যদি সরণ শূন্য হয়, তবে কাজ শূন্য হয়। (ii) বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে কাজ শূন্য হয়। (iii) সংরক্ষণশীল বলের প্রভাবে যদি কোনো বস্তু বৃত্তাকার পথে ঘুরে তখন কাজে শূন্য হয়।

স্প্রিং ধ্রুবক : স্প্রিংয়ের একক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য প্রযুক্ত বলকেই স্প্রিংয়ের বল ধ্রুবক বা স্প্রিং ধ্রুবক বলে। $K = \frac{F}{x}$

ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে কৃত কাজ = টর্ক × কৌণিক সরণ।

শক্তি : কাজ করার সামর্থ্যকে শক্তি বলে। যে পরিমাণ কাজ কোনো বস্তু করতে পারে তা দিয়ে শক্তির পরিমাপ করা হয়।

যান্ত্রিক শক্তি : কোনো বস্তুর মধ্যে তার পারিপার্শ্বিক অবস্থা বা অবস্থানের সাপেক্ষে অথবা গতির জন্য যদি কাজ করার যে সামর্থ্য তথা শক্তি থাকে, তবে ওই শক্তিকে যান্ত্রিক শক্তি বলে।

স্থিতিস্থাপক বল : স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বাইরে থেকে বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর আকার পরিবর্তন ঘটালে বল অপসারণ করলে যে বলের কারণে তা আবার পূর্বের আকার ফিরে পায় তাকে স্থিতিস্থাপক বল বলে।

শক্তির নিত্যতা সূত্র বা সংরক্ষণ সূত্র : শক্তি যখন একরূপ হতে অন্যরূপে পরিবর্তিত হয় তখন এর কোনো ঘাটতি বা বাড়তি ঘটে না। অর্থাৎ শক্তির বিনাশ ও সৃষ্টি উভয়ই অসম্ভব। একে শক্তির নিত্যতা সূত্র বা সংরক্ষণ সূত্র বলে।

গতিশক্তি : কোনো গতিশীল বস্তু তার গতির জন্য কাজ করার যে সামর্থ্য বা শক্তি লাভ করে তাকে বস্তুটির গতিশক্তি বলে।

গতিশক্তি ও ভরবেগের সম্পর্ক : গতিশক্তি ভরবেগের বর্গের সমানুপাতিক।

কাজ শক্তি উপপাদ্য : কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান। এটি কাজ শক্তি উপপাদ্য নামে পরিচিত।

স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি : বস্তু তার অবস্থানের জন্য যে শক্তি অর্জন করে অথবা বস্তুস্থিত কণাসমূহের পারস্পরিক অবস্থান পরিবর্তনের জন্য বস্তু যে শক্তি অর্জন করে তাকে বস্তুর স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি বলে।

যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণশীলতা : কোনো ব্যবস্থায় কেবল সংরক্ষণশীল বল ক্রিয়া করলে ব্যবস্থার গতিশক্তি ও বিভব শক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব থাকে।

ক্ষমতা : কোনো একটি উৎসের কাজ করার হারকে ক্ষমতা বলে এবং একক সময়ের কৃত কাজ দ্বারা ক্ষমতা পরিমাপ করা হয়।

এক ওয়াট : এক সেকেন্ডে এক জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক জুল/সে বা এক ওয়াট বলে।

অশ্ব ক্ষমতা : প্রতি সেকেন্ডে 740 জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক অশ্ব ক্ষমতা বলে।

কর্ম দক্ষতা : কোনো যন্ত্রে সরবরাহকৃত শক্তি এবং কাজে পরিণত হওয়ার শক্তির অনুপাতকে কর্ম দক্ষতা বলে।

সংরক্ষণশীল বল : যে সংস্থায় বা সিস্টেমে যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত থাকে তাকে সংরক্ষণশীল সংস্থা বা সিস্টেম বলে এবং এরূপ সংস্থায় ক্রিয়াশীল বলকে সংরক্ষণশীল বল বলে। অথবা, যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে তাকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে।

অসংরক্ষণশীল বল : যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে ওই বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় না তাকে অসংরক্ষণশীল বল বলে। অথবা, একটি বন্ধ পথে কোনো বল দ্বারা কৃত কাজ মোট কাজের পরিমাণ যদি শূন্য না হয় তবে সেই বলকে অসংরক্ষণশীল বল বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। সিঁড়ি বেয়ে ওপরে উঠতে কষ্ট হয় কারণ—অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়। কাজের অভিকর্ষীয় একক কেজি-মিটার।

২। গতিশীল কোনো বস্তুর ভরবেগ P এবং গতিশক্তি K হলে এদের মধ্যে সম্পর্ক হলো : $K = \frac{\vec{P}.\vec{P}}{2m}$ বা, $\frac{P^2}{2m}$ বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত বস্তু কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয়। কোনো বস্তুকে ওপরে তুললে যন্ত্রের ক্ষমতা, $P = F \times v = mgv$. মহাকর্ষীয় বিভবের সর্বোচ্চ মান হয় অসীমে এবং সর্বোচ্চ মান শূন্য।

৩। বৈদ্যুতিক বাল্বের মাধ্যমে বৈদ্যুতিক শক্তি আলোক শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। অভিকর্ষীয় বলের বিপরীত কাজ $W \propto h$

৪। বস্তুর ভর ও বেগ উভয়ই দ্বিগুণ হলে গতিশক্তি পূর্বের 4 গুণ হয়। কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কাজ শূন্য হয়।

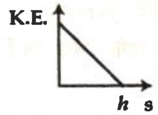
৫। একটি স্প্রিংকে সংকুচিত করলে তাতে স্থিতিশক্তি সঞ্চিত থাকে। স্থিতিস্থাপক বলের বিরুদ্ধে কাজ $W \propto x^2$

৬। ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = Fv = mgv$। গতিশক্তির মাত্রা $[ML^2T^{-2}]$; ধনাত্মক কাজের ক্ষেত্রে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায় এবং ত্বরণ হয়।

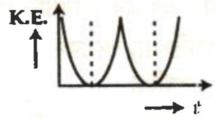
৭। সংরক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে—(১) পূর্ণচক্রে মোট কাজ শূন্য হয় (২) কাজের পরিমাণ কণার গতিপথের ওপর নির্ভর করে না (৩) শক্তি নিত্যতার সূত্র পালিত হয় (৪) কাজ পুনরুদ্ধার করা যায়। এই বলের উদাহরণ—অভিকর্ষীয় বল, বৈদ্যুতিক বল, স্প্রিং-এর বিকৃতি প্রতিরোধকারী বল।

৮। অসংরক্ষণশীল বলের ক্ষেত্রে— (১) পূর্ণচক্রে মোট কাজ শূন্য হয় না। (২) কাজের পরিমাণ কণার গতিপথের ওপর নির্ভর করে। (৩) শক্তির নিত্যতা পালিত হয় না। (৪) কাজ সম্পূর্ণরূপে পুনরুদ্ধার করা যায় না। এই বলের উদাহরণ হলো—ঘর্ষণ বল, সান্দ্র বল।

৯। একটি বস্তুকে ভূমি হতে উল্লম্বভাবে ওপরে নিক্ষেপ করা হলো। h উচ্চতায় ওঠে আবার ভূমিতে পতিত হলো। পাশের লেখচিত্র (ক) ইহা নির্দেশ করে। গতিশক্তির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বনাম সময় লেখচিত্র (খ)-এ দেখানো হলো।

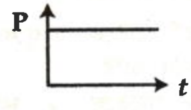


(ক)



(খ)

১০। স্থির অবস্থার একটি বস্তুকে একটি স্থির মানের বল ক্রিয়া করায় বস্তুটি চলতে শুরু করে। ঘর্ষণ বিবেচনা না করলে পাশের লেখচিত্র বস্তুর ক্ষমতা প্রকাশ করে। কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য হয়।



১১। বস্তুর ভরবেগের মান উহার গতিশক্তির সমান হলে বস্তুটির বেগ $2\ ms^{-1}$ হয়।

১২। সিঁড়ি বেয়ে ওপরে ওঠা ঋণাত্মক কাজ। আর নিচে নামা ধনাত্মক কাজ।

১৩। বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ $0°$ হলে কাজ সর্বোচ্চ হয় এবং $90°$ হলে সর্বনিম্ন হয়।

১৪। ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ $[ML^2T^{-3}]$। h উচ্চতাবিশিষ্ট ঘনকের মধ্যে m ভরের গ্যাসের বিভবশক্তি শূন্য।

১৫। সমান গতিশক্তিসম্পন্ন 9 g এবং 4 g ভরের দুটি বস্তু A ও B এর রৈখিক ভরবেগের অনুপাত হবে 3 : 2।

১৬। কোনো বস্তুর ভরবেগ 100% বৃদ্ধি করলে গতিশক্তি 300% বৃদ্ধি পায়।

১৭। কোনো যন্ত্রের কার্যকর শক্তি ও প্রদত্ত শক্তির অনুপাতকে দক্ষতা বলে।

১৮। গতিশক্তি 4 গুণ বৃদ্ধি পেলে ভরবেগ 2 গুণ বৃদ্ধি পায়। ধনাত্মক কাজে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়, ত্বরণ হয়।

১৯। বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে ঋণাত্মক কাজের শর্ত হবে $180° \geq \theta \geq 90°$

২০। বলের দ্বারা কাজ বা ধনাত্মক কাজের শর্ত হবে $0° \leq \theta < 90°$।

২১। কাজের মান শূন্য হবে যদি বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ $90°$ হয়।

২২। বস্তুর আকার পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি লাভ করে—ধনুকে তীর লাগিয়ে টানলে, ধাতব পাতকে বাঁকালে।

২৩। পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কাজের উদাহরণ (i) মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কৃত কাজ (ii) তড়িৎ বল কর্তৃক কৃত কাজ।

২৪। শূন্য কাজের শর্ত হলো— (i) $\cos\theta = 0$, (ii) বস্তুর ওপর বল প্রয়োগেও কোনো সরণ না ঘটলে।

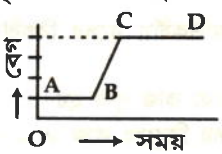
২৫। বস্তুর স্থিতিশক্তি নির্ভর করে তার ভর ও উচ্চতার ওপর। বল ধ্রুবক বা স্প্রিং ধ্রুবক, $K = \frac{F}{x}$। মাত্রা MT^{-2}

২৬। একটি ভারী বস্তুকে মাথায় করে অনুভূমিক বরাবর রাস্তার ওপর দিয়ে এক স্থান হতে অন্য স্থানে সরানো হলো—(১) ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে কাজ হয় (২) অভিলম্বিক প্রতিক্রিয়া দ্বারা কাজ শূন্য।

২৭। দুটি বস্তুকণার মধ্যকার দূরত্ব বৃদ্ধি করলে— (i) মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ ঋণাত্মক (ii) বাহ্যিক বল দ্বারা কৃত কাজ ধনাত্মক (iii) মহাকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ দূরত্বের আদি ও চূড়ান্ত মানের ওপর নির্ভর করবে। মধ্যবর্তী কোনো মানের ওপর নয়। মহাকর্ষ বিভব (V) ও প্রাবল্য (E) এর মধ্যে সম্পর্ক হলো, $E = -\frac{dV}{dr}$।

২৮। স্প্রিং সংকোচন ও প্রসারণের ক্ষেত্রে কাজ ও স্থিতিশক্তি প্রকাশের সমীকরণ, $W = \frac{1}{2}Kx^2$। অর্থাৎ স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক।

২৯। উড়োজাহাজ থেকে নিক্ষিপ্ত বোমা মাঝপথে ফেটে গেলে মোট ভরবেগ কমবে। অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি বল দ্বারা সৃষ্ট সরণের সমানুপাতিক। $E_P = mgh$ বা $E_P \propto h$

৩০। 

(i) চিত্র অনুযায়ী CD অংশের ভরবেগ হবে AB অংশের ভরবেগের চারগুণ।
(ii) CD অংশের বেগ দ্বিগুণ হলে গতিশক্তি AB অংশের চারগুণ হবে।

৩১। সরল দোলকের দোলনের ক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতায় গতিশক্তি শূন্য, বিভবশক্তি সর্বাধিক। আবার সাম্যাবস্থায় বা মধ্যবিন্দুতে গতিশক্তি সর্বাধিক, বিভবশক্তি শূন্য হয়।

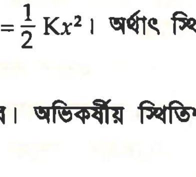
৩২। কাজকে বল ও সরণ এই দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল দ্বারা পরিমাপ করা হয়। এর এস. আই. একক জুল বা নিউটন-মিটার। কাজের অভিকর্ষীয় একক কেজি-মিটার। কাজের মাত্রা ML^2T^{-2}।

৩৩। সরণ যদি শূন্য হয় তবে কাজ শূন্য হয়। অভিকেন্দ্র বল একটা কার্যহীন বল।

৩৪। স্থিতিস্থাপক বল দ্বারা কাজ সরণের বর্গের সমানুপাতিক, অর্থাৎ $W \propto x^2$ এবং অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃত কাজ সরণ বা উচ্চতার সমানুপাতিক অর্থাৎ $W \propto h$।

৩৫। স্প্রিং-এর একক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য প্রযুক্ত বলকেই স্প্রিং ধ্রুবক বলে। এর একক নিউটন/মিটার (Nm^{-1})।

৩৬। গতিশক্তি E_k ভরবেগ P-এর বর্গের সমানুপাতিক অর্থাৎ $E_P \propto P^2$ এর লেখচিত্র—



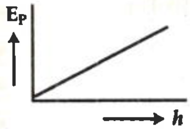
৩৭। কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান। একে কাজ-শক্তি উপপাদ্য বলে।

৩৮। একটি রাইফেলের গুলো ১টি তক্তা ভেদ করে। গুলোর বেগ তিনগুণ করা হলে তা একই পুরুত্বের ৯টি তক্তা ভেদ করতে পারে।

৩৯। প্রতি সেকেন্ডে 746 জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক অশ্ব-ক্ষমতা বলে। 1 HP = 746 J/s = 746 Watt। 1 ওয়াট = 1 জুল/সে.

৪০। কিলোওয়াট ঘণ্টা হচ্ছে শক্তির একক। বল, কাজ ও সরণের মধ্যে সম্পর্ক হলো $W = \vec{F} . \vec{s}$

৪১। একটি বস্তুকে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে এর বিভবশক্তি ও উচ্চতার লেখচিত্র হলো—



৪২। 30 m উচ্চতা থেকে একটি বল বিনা বাধায় পড়তে দিলে 10 m উচ্চতায় বলটির গতিশক্তি ও বিভবশক্তি দ্বিগুণ হবে।

৪৩। তড়িৎ বল সংরক্ষণশীল বল। সান্দ্র বল অসংরক্ষণশীল বল।

৪৪। কোনো কণার ওপর $\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ N এবং বলের ক্রিয়ায় সরণ $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ m হলে কৃত কাজ হবে 4 J।

৪৫। একটি রাইফেলের গুলোর বেগ দ্বিগুণ বৃদ্ধি পেলে গতিশক্তি 4 গুণ বৃদ্ধি পায়, অসংরক্ষণশীল বল পথের ওপর নির্ভর করে।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। 10 N বল প্রয়োগে একটি গাড়িকে 100 m সরাতে কত কাজ করতে হবে? বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 60°। [BUET Admission Test, 2013-14]
ক 500 J
খ 1000 J
গ 100 J
ঘ 50 J

২। 10 kg ভরের একটি বস্তুকে স্প্রিং থেকে ঝুলানো হলো যার স্প্রিং ধ্রুবক 200 N/m। স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হবে— [রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); BUET Admission Test, 2013-14]
ক 0.05 m
খ 20.0 m
গ 2.4 m
ঘ 0.49 m

৩। কাজের মান শূন্য হবে যদি প্রযুক্ত বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ— [রা. বো. ২০২৩, ২০১৫; কু. বো. ২০২১; চ. বো. ২০২১; সি. বো. ২০১৬; য. বো. ২০১৬; Admisstion Test : RU-H 2017-18; RUET 2010-11; RU 2017-18; BRU 2016-17; JKKNIU 2018-19; JU unit-A 2020-21; CU-A 2021-22]
ক 90°
খ 180°
গ 0°
ঘ 360°

৪। শক্তির একক— [দি. বো. ২০২১]
(i) জুল
(ii) kgm^2s^{-2}
(iii) ইলেকট্রন ভোল্ট
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

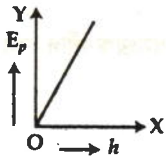
৫। বল, সরণ ও কাজের মধ্যে সম্পর্ক হলো— [JnU Admission Test, 2015-16]
ক $W = \vec{F} . \vec{s}$
খ $W = \vec{F} \times \vec{s}$
গ $W = Fs \sin\theta$
ঘ $W = \vec{F} \times \vec{s} \cos\theta$

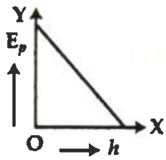
৬। একটি হাল্কা ও একটি ভারী বস্তুর ভরবেগ একই, কোনটির গতিশক্তি বেশি? [Admission Test : PUST 2019-20; CU 2004-05]
(i) হাল্কা বস্তুটির
(ii) ভারী বস্তুটির
(iii) উভয়ের সমান
নিচের কোনটি সঠিক?
ক i
খ ii
গ iii
ঘ i, ii ও iii

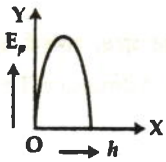
৭। নিচের বস্তুসমূহের মধ্যে কোনটির গতিশক্তি বেশি? [ম. বো. ২০২১; Admission Test : BUET 2014-15; BU 2014-15; BDS 2019-20; RU-C 2022-23; BDS 2019-20]
ক ভর 2 M ও বেগ $3v$
খ ভর 3 M ও বেগ $2v$
গ ভর 3 M ও বেগ v
ঘ ভর M ও বেগ $4v$

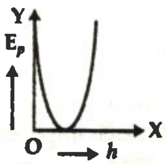
৮। ওয়াট ও অশ্ব ক্ষমতার মধ্যে সম্পর্ক হলো—
[দি. বো. ২০২৩; ম. বো. ২০২৩, ২০২১;
DU Admission Test (Technology), 2016-17]
ⓚ 1 HP = 746 W
ⓛ 1 HP = 3.4×10^5 W
ⓖ 1 HP = 550 W
ⓓ 1 HP = 946 W

৯। একটি বস্তুকে খাড়াভাবে ওপরের দিকে ছুড়ে দেওয়া হলো। কোন গ্রাফটি ভূমি হতে উচ্চতা 'h'-এর সাপেক্ষে বস্তুটির বিভবশক্তি E_p-এর পরিবর্তন নির্দেশ করে ?
[কু. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০১৫]

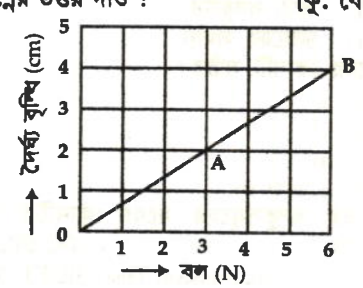
ⓚ 

ⓛ 

ⓖ 

ⓓ 

নিচের লেখচিত্রটিতে একটি স্প্রিং-এ প্রযুক্ত বলের সাথে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। ১০নং এবং ১১নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [কু. বো. ২০২১]



১০। Nm^{-1} এককে স্প্রিং ধ্রুবক কত ?
[রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]
ⓚ 200
ⓛ 150
ⓖ 100
ⓓ 50

১১। স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি 3 cm হলে স্প্রিং-এ সঞ্চিত শক্তির পরিমাণ কত ?
ⓚ 0.0675 J
ⓛ 0.0576 J
ⓖ 0.0375 J
ⓓ 0.0275 J

১২। একটি বস্তুকে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে—
(i) সর্বাধিক উচ্চতায় বিভব শক্তি সর্বোচ্চ
(ii) সর্বাধিক উচ্চতায় গতিশক্তি সর্বোচ্চ
(iii) মোট শক্তি সর্বত্র সমান
নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ i ও ii
ⓛ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓓ i, ii ও iii

১৩। গতিশক্তির মাত্রা কোনটি?
[ব. বো. ২০২১; দি. বো. ২০১৯; সি. বো. ২০১৭; ঢা. বো. ২০১৬; য. বো. ২০১৬; রা. বো. ২০১৬;
Admission Test : DU 2017-18;
KU 2019-20; IU 2015-16;
CVASU 2018-19; BDS 2007-08]
ⓚ ML^2T^2
ⓛ ML^2T^{-1}
ⓖ ML^2T^{-2}
ⓓ $ML^{-2}T^2$

১৪। K স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট কোনো স্প্রিং-এর মুক্ত প্রান্তের x পরিমাণ সরণ ঘটলে সঞ্চিত বিভব শক্তি —
[রা. বো. ২০১৬;
BSMRSTU Admission Test, 2016-17]
ⓚ $W = Kx^2$
ⓛ $W = \frac{1}{2}Kx^2$
ⓖ $W = Kx$
ⓓ $W = -\frac{1}{2}Kx$

১৫। গতিশক্তি ও ভরবেগের মধ্যে সম্পর্ক কোনটি?
[ঢা. বো. ২০২১; কু. বো. ২০২১, ২০১৯; চ. বো. ২০২১, ২০১৯; সি. বো. ২০১৭, ২০১৬; সকল বোর্ড ২০১৮;
Medical Admission Test, 2016-17;
Admission Test : RU, JU,
JKKNIU 2017-18; JU 2021-22;
RU-C 2022-23]
ⓚ $K = \frac{2p}{m}$
ⓛ $K = \frac{p}{2m}$
ⓖ $K = \frac{2p^2}{m}$
ⓓ $K = \frac{p^2}{2m}$

১৬। কাজের পরিমাণ সবচেয়ে বেশি হয় যখন প্রযুক্ত বল ও সরণের মধ্যে কোণের মান—
[ঢা. বো. ২০২১; দি. বো. ২০১৬; সি. বো. ২০১৫; Admission Test : KUET 2016-07; IU 2015-16; NSTU 2017-18; JUST 2015-16, 2016-17; 2017-18, 2019-20; BSFMSTU 2019-20; BDS 2017-18]

ⓚ 0°
ⓚ 45°
ⓖ 90°
ⓖ 30°

(ক) $0°$
(খ) $45°$
(গ) $90°$
(ঘ) $30°$

১৭। 100 kg ভরের একটি বস্তুকে ক্রেনের সাহায্যে 10 cms^{-1} বেগে ছাদের ওপর ওঠালে ক্রেনের ক্ষমতা কত? [ঢা. বো. ২০১৯ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০১৫; Admission Test : JKKNIU, KU 2019-20; JU 2017-18; SAU 2016-17 (মান ভিন্ন); BuTex 2015-16 (মান ভিন্ন)]

(ক) 0·98 W
(খ) 10 W
(গ) 98 W
(ঘ) 9800 W

১৮। বলের দ্বারা কাজ বা ধনাত্মক কাজ হয় যদি—
[ব. বো. ২০১৫; সি. বো. ২০১৫; GST (combined) Admission Test, 2019-20]

(ক) বল প্রয়োগে সরণ শূন্য হয়
(খ) বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে ঘুরে
(গ) বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়
(ঘ) বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ শূন্য হয়

১৯। কোনটি সংরক্ষণশীল বল?
[ঢা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ২০১৬; দি. বো. ২০১৫ (মান ভিন্ন) Admission Test : JUST 2017-18; CU unit-A 2019-20; DU (প্রযুক্তি) 2021-22]

(ক) বায়ুর বাধা
(খ) তড়িৎ বল
(গ) ঘর্ষণ বল
(ঘ) সান্দ্র বল

একটি কণার ওপর $\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ N বল প্রয়োগে কণাটির $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ m সরণ ঘটে। ২০নং ও ২১নং প্রশ্নের উত্তর দাও। [য. বো. ২০১৫]

২০। কৃত কাজের মান কত?
[ঢা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ২০২১ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); সি. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০১৯ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১৯ (মান ভিন্ন); দি. বো. ২০১৭ (মান ভিন্ন); Admission Test : DU 2017-18 (মান ভিন্ন); CU 2018-19 (মান ভিন্ন); BSFMSTU 2019-20 (মান ভিন্ন); BSMRSTU 2019-20 (মান ভিন্ন);]

(ক) $\sqrt{3}$ J
(খ) $\sqrt{14}$ J
(গ) 4 J
(ঘ) 6 J

২১। $\vec{F}$ ও $\vec{r}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত?

(ক) 22·20°
(খ) 51·88°
(গ) 81·84°
(ঘ) 84·53°

২২। স্প্রিং-এ সঞ্চিত শক্তি হচ্ছে— [দি. বো. ২০১৫]

(i) বিভবশক্তি
(ii) রাসায়নিক শক্তি
(iii) যান্ত্রিক শক্তি

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii
(খ) i ও iii
(গ) ii ও iii
(ঘ) i, ii ও iii

২৩। কোনো প্রক্রিয়ায় মোট প্রদত্ত শক্তি E_m-এর একটি অংশ কার্যকর শক্তি u-তে রূপান্তরিত হয় এবং বাকি শক্তি W অপচয় হয়, প্রক্রিয়াটির দক্ষতা কত?
[ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) $\frac{u - W}{E_m} \times 100\%$
(খ) $\frac{W}{E_m} \times 100\%$
(গ) $\frac{u}{E_m} \times 100\%$
(ঘ) $\frac{u + W}{E_m} \times 100\%$

২৪। 60 m উচ্চতা হতে একটি বস্তুকে বিনা বাধায় পড়তে দিলে ভূমি হতে কত উচ্চতায় বিভবশক্তি গতিশক্তির অর্ধেক হবে?
[চ. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ২০১৫; ব. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); সি. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); দি. বো. ২০১৬; Admission Test : DU 2016-17; BuTex 2016-17, 2015-16; NSTU 2017-18; IU 2019-20; JUST 2016-17 (মান ভিন্ন); RU unit-C 2020-21; BUET 2021-22 (মান ভিন্ন); RU-C 2022-23; BAU 2017-18; CKRUET 2022-23 (মান ভিন্ন)]

(ক) 10 m
(খ) 20 m
(গ) 30 m
(ঘ) 40 m

২৫। পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজ হলো— [কু. বো. ২০১৫]

ⓚ $W = \int_i^f \vec{F}.d\vec{s}$

ⓛ $W = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x)dx$

ⓜ $W = GMm\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$

ⓝ $W = \int_0^x Fdx$

২৬। শূন্য কাজের শর্ত হলো— [রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০১৫]

i. বস্তুর ওপর বল প্রয়োগে উল্লম্ব দিকে সরণ হলে

ii. যদি $\cos\theta = 0$

iii. বস্তুর ওপর বল প্রয়োগেও কোনো সরণ না ঘটলে

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii
ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii
ⓝ i, ii ও iii

২৭। 60 kg ভরের একজন লোক প্রতিটি 15 cm উঁচু 50টি সিঁড়ি 20 sec-এ উঠতে পারে। লোকটির অশ্বক্ষমতা কত? [Medical Admission Test, 2007-08; Admission Test : RUET 2014-15; KU 2008-09; JUST 2015-16; BMA 2017-18 (মান ভিন্ন); RU 2016-17 IU 2018-19 (মান ভিন্ন)]

ⓚ 0·396 HP
ⓛ 0·296 HP
ⓜ 0·596 HP
ⓝ None

২৮। কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল দ্বারা কৃত কাজ নিচের কোন রাশিটির পরিবর্তনের সমান? [ঢা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); সি. বো. ২০১৭; CU-A Admission Test, 2022-23]

ⓚ তাপমাত্রা
ⓛ ঘনত্ব
ⓜ গতিশক্তি
ⓝ বিভবশক্তি

২৯। একটি স্প্রিংকে প্রসারিত করা হলো—

i. এটি বিভবশক্তি অর্জন করে

ii. এটি প্রত্যায়নক বল লাভ করে

iii. প্রত্যায়নক বলের দ্বারা কৃত কাজই এর বিভব শক্তি

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও iii
ⓛ i ও ii
ⓜ ii ও iii
ⓝ i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপকটি পড়ে ৩০নং ও ৩১নং প্রশ্নের উত্তর দাও : একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা 10 m এবং ব্যাস 1·5 m। একটি পাম্প 25 মিনিটে কুয়াটিকে পানিশূন্য করতে পারে। [য. বো. ২০১৫; ব. বো. ২০১৫ (মান ভিন্ন); CUET Admission Test, 2014-15]

৩০। পাম্পটির ক্ষমতা কত?

ⓚ 0·773 HP
ⓛ 1·543 HP
ⓜ 3·095 HP
ⓝ 6·190 HP

৩১। 0·4 HP ক্ষমতার আরও একটি পাম্প যুক্ত করলে কী পরিমাণ সময় সাশ্রয় হবে?

ⓚ 24·36 মিনিট
ⓛ 8·52 মিনিট
ⓜ 16·48 মিনিট
ⓝ 0·63 মিনিট

৩২। m ভরের একটি বস্তু E গতিশক্তিতে চলছে। এর রৈখিক ভরবেগ কত? [চ. বো. ২০১৯]

ⓚ mE
ⓛ $\sqrt{2mE}$
ⓜ $m\sqrt{E}$
ⓝ $\sqrt{2}\,mE$

৩৩। একটি মার্বেলকে সুতায় বেঁধে বৃত্তাকার পথে ঘুরালে কাজের পরিমাণ হবে— [সি. বো. ২০১৫; Admission Test : JUST-C 2017-18; MBSTU 2015-16]

ⓚ সর্বোচ্চ
ⓛ ঋণাত্মক
ⓜ শূন্য
ⓝ ধনাত্মক

৩৪। 200 g ভরের একটি বস্তু 100 m ওপর থেকে পড়লে ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি কত? [চ. বো. ২০২১; সি. বো. ২০১৫; Admission Test : KUET 2008-09 (মান ভিন্ন); BAU 2011-12(মান ভিন্ন); RU 2019-20 (মান ভিন্ন); JU 2011-12 (মান ভিন্ন); DU (প্রযুক্তি) 2022-23 (মান ভিন্ন)]

ⓚ 196 J
ⓛ 39·2 J
ⓜ 78·4 J
ⓝ 98 J

৩৫। 1 kg ভরের একটি বস্তুকে 0·5 m ব্যাসার্ধের একটি অনুভূমিক বৃত্তাকার পথে 2 ms⁻¹ সমদ্রুতিতে ঘোরানো হচ্ছে। এক পূর্ণ ঘূর্ণনের জন্য প্রয়োজনীয় কাজের মান কত? [DU Admission Test, 2015-16]

ⓚ 1 J
ⓛ 4 J
ⓜ 0 J
ⓝ 2 J

৩৬। একটি কুয়ার গভীরতা 10 m এবং ব্যাস 6 m। একটা পাম্পের সাহায্যে কুয়াটিকে 20 মিনিটে সম্পূর্ণ পানি শূন্য করা হলে পাম্পের ক্ষমতা কত? [ব. বো. ২০১৫; Admission Test : CUET 2014-15; BUET 2009-2010; RU 2012-13 (মান ভিন্ন); JUST 2016-17; PUST 2016-17]

ⓚ 15·5 HP
ⓛ 2·14 HP
ⓜ 3·12 HP
ⓝ 3·58 HP

৩৭। 15 ওয়াট ক্ষমতা বলতে বুঝায়— [ব. বো. ২০১৫]

ⓚ 1 সেকেন্ডে 15 জুল কাজ
ⓛ 3 সেকেন্ডে 5 জুল কাজ
ⓜ 5 সেকেন্ডে 3 জুল কাজ
ⓝ 15 সেকেন্ডে 1 জুল কাজ

৩৮। বস্তুর আকার পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি লাভ করে— [কু. বো. ২০১৫]

i. ধনুকে তীর লাগিয়ে টানলে
ii. ধাতব পাতকে বাঁকালে
iii. রবারকে প্রসারিত করলে

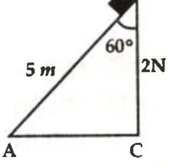
নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii
ⓛ i ও iii
ⓜ ii ও iii
ⓝ i, ii ও iii

৩৯। ক্ষমতা P, বল F ও বেগ v-এর মধ্যে সম্পর্ক হলো— [রা. বো. ২০২১; ম. বো. ২০২১; Admission Test : DU (Technology), 2016-17; BUET 2021-22]

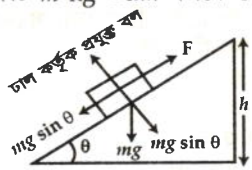
ⓚ $P = \frac{F}{v}$
ⓛ $F = \frac{P}{v^2}$
ⓜ $P = Fv$
ⓝ $v = PF$

৪০। 2 N বল কোনো নির্দিষ্ট ভরের বস্তুর ওপর ক্রিয়া করায় বস্তুটির বলের দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে 5 m দূরে সরে গেলে কাজের পরিমাণ কত? [Admission Test : JU 2017-18; RU 2014-15; BUET 2013-14 (মান ভিন্ন)]



ⓚ 5 J
ⓛ 8 J
ⓜ 6 J
ⓝ 10 J

উদ্দীপকটি পড়ে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও :
চিত্রে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে আনত একটি ঘর্ষণ-বিহীন ঢালে একটি m kg ভরের বক্সকে দেখানো হলো।



বক্সটিকে ঢালের ওপরের দিকে ধ্রুববেগে গতিশীল করতে এর ওপর ঢালের সমান্তরালে F বল প্রয়োগ করা হলো।

৪১। বক্সটিকে ঢালের ওপরের দিকে 'x' m দূরত্ব অতিক্রম করার জন্য কত কাজ করতে হবে? [দি. বো. ২০২১; ঢা. বো. ২০১৫]

ⓚ $mgx \sin\theta$
ⓛ $mgh \cos\theta$
ⓜ $mgx \cos\theta$
ⓝ $mgh \sin\theta$

৪২। এখন যদি বক্সটিকে 'v' বেগে গতিশীল রাখার জন্য বলের দিকে 'a' ত্বরণ সৃষ্টি করতে হয়, তবে কত ক্ষমতা প্রয়োগ করতে হবে? [ঢা. বো. ২০১৫]

ⓚ $mgv + mav \sin\theta$
ⓛ $mav + mgv \sin\theta$
ⓜ $mav + mgv \cos\theta$
ⓝ $mgv + mav \cos\theta$

৪৩। 2 kg ভরের একটি বস্তুর ভরবেগ 2 kg ms^{-1} হলে গতিশক্তি কত হবে? [য. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০১৭; Admission Test : RU 2017-18; CVASU 2015-16 (মান ভিন্ন); JU 2021-22 (মান ভিন্ন); BMA 2017-18 (মান ভিন্ন)]

ⓚ 1·5 J
ⓛ 2 J
ⓜ 1 J
ⓝ 4 J

৪৪। অসংরক্ষণশীল বলের উদাহরণ কোনটি? [কু. বো. ২০২২, রা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন), ২০১৫; য. বো. ২০২১; ব. বো. ২০১৫; Admission Test : BRU 2018-19; BSMRSTU 2017-18; JU 2017-18; JU 2021-22 (মান ভিন্ন)]

ⓚ ঘর্ষণ বল ও সান্দ্র বল
ⓛ বৈদ্যুতিক বল ও কুলম্ব বল
ⓜ চুম্বক বল ও নিউক্লীয় বল
ⓝ অভিকর্ষজ বল ও মহাকর্ষ বল

৪৫। ভূমির সাথে 30° কোণে আনত 5 m দীর্ঘ একটি ঢালু পথে 100 g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু যে গতিশক্তি প্রাপ্ত হবে— [ম. বো. ২০২৩; রা. বো. ২০১৭; ব. বো. ২০১৭]

ⓚ 0·49 J
ⓛ 2·45 J
ⓜ 0·048 J
ⓝ 1·225 J

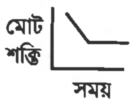
৪৬। কোনো বল দ্বারা কৃত কাজ— [দি. বো. ২০১৭]
i. বল ও সরণের ডট গুণন
ii. ভর × ত্বরণ
iii. গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও iii
ⓚ i ও ii
ⓖ ii ও iii
ⓖ i, ii ও iii

৪৭। বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে ঋণাত্মক কাজের শর্ত হবে—
[য. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); ম. বো. ২০২১; চ. বো. ২০১৭, ২০১৫; কু. বো. ২০১৬]
ⓚ $180° \geq \theta \geq 90°$
ⓚ $180° \geq \theta > 90°$
ⓖ $180° \leq \theta \leq 90°$
ⓖ $180° < \theta \leq 90°$

৪৮। একটি স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনে আটকিয়ে অপর প্রান্তে ভর ঝুলিয়ে স্প্রিংটি ওপরে নিচে দুলতে দেওয়া হলো। [দি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]
নিচের লেখচিত্রে নির্দেশ করা যায়।
ক 

খ 

গ 

ঘ 

৪৯। একটি রাইফেলের গুলির বেগ দ্বিগুণ করলে তার গতিশক্তি কতগুণ বাড়বে ?
[দি. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ম. বো. ২০২১; Admission Test : CU-A 2017-18; JKKNIU 2017-18; IU 2017-18, 2014-15; KU 2019-20; MBSTU 2015-16; CU unit-A 2020-21]
ক 2
খ 4
গ 8
ঘ 16

৫০। 2 ক্যালরি তাপ সম্পূর্ণরূপে কাজে রূপান্তরিত হলে কত কাজ হবে ? [কু. বো. ২০১৬; RU-G_2 Admission Test, 2017-18]
ক 8·2 J
খ 4·2 J
গ 8·4 J
ঘ 4·8 J

৫১। কোনো গতিশীল বস্তুর গতিশক্তি E_k এবং ভরবেগ P হলে P বনাম $\sqrt{E}$ লেখচিত্রটি হবে—
[Admision Test : JU unit-A 2019-20; RU-C 2021-22]
ক অধিবৃত্ত
খ আয়তাকার পরাবৃত্ত
গ উপবৃত্ত
ঘ সরলরেখা

৫২। পড়ন্ত অবস্থায় ভূমি হতে 5 m উঁচুতে বিভবশক্তি ও গতিশক্তির অনুপাত কোনটি ?
[ঢা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); ২০১৭]
ক 1 : 2
খ 1 : 3
গ 1 : 4
ঘ 2 : 1

৫৩। একটি বস্তুর রৈখিক ভরবেগ 50% বৃদ্ধি করলে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায় কত ?
[ঢা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন), ২০১৭; ম. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); BUET Admission Test, 2021-22 (মান ভিন্ন)]
ক 25%
খ 50%
গ 125%
ঘ 225%

একটি হাতুড়ির ভর 1 kg। এটি 10 ms^{-1} বেগে চলে একটি পেরেকের মাথায় আঘাত করল। এতে পেরেকের সরণ হলো 2 cm। উপরিউক্ত তথ্য থেকে ৫৪ ও ৫৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [কু. বো. ২০১৭]

৫৪। কতক্ষণ হাতুড়িটি পেরেকের সংস্পর্শে ছিল ?
ক 4×10^{-3} sec
খ 2×10^{-3} sec
গ 1×10^{-3} sec
ঘ $0·25 \times 10^{-3}$ sec

৫৫। হাতুড়িটি দ্বারা সম্পাদিত কাজ কত ?
ক 100 J
খ 50 J
গ 10 J
ঘ 0·2 J

৫৬। 1 কিলোওয়াট ঘণ্টা সমান—
[ব. বো. ২০২১; রা. বো. ২০১৭; JU Admission Test, 2021-22]
ক 1000 J
খ 3600 J
গ 6000 J
ঘ $3·6 \times 10^6$ J

৫৭। 1 N/m স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট কোনো স্প্রিংকে শিথিল অবস্থা থেকে 0·1 m সংকুচিত করা হলো। এই অবস্থায় স্প্রিংটির ভেতর শক্তি কত জুল ?
[Admission Test : SUST 2017-18; JU-A 2022-23 (মান ভিন্ন)]

(ক) 10^{-3} J
(খ) 5×10^{-2} J
(গ) 5×10^{-3} J
(ঘ) -5×10^{-3} J
(ঙ) -5×10^{-4} J

৫৮। একটি কুয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি ঘণ্টায় 25×10^6 kg পানি 50 m উচ্চতায় ওঠানো হয়। 70% ক্ষমতা ক্ষয় হলে এর অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর।
[KUET Admission Test, 2017-18, 2014-15 (মান ভিন্ন)]

(ক) $4·8 \times 10^6$ HP
(খ) 6516 HP
(গ) $1·5 \times 10^4$ HP
(ঘ) 3649 HP
(ঙ) 6251 HP

৫৯। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার দৈর্ঘ্য 5 m, প্রস্থ 3 m, গভীরতা 10 m। 80% কর্মদক্ষতা বিশিষ্ট একটি পাম্প 20 মিনিটে কুয়াটিকে পানি শূন্য করতে পারে। পাম্পটির অশ্বক্ষমতা কত ?
[CUET Admission Test, 2015-16]

(ক) 10·26 HP
(খ) 7·15 HP
(গ) 6·6 HP
(ঘ) কোনোটিই নয়

৬০। কোনো নির্দিষ্ট ভরের বস্তুর গতিশক্তি, এর ভর-বেগের সাথে সম্পর্ক কী ?
[Medical Admission Test, 2016-17]

(ক) বর্গের সমানুপাতিক
(খ) বর্গমূলের সমানুপাতিক
(গ) বর্গের ব্যস্তানুপাতিক
(ঘ) সমানুপাতিক

৬১। একটি বস্তুর ভরবেগ দ্বিগুণ করা হলে গতিশক্তি—
[Medical Admission Test, 2016-17; Admission Test : CU 2012-13; IU 2004-05; BRU 2012-13; DU (HEC) 2020-21 (মান ভিন্ন); CU unit-A 2020-21 (মান ভিন্ন); BUET 2021-22 (মান ভিন্ন)]

(ক) চারগুণ হয়
(খ) একই থাকে
(গ) আটগুণ হয়
(ঘ) দ্বিগুণ হয়

৬২। অসংরক্ষণশীল বলের মান কোনটির ওপর নির্ভর করে ? [Medical Admission Test, 2016-17]

(ক) পথ
(খ) অবস্থান
(গ) উভয়ই
(ঘ) কোনোটিই নয়

৬৩। নিম্নের কোনটি শক্তির একক নয় ?
[য. বো. ২০১৯; JUST Admission Test, 2019-20]

(ক) kW-h
(খ) N-m
(গ) $kgms^{-1}$
(ঘ) W-s

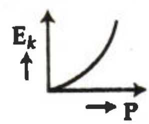
৬৪। কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃত কাজ—
[ঢা. বো. ২০২৩, ২০১৯; কু. বো. ২০২২; চ. বো. ২০২২, ২০২১; ব. বো. ২০২২; সি. বো. ২০২২; দি. বো. ২০১৬; Admission Test : RU-G 2016-17; BRU-D 2017-18; SAU 2018-19; CU-A2 2021-22; RU 2021-22]

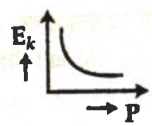
(ক) অসীম
(খ) শূন্য
(গ) ধনাত্মক
(ঘ) ঋণাত্মক

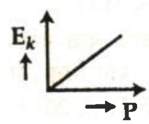
৬৫। 1 kg ও 4 kg ভরের দুটি বস্তু একই গতিশক্তি নিয়ে চলছে। এদের রৈখিক ভরবেগের অনুপাত কত ?
[রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০২১ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); দি. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১৯; Admission Test : RU-F_1 2017-18; DU (প্রযুক্তি) 2020-21]

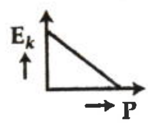
(ক) 4 : 1
(খ) √2 : 1
(গ) 1 : 2
(ঘ) 1 : 16

৬৬। বস্তুর ভর ধ্রুবক হলে, রৈখিক ভরবেগ (P) বনাম গতিশক্তি (E_k) লেখচিত্রটি হবে—[চ. বো. ২০২৩; ব. বো. ২০২২; সি. বো. ২০২২, ২০১৯; দি. বো. ২০২১; চ. বো. ২০১৯; Admission Test : RU-C 2021-22 (মান ভিন্ন); BUP 2021-22]

(ক) 

(খ) 

(গ) 

(ঘ) 

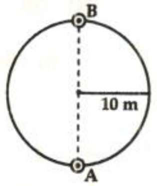
৬৭। 20 kg ভরের একটি পাথর কত উঁচু থেকে পড়লে এর গতিশক্তি 20 ms^{-1} বেগে চলমান 2000 kg গাড়ির গতিশক্তির সমান হবে ?
[JU Admission Test, 2018-19]

(ক) 400 m
(খ) 1147 m
(গ) 1020 m
(ঘ) 2040·81 m

৬৮। ভূমি হতে m ভরের কোনো বস্তু কণাকে 2R (পৃথিবীর ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ) উচ্চতায় উঠাতে কৃত কাজ— [CU Admission Test, 2018-19]

(ক) $2\,mgR$
(খ) mgR
(গ) $3\,mgR$
(ঘ) $\frac{2mgR}{3}$

৬৯। 100 gm ভরের একটি পাথর উল্লম্বতলে 10 m ব্যাসার্ধের বৃত্ত পথে ঘুরতে ঘুরতে A অবস্থান হতে B অবস্থানে আসল [চিত্র দ্রষ্টব্য]। শক্তির পরিবর্তন কত হবে? [রা. বো. ২০১৯]



(ক) 10 J
(খ) 20 J
(গ) 30 J
(ঘ) 40 J

৭০। বলের দ্বারা কাজের ক্ষেত্রে—
[য. বো. ২০২১; কু. বো. ২০১৯]

(ক) $0° \le \theta < 90°$
(খ) $90° < \theta \le 180°$
(গ) $0° < \theta \le 90°$
(ঘ) $90° \le \theta < 180°$

৭১। কাজের অভিকর্ষীয় একক— [কু. বো. ২০১৯; JU Admission Test, 2021-22]

(ক) kg-m
(খ) Nm
(গ) Nm^2
(ঘ) kg-m^2

৭২। 5 kg ভর সম্পন্ন একটি বস্তুর ওপর একটি বল $\vec{F} = (10\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$N-এর ক্রিয়ায় বস্তুটির অবস্থান $\vec{r_1} = (8\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k})$m থেকে অপর একটি অবস্থান $\vec{r_2} = (12\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k})$ m-এ স্থানান্তরিত হলো। এতে কৃত কাজ—
[ঢা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১৯; KUET Admission Test, 2015-16 (মান ভিন্ন)]

(ক) 2J
(খ) 3J
(গ) 5J
(ঘ) 7J

৭৩। বল ধ্রুবক-এর মাত্রা কোনটি?
[ব. বো. ২০২৩; য. বো. ২০১৯; JU Admission Test, 2021-22]

(ক) $[ML^0T^{-2}]$
(খ) $[M^2LT^{-1}]$
(গ) $[ML^{-2}]$
(ঘ) $[ML^2T^2]$

৭৪। কোনো স্প্রিংকে 5 N বল দ্বারা টেনে 10 m প্রসারিত করা হলে, স্প্রিং ধ্রুবক কত হবে? [চ. বো. ২০১৯]

(ক) 0·5 Nm^{-1}
(খ) 2 Nm^{-1}
(গ) 50 Nm^{-1}
(ঘ) 250 Nm^{-1}

৭৫। স্প্রিংকে প্রসারিত করলে এর মধ্যে কোন ধরনের শক্তি সঞ্চিত হয়? [চ. বো. ২০২৩; কু. বো. ২০২২; সি. বো. ২০২২; ব. বো. ২০১৯; সকল বোর্ড, ২০১৮; Admission Test : JU 2021-22; RU-C 2021-22]

(ক) বিভবশক্তি
(খ) গতিশক্তি
(গ) রাসায়নিক শক্তি
(ঘ) তাপ শক্তি

৭৬। 20 kg ভরের একটি স্থির বস্তুকে ঘর্ষণহীন তলের ওপর দিয়ে 10 ms^{-1} বেগে গতিশীল করতে কৃত কাজ কত? [দি. বো. ২০১৯]

(ক) 200 J
(খ) 1000 J
(গ) 2000 J
(ঘ) 4000 J

৭৭। কোনো বস্তুর গতিশক্তি 300% বৃদ্ধি করা হলে উক্ত বস্তুর ভরবেগ কত বাড়বে—
[Dental 2021-22; BUET 2008-09]

(ক) 100%
(খ) 150%
(গ) 200%
(ঘ) 300%

৭৮। ইলেকট্রন ভোল্ট নিচের কোনটির একক?
[CU 2023-24; Dental 2020-21]

(ক) প্রাবল্য
(খ) প্রবাহ
(গ) আধান
(ঘ) কাজ

৭৯। কোনো বস্তুর ভরবেগ দ্বিগুণ করা হলে উহার গতিশক্তি হবে কোনটি?
[Medical 2023-24; AFMC 2021-22]

(ক) দুই গুণ হবে
(খ) একই হবে
(গ) চার গুণ হবে
(ঘ) অর্ধেক হবে

৮০। 500 g ভরের একটি কণার উপর $(6x^2 - 4x)$ N বল ক্রিয়া করায় বস্তুটি বলের দিকে $x = 0$ অবস্থান হতে $x = 2$ অবস্থানে সরে গেলে বলের দ্বারা কৃত কাজের পরিমাণ কত? [GST 2022-23]

ⓚ 8
ⓚh 6
ⓖ 4
ⓖh 2

৮১। একটি রাবার ব্যান্ডকে টেনে এর দৈর্ঘ্য x পরিমাণে বৃদ্ধি করলে, রাবার ব্যান্ডে সৃষ্ট প্রত্যাবর্তী বল হলো $F = ax + bx^2$ (এখানে a এবং b ধ্রুবক)। রাবার ব্যান্ডটিকে $x = 0$ থেকে $x = L$ পর্যন্ত বৃদ্ধি করতে কৃত কাজের মান কত? [DU 2021-22]

ⓚ $aL^2 + bLx^3$
ⓚh $aL^2/2 + 2aL^2$
ⓖ $a + 2bL$
ⓖh $aL^2/2 + bL^3/3$

৮২। নিম্নের বস্তুসমূহের মধ্যে কোনটির গতিশক্তি বেশি? [RU-C 2022-23]

ⓚ ভর 3M এবং বেগ V
ⓚh ভর 3M এবং বেগ 2V
ⓖ ভর 2M এবং বেগ 3V
ⓖh ভর M এবং বেগ 4V

৮৩। m ও $3m$ ভরের দুটি বস্তুর গতিশক্তির অনুপাত 2 : 1 হলে তাদের রৈখিক ভরবেগের অনুপাত কত? [DU-7 2022-23]

ⓚ 2 : 3
ⓚh $1 : \sqrt{3}$
ⓖ $\sqrt{2} : \sqrt{3}$
ⓖh $\sqrt{3} : \sqrt{2}$

৮৪। একটি দালাল 10 তলা উচু যার প্রতিটি তলার উচ্চতা 4 মিটার। একটি বস্তু দালানটির ছাদ থেকে নিচের দিকে পড়ে কিন্তু দ্বিতীয় তলায় আটকে যায়। বস্তুর মোট শক্তির পরিমাণ কত হবে? [JU-A 2022-23]

ⓚ গতিশক্তি
ⓚh স্থিতিশক্তি
ⓖ গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি
ⓖh গতিশক্তি, স্থিতিশক্তি ও বস্তু হারানো শক্তি

৮৫। স্প্রিংকে প্রসারিত করলে এর মধ্যে কোন ধরনের শক্তি সঞ্চিত হয়? [Medical 2023-24]

ⓚ তাপশক্তি
ⓚh রাসায়নিক শক্তি
ⓖ বিভবশক্তি
ⓖh গতিশক্তি

৮৬। 10g একটি ভর ঘর্ষণহীন একটি অনুভূমিক তলের ওপর দিয়ে গিয়ে দেওয়ালের সাথে সংযুক্ত একটি অনুভূমিক স্প্রিংকে 6 ms^{-1} বেগে আঘাত করে। যদি স্প্রিংটির স্প্রিং ধ্রুবক 400 Nm^{-1} হয় তাহলে এটিতে সর্বোচ্চ সংকোচন কত হবে? [DU 2023-24]

ⓚ 0.3 cm
ⓚh $\frac{3}{\sqrt{10}}$ cm
ⓖ 3 cm
ⓖh 0.9 cm

৮৭। একটি কণা $t = 0$ সময়ে স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে। কণাটির ওপর প্রযুক্তি লব্ধি বল, সময় t এর সমানুপাতিক। কণাটির স্থিতিশক্তি নিচের কোনটির সমানুপাতিক? [DU 2022-23]

ⓚ t^2
ⓚh t^3
ⓖ $\sqrt{t}$
ⓖh t^4

৮৮। 10m উচ্চতা থেকে 10kg ভরের একটি হাতুড়ি পেরেকে আঘাতপ্রাপ্ত হয়ে 5 cm নিচে ঢুকে গেল। মাটির গড় বাধাদানকারী বল কত? [BUET 2022-23]

ⓚ 19698 N
ⓚh 2000 N
ⓖ 19968 N
ⓖh 19869 N

৮৯। 3m ব্যাস ও 5m উচ্চতাবিশিষ্ট একটি সিলিন্ডারকে শোয়ানো অবস্থা থেকে খাড়া করতে কৃত কাজ কত? [BUET 2022-23]

ⓚ 40 J
ⓚh 49 J
ⓖ 98 J
ⓖh 147 J

৯০। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা 20 m এবং ব্যাস 2m। কুয়াটিকে পানি শূন্য করতে 5 HP এর একটি পাম্প লাগানো হলো। অর্ধেক পানি তোলার পর পাম্পটি নষ্ট হয়ে গেল। বাকি পানি তোলার জন্য একই ক্ষমতার আর একটি পাম্প লাগানো হলো। প্রথম পাম্প দ্বারা কৃত কাজের পরিমাণ কত? [CKRUET 2022-23]

ⓚ 2.54×10^6 J
ⓚh 1.44×10^6 J
ⓖ 2.34×10^6 J
ⓖh 1.54×10^6 J
(ঙ) 1.54×10^7 J

৯১। 900 kg ভরের একটি লিফট 350 kg ভর নিয়ে 100s সময়ে নিচতলা হতে 18th ফ্লোরে 75m উচ্চতায় আরোহন করে। লিফটের প্রয়োগিক ক্ষমতা কত? [CKRUET 2021-22]
ⓚ 9.100 kW
ⓚ 7.500 kW
ⓖ 9.187 kW
ⓖ 10.210 kW
(ঙ) 9.180 kW

৯২। একটি মোটর প্রতিমিনিটে 60 L পানি 100m উঁচু ছাদে তোলে। মোটরটির কর্মদক্ষতা 70% হলে ক্ষমতা কত? [BUET 2021-22]
ⓚ 1400 W
ⓚ 0.14 kW
ⓖ 14 MW
ⓖ 0.14 MW

৯৩। m ভরের বস্তুকে 'v' বেগে ওপরে ওঠানো হচ্ছে। প্রযুক্ত ক্ষমতা কত? [BUET 2022-22]
ⓚ mv
ⓚ mgv
ⓖ $\frac{mg}{v}$
ⓖ $\frac{mv^2}{2g}$

৯৪। 1 cm পুরুত্বের এবং 200 gm ভরের মিটার স্কেলকে 1 m অনুভূমিক অবস্থা থেকে খাড়া করলে বিভবশক্তি কত হবে? [BAR 2016-17]
ⓚ 19.605 J
ⓚ 1.960 J
ⓖ 1.940 J
ⓖ 0.970 J

৯৫। 0.5 kg ভরের এক টুকরা শিলা 1.5 km উচ্চতায় মেঘ হতে ভূমিতে পতিত হলো। ভূমি স্পর্শ করার মুহূর্তে তার গতিশক্তি কত?
ⓚ 4900 J
ⓚ 7350 J
ⓖ 14700 J
ⓖ 2450 J

৯৬। নিচের কোনটি শক্তির একক নয়? [য. বো. ২০২৪]
ⓚ N-m
ⓚ kW-h
ⓖ J
ⓖ $N\text{-}m^{-2}$

৯৭। কোনো একটি বস্তু কণার গতিশক্তি (E_k) ও ভরবেগ (P) এর মধ্যকার লেখচিত্র একটি— [য. বো. ২০২২]
ⓚ পরাবৃত্ত
ⓚ আয়তকার অধিবৃত্ত
ⓖ সরলরেখা
ⓖ উপবৃত্ত

৯৮। একটি বুলেট একটি তক্তাকে কেবল ভেদ করতে পারে। বেগ 100% বৃদ্ধি করলে অনুরূপ কয়টি তক্তা ভেদ করতে পারবে?
ⓚ 2
ⓚ 4
ⓖ 6
ⓖ 9

৯৯। গতিশীল বস্তুর বেগ দুই-তৃতীয়াংশ হলে গতিশক্তি কত গুণ হবে?
ⓚ $\frac{1}{9}$
ⓚ $\frac{2}{9}$
ⓖ $\frac{4}{9}$
ⓖ $\frac{16}{9}$

১০০। 450 gm ভরের একটি ঝুলান্ত বস্তুকে নিচে থেকে 50 gm ভরের একটি বুলেট দ্বারা আঘাত করা হলো। বস্তুটি 1.8 m উচ্চতায় উঠে যায় এবং বুলেটটি বস্তুটির ভেতর থেকে যায়। বুলেটের গতিবেগ কত? [CKRUET 2023-24]
ⓚ $59\ ms^{-1}$
ⓚ $42.4\ ms^{-1}$
ⓖ $60\ ms^{-1}$
ⓖ $50\ ms^{-1}$

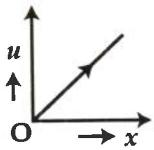
১০১। একটি 2 kg ভরের বস্তু 10m উচ্চতা থেকে পড়লে, ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি কত হবে? [Medical 2023-24]
ⓚ 95.0 J
ⓚ 74.4 J
ⓖ 19.6 J
ⓖ 39.2 J

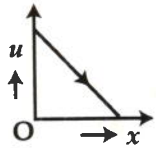
১০২। ক্ষমতা, বল ও বেগের মধ্যে সম্পর্ক হলো— [Dental 2023-24]
ⓚ P = FV
ⓚ F = PV
ⓖ V = PF
ⓖ $P = \frac{F}{V}$

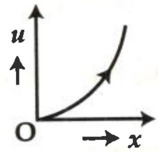
১০৩। নিচের কোনটি অসংরক্ষণশীল বল? [য. বো. ২০২৪; Medical 24-25]
ⓚ অভিকর্ষ বল
ⓚ স্প্রিং বল
ⓖ তড়িৎ বল
ⓖ সান্দ্র বল এবং ঘর্ষণ বল

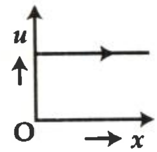
১০৪। 600 kg ভরের একটি বোঝা ক্রেনের সাহায্যে 0.1 ms^{-1} ধ্রুব বেগে ওঠানো হলো। ক্রেনটি কত ক্ষমতা প্রয়োগ করলে। [Dental 24-25]
ⓚ 1176 W
ⓚ 882 W
ⓖ 294 W
ⓖ 588 W

১০৫। আদর্শ স্প্রিং-এর জন্য বিভবশক্তি (u) এবং সম্প্রসারণ (x)-এর মধ্যকার লেখচিত্র কোনটি? [য. বো. ২০২৪]

ⓚ 

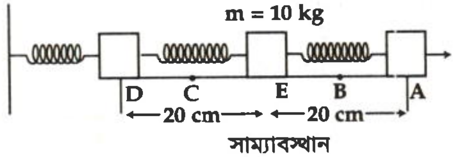
ⓚ 

ⓖ 

ⓖ 

নিচের উদ্দীপকের আলোক ১০৬ ও ১০৭নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

চিত্রে m ভরের বস্তুটি অনুভূমিক ঘর্ষণহীন তলে সরল ছন্দিত গতিতে স্পন্দিত হচ্ছে। $m = 10$ kg, স্প্রিং ধ্রুবক $= 30\ Nm^{-1}$ [রা. বো. ২০২৪]



১০৬। A বিন্দুতে ছেড়ে দেওয়ার পূর্ব মুহূর্তে বস্তুটির উপর স্প্রিং কর্তৃক প্রযুক্ত বল কত?

ⓚ 12 N
ⓚ 6 N
ⓖ 3 N
ⓖ 2 N

১০৭। কোন অবস্থানে বস্তুটির ত্বরণ সবচেয়ে বেশি?

ⓚ A অবস্থানে
ⓚ B অবস্থানে
ⓖ C অবস্থানে
ⓖ E অবস্থানে

উত্তর :

১। (ক)	২। (ঘ)	৩। (ক)	৪। (ঘ)	৫। (ক)	৬। (ক)	৭। (ক)	৮। (ক)	৯। (ক)	১০। (খ)
১১। (ক)	১২। (খ)	১৩। (গ)	১৪। (খ)	১৫। (ঘ)	১৬। (ক)	১৭। (গ)	১৮। (ঘ)	১৯। (খ)	২০। (গ)
২১। (ক)	২২। (খ)	২৩। (গ)	২৪। (খ)	২৫। (ক)	২৬। (খ)	২৭। (খ)	২৮। (গ)	২৯। (খ)	৩০। (ক)
৩১। (খ)	৩২। (খ)	৩৩। (গ)	৩৪। (ক)	৩৫। (গ)	৩৬। (ক)	৩৭। (ক)	৩৮। (ঘ)	৩৯। (গ)	৪০। (ক)
৪১। (ক)	৪২। (খ)	৪৩। (গ)	৪৪। (ক)	৪৫। (খ)	৪৬। (ক)	৪৭। (খ)	৪৮। (গ)	৪৯। (খ)	৫০। (গ)
৫১। (ঘ)	৫২। (ঘ)	৫৩। (গ)	৫৪। (গ)	৫৫। (ক)	৫৬। (খ)	৫৭। (গ)	৫৮। (গ)	৫৯। (খ)·	৬০। (ক)
৬১। (ক)	৬২। (ক)	৬৩। (গ)	৬৪। (খ)	৬৫। (গ)	৬৬। (ক)	৬৭। (ঘ)	৬৮। (ঘ)	৬৯। (খ)	৭০। (ক)
৭১। (ক)	৭২। (গ)	৭৩। (ক)	৭৪। (ক)	৭৫। (ক)	৭৬। (খ)	৭৭। (ক)	৭৮। (ঘ)	৭৯। (গ)	৮০। (ক)
৮১। (ঘ)	৮২। (গ)	৮৩। (গ)	৮৪। (ঘ)	৮৫। (গ)	৮৬। (গ)	৮৭। (ঘ)	৮৮। (ক)	৮৯। (খ)	৯০। (ঘ)
৯১। (গ)	৯২। (ক)	৯৩। (খ)	৯৪। (ঘ)	৯৫। (খ)	৯৬। (ঘ)	৯৭। (ক)	৯৮। (খ)	৯৯। (গ)	১০০। (গ)
১০১। (গ)	১০২। (ক)	১০৩। (ঘ)	১০৪। (ঘ)	১০৫। (গ)	১০৬। (ক)	১০৭। (ক)			

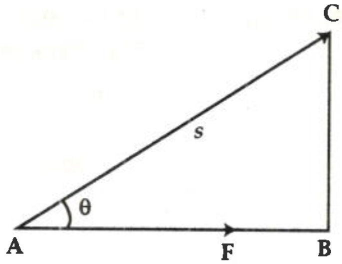
(খ) সৃজনশীল প্রশ্ন

১। এক ব্যক্তি 30 m উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বিল্ডিংয়ের ছাদ থেকে m ভরের একটি বস্তুকে নিচে ফেলে দিল। ধরা যাক বস্তুটি বাধাহীনভাবে নিচে পড়ল।

(ক) বস্তুটির ভর 20 g হলে ভূপৃষ্ঠ স্পর্শ করার পূব মুহূর্তে এর গতিশক্তি কত হবে ?

(খ) উদ্দীপকে বস্তুটি যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা মেনে চলে কি ? যুক্তি উপস্থাপন করে ব্যাখ্যা কর।

২। A বিন্দুতে কোনো বস্তুর ওপর AB অভিমুখে F পরিমাণ বল প্রয়োগ করায় বস্তুটি বলের অভিমুখের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে s পরিমাণ দূরত্বে সরে C বিন্দুতে পৌঁছাল।



(ক) F = 20 N, s = 50 m এবং কৃত কাজের পরিমাণ 500 J হলে F ও s-এর অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

(খ) θ-এর মান কীরূপ হলে বলের দ্বারা কাজ ও বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়—বিশ্লেষণ কর।

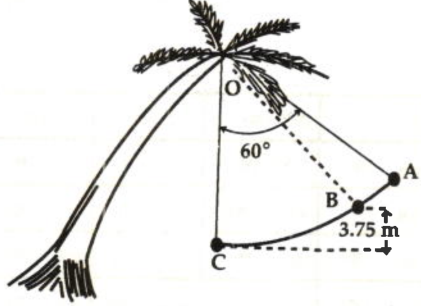
৩। নিতু মেলা থেকে স্প্রিং লাগানো একটি খেলনা গাড়ি কিনে আনল। স্প্রিং-এ দম দিয়ে সে গাড়িটি ছেড়ে দিল এবং গাড়িটি কিছুদূর গিয়ে থেমে গেল।

(ক) উল্লম্বভাবে ঝুলন্ত একটি স্প্রিং-এর নিচের প্রান্তে 500 g ভর যুক্ত করায় স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য 0·15 m বৃদ্ধি পেল। সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ বের কর।

(খ) স্প্রিংটির স্প্রিং ধ্রুবক 100 Nm^{-1} হলে দেখাও যে, স্প্রিংটির মুক্ত প্রান্তে সমপরিমাণ প্রসারণ ও সংকোচনে স্প্রিং বলের বিরুদ্ধে একই পরিমাণ কাজ করতে হয়।

৪। 2 kg ভরের একটি বস্তুকে 10 m সুতার সাহায্যে O বিন্দুতে ঝুলানো হলো এবং A বিন্দু থেকে স্বাধীনভাবে দুলতে দেওয়া হলো। ঘর্ষণ ও বায়ুজনিত বাধা অগ্রাহ্য কর।

$g = 10\ ms^{-2}$



(ক) দোলন অবস্থায় A বিন্দুতে সুতার টান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে C বিন্দুতে বস্তুর গতিশক্তি B বিন্দুর গতিশক্তি অপেক্ষা ভিন্ন হবে কী? প্রয়োজনীয় গাণিতিক বিশ্লেষণসহ তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও। [ঢা. বো. ২০১৬]

৫। নিচের ছকে 10 g ভরের একটি গতিশীল কণার সময়ের সাপেক্ষে বেগ ও সরণ দেখানো হলো :

$t(s)$	0	2	4	6	8	10
$v\ (ms^{-1})$	2	6	10	14	18	22
s (m)	0	8	22	48	80	120

(ক) উদ্দীপকের কণাটির নবম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) কণাটির 6 সেকেন্ডে সম্পাদিত কাজ এবং 6তম সেকেন্ডে সম্পাদিত কাজ একই কি না—বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [চ. বো. ২০১৭]

৬। দুটি সমান 5 kg ভরের বস্তুকে A বিন্দুতে স্থির অবস্থায় রেখে একই সাথে শুধু অভিকর্ষীয় বলের প্রভাবে একটিকে AB এবং অন্যটিকে AC পথে পড়তে দেওয়া হলো। BC তলের ওপর AD লম্ব। AB আনত তলের দৈর্ঘ্য 300 মিটার।

(ক) চিত্রে উল্লেখিত ভরের বস্তুকে A হতে B বিন্দুতে আনতে অভিকর্ষীয় বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

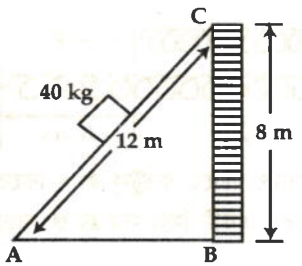
(খ) AB ও AC পথে পড়তে দেওয়ায় 58 সেকেন্ড পরে বেগের পরিবর্তন ব্যাখ্যা কর। [মাদরাসা বোর্ড ২০১৭]

৭। প্রতি তালার উচ্চতা 5 m হিসেবে 10 তলা ভবনের সর্বোচ্চ তলায় বসবাসরত একটি পরিবারে একটি শিশু আছে। শিশুটি বারান্দার গ্রিল দিয়ে 100 gm ভরের একটি টেনিস বল ছেড়ে দিলে তা কিছুক্ষণের মধ্যে মাটিতে আঘাত করে।

(ক) উদ্দীপকে উল্লেখিত টেনিস বলটি কত সময় পরে মাটিতে আঘাত করবে ?

(খ) ভবনটির ৭ম ও ৪র্থ তলায় বলটির মোট শক্তি উদ্দীপকের তথ্য ব্যবহার করে গণনা করলে তা শক্তির সংরক্ষণ সূত্র মেনে চলবে—এ উক্তিটির সত্যতা যাচাই করে তোমার মতামত দাও। [অভিন্ন বোর্ড, ২০১৮]

৮।

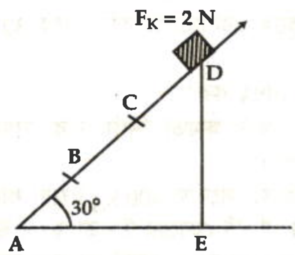


চিত্রে 40 kg ভরের একটি বস্তুকে ভূমি হতে 8 মিটার উঁচু ভবনের ছাদে ওঠাতে 12 m লম্বা মসৃণ আনত তল ব্যবহার করা হলো।

(ক) AC তল বেয়ে বস্তুটিকে ওপরে ওঠাতে কৃত কাজের পরিমাণ বের কর।

(খ) AC ও BC-এর মধ্যে কোন পথে বস্তুটিকে কম বল প্রয়োগে C বিন্দুতে ওঠানো যাবে? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও। [মাদরাসা বোর্ড ২০১৮]

৯।



m ভরের একটি বস্তু DA আনত তলে পড়ছে। এখানে $m = 50$ kg, DE = 6m এবং AB = BC = CD।

(ক) আনত তল বেয়ে নামার সময় গতীয় ঘর্ষণ বল দ্বারা কৃত কাজের মান নির্ণয় কর।

(খ) B ও C বিন্দুতে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা প্রতিফলিত হয়েছে কী? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।

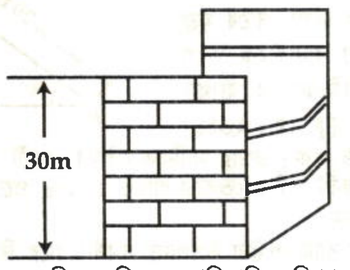
[য. বো. ২০১৯]

১০। সীমা 18 kg ভরের একটি ব্যাগ নিয়ে 50 m উঁচু একটি বিল্ডিং-এ ওঠার পর ছাদ থেকে ব্যাগটি পড়ে গেলে সেটি 'h' উচ্চতায় পাশের বিল্ডিং-এর ছাদে 24.25 ms^{-1} বেগে পড়ল।

(গ) উদ্দীপকের 'h'-এর মান নির্ণয় কর।

(ঘ) 'h' উচ্চতায় বিভব শক্তি গতিশক্তির সমান হবে কি না? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০১৯]

১১। লোহাগড়া আদর্শ কলেজের বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র রাফি তার কলেজের 30 m উচ্চতাবিশিষ্ট সাইন্স বিল্ডিংয়ের ছাদ থেকে কৌতূহলবশত 1 kg ভরের একটি পাথর নিচে ফেলে দিল। পাথরটি নিচে পড়াকালীন তার শক্তির নিত্যতার সূত্র স্মরণ হলো।



(ক) ভূমি থেকে কত উচ্চতায় পাথরের বিভবশক্তি এর গতিশক্তির দ্বিগুণ ?

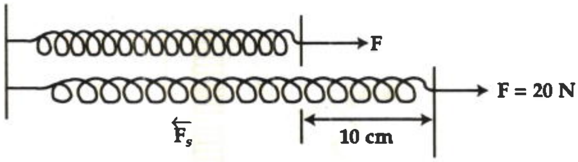
(খ) রাফি কীভাবে শক্তির নিত্যতার সূত্র প্রমাণ করবে ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

১২। জীবন 25 kg ভরের একটি বস্তুকে খাড়া 2 m ওপরে তুলল। জীবন বস্তুটিকে 30° কোণে হেলানো একটি মসৃণ তলের ওপর দিয়ে ঠেলে সমবেগে 2 m ওপরে তুলল।

(ক) দেখাও যে, বস্তুটিকে তুলতে উভয়কে সমপরিমাণ কাজ করতে হবে।

(খ) বস্তু ও হেলানো তলের ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0·2 হলে জীবনকে কী পরিমাণ কাজ করতে হবে ? —গাণিতিকভাবে মতামত দাও।

১৩।



(ক) উদ্দীপকে স্প্রিংটিকে 5 cm প্রসারণ ঘটাতে কতটুকু কাজ করতে হবে?

(খ) উদ্দীপকের স্প্রিং-এর সাথে আরও একটি স্প্রিং সমান্তরালে সংযুক্ত করে 15 cm প্রসারণের জন্য কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৪। সোহাগ তাদের বাসার ভূগর্ভস্থ একটি ট্যাংক থেকে পানি ছাদের ওপর উঠানোর জন্য একটি 10 kW ক্ষমতাসম্পন্ন পাম্প ব্যবহার করে। ট্যাঙ্কটির দৈর্ঘ্য 4 m, প্রস্থ 3 m এবং গভীরতা 4 m। ট্যাংকটির দুই তৃতীয়াংশ পানি দ্বারা পূর্ণ। ভূপৃষ্ঠ হতে ছাদের উচ্চতা 25 m। পাম্পটির দক্ষতা 70%।

(ক) ভূগর্ভস্থ ট্যাঙ্ক থেকে 10 kg পানি ছাদে উঠাতে কত শক্তি ব্যয় করতে হবে?

(খ) ট্যাঙ্কটির পানি ছাদে তুলতে কত সময় লাগবে এবং উক্ত সময়ে পানি শূন্য করতে পাম্পটির ক্ষমতা অর্ধেক হওয়া প্রয়োজন কি না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে দেখাও।

১৫। একটি ইঞ্জিন 80 kg ভরের একটি বস্তুকে এক মিনিটে ভূমি থেকে 30 m উচ্চতায় উঠাতে পারে। উল্লেখ্য ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 25% নষ্ট হয়।

(ক) ইঞ্জিনটি দ্বারা কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত ইঞ্জিনটির মোট ক্ষমতা নির্ণয় করা সম্ভব কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

১৬। একটি সুউচ্চ অফিস বিল্ডিং-এ আরোহীসহ সর্বোচ্চ 400 kg ভরের ধারণ ক্ষমতাসম্পন্ন একটি লিফট দুইতলা হতে সাততলার মধ্যে ওঠা-নামা করে। বিল্ডিংটির প্রতিটি ফ্লোরের উচ্চতা 3m। উক্ত অফিসের একজনের ভর 45 kg এবং তিনি একদিন লিফটিতে চড়ে $2\ ms^{-2}$ ত্বরণে উঠানামার সময় ওয়েট মেশিনে তার ওজন পরিমাপ করলেন। এক্ষেত্রে সর্বত্র অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $9·8\ ms^{-2}$।

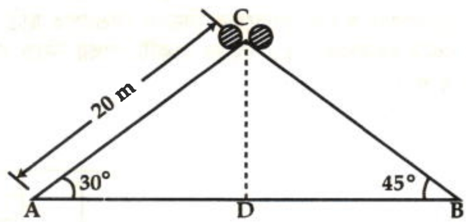
(ক) লিফটিকে দুইতলা হতে সাততলায় $2\ ms^{-1}$ সমবেগে উঠাতে সর্বনিম্ন কত অশ্ব ক্ষমতার একটি মোটরের প্রয়োজন হবে?

(খ) উক্ত ব্যক্তির ওজন ওয়েট মেশিনের সাহায্যে সেদিন সঠিকভাবে নির্ণয় করা গেল কি না তা গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০১৭]

১৭। নিচের চিত্রে দুটি হেলানো তল AC ও BC-এর শীর্ষবিন্দু C-এর উভয় পাশে 2 kg ভরের দুটি লোহার গোলকের অবস্থান দেখানো হলো। AC তলের দৈর্ঘ্য 20 m।

(ক) C বিন্দুতে গোলক দুটির মোট শক্তি নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের গোলক দুটিকে একই সাথে মুক্ত করলে একই সময়ে AB অনুভূমিক তলে পৌঁছাবে কি না তা গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৯]



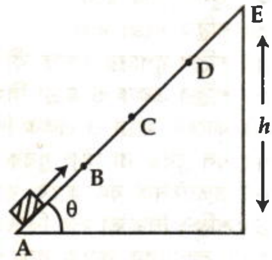
১৮। 4 kg ভরের একটি শক্ত পাথর খণ্ড একই ভরের মাটিতে পোঁতা একটি লোহার রডের ওপর 5 m উঁচু কোনো স্থান থেকে খাড়াভাবে পড়ল। ফলে লোহার রডটি মাটির ভেতরে আরও 10 cm প্রবেশ করল।

(ক) মাটির গড় প্রতিরোধ বল কত ?

(খ) উদ্দীপকের বর্ণিত ঘটনাটি কাজ-শক্তির উপপাদ্য সমর্থন করে কি ? গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

[সি. বো. ২০১৯]

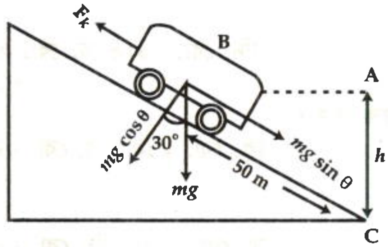
১৯। 300 g ভরের একটি বস্তু অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে রক্ষিত হলে 5·88 J গতিশক্তি প্রয়োগে A থেকে E বিন্দুতে ঘর্ষণহীনভাবে ঠিক পৌঁছে যায়। পরক্ষণে বস্তুটি E বিন্দু থেকে উক্ত তল বরাবর A-এর দিকে পড়তে থাকে। চিত্র অনুযায়ী AB = BC = CD = DE



(ক) আনত তল AE-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) বস্তুটি উল্লিখিত তল বরাবর পড়ার সময় যান্ত্রিক শক্তির সংরক্ষণ সূত্র মেনে চলে—এর যথার্থতা D ও C বিন্দুতে গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণের মাধ্যমে মূল্যায়ন কর। [কু. বো. ২০১৫]

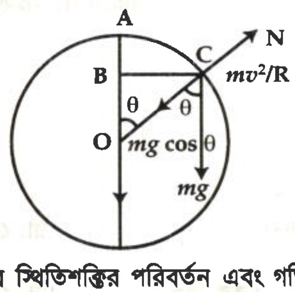
২০। সফিক 1500 kg ভরের একটি গাড়ি নিয়ে পাহাড়ি রাস্তায় চলছে, যা ভূমির সাথে 30° কোণে আনত। গাড়িটির বেগ 25 ms^{-1}। সামনে একটি গাড়ি দেখে গাড়িটি 50 m দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে গেল।



(ক) গাড়িটির ওপর ক্রিয়াশীল ঘর্ষণ বল কত হবে?

(খ) এক্ষেত্রে গাড়িটি শক্তির সংরক্ষণশীলতা নীতি মেনে চলে কি না—বিশ্লেষণ কর।

২১। R ব্যাসার্ধের একটি গোলকের শীর্ষ বিন্দু থেকে m ভরের একটি ক্ষুদ্র বস্তু গোলকের গা বেয়ে গড়িয়ে পড়ছে। ধর শীর্ষ বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি শূন্য।



(ক) কৌণিক সরণের সঙ্গে বস্তুর স্থিতিশক্তির পরিবর্তন এবং গতিবেগের পরিবর্তন নির্ণয় কর।

(খ) বস্তুর কৌণিক সরণ কত হলে এটি গোলকের পৃষ্ঠ থেকে বিচ্ছিন্ন হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও।

২২। সোহেল সাহেব ভূগর্ভস্থ রিজার্ভ ট্যাংক হতে বিল্ডিং-এর ছাদে সম্পূর্ণ পানি উঠানোর জন্য 1·2 kW ক্ষমতার একটা পাম্প ক্রয় করলেন। পাম্পটির গায়ে কর্মদক্ষতা 90% লেখা আছে। ট্যাংকটি সিলিন্ডার আকৃতির এবং ব্যাস 2m ও উচ্চতা 4 m। ট্যাংক হতে ছাদের উচ্চতা 28m।

(ক) পানির পাম্পটি দৈনিক সর্বোচ্চ কী পরিমাণ কাজ করতে পারবে ?

(খ) পাম্পটি ক্রয় করা সঠিক ছিল কি না ? —গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

২৩। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা 12 m এবং ব্যাস 3 m। কুয়াটিকে 22 মিনিটে পানিশূন্য করতে 6 HP-এর একটি পাম্প লাগানো হলো। অর্ধেক পানি শূন্য করার পর পাম্পটি নষ্ট হওয়ায় অন্য একটি পাম্পের সাহায্যে পূর্ব নির্ধারিত সময়ে কুয়াটিকে পানিশূন্য করা হলো।

(ক) প্রথম পাম্পটি কত সময় পর নষ্ট হয়েছিল ?

(খ) পাম্প দুটির ক্ষমতার তারতম্য গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০২১]

(গ) সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন

১। কাজ বলতে কী বোঝ?
২। জুল কাকে বলে?
৩। শক্তির সংজ্ঞা দাও। [কু. বো. ২০২৩]
৪। শক্তির রূপান্তর বলতে কী বোঝ?
৫। শক্তির একক ও মাত্রা লিখ।
৬। কাজের মাত্রা ও একক লিখ।
৭। বল ধ্রুবক বা স্প্রিং ধ্রুবক কাকে বলে? [সি. বো. ২০২৩; দি. বো. ২০১৭]
৮। প্রত্যায়নক বল কাকে বলে? [ঢা. বো. ২০২৩; ব. বো. ২০১৯]
৯। শক্তির নিত্যতা সূত্র বিবৃত কর।
১০। বল ধ্রুবক কাকে বলে? [সি. বো. ২০২৩; ঢা. বো. ২০১৬]
১১। ক্ষমতা কাকে বলে? [ম. বো. ২০২১; কু. বো. ২০১৯; ব. বো. ২০১৬; মাদরাসা বো. ২০১৮]
১২। কাজ শক্তির উপপাদ্যটি লেখ। [চ. বো. ২০২৩; য. বো. ২০২০, ২০১৯; সি. বো. ২০১৬; অভিন্ন বো. ২০১৮]
১৩। কর্মদক্ষতা কাকে বলে? [দি. বো. ২০২৩; চ. বো. ২০২২; ম. বো. ২০২২; য. বো. ২০২১; ব. বো. ২০২১; সি. বো. ২০২১, ২০১৬]
১৪। যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা কাকে বলে? [য. বো. ২০১৭]
১৫। অশ্ব ক্ষমতা কাকে বলে? [কু. বো. ২০২২; ব. বো. ২০২২; সি. বো. ২০২২; চ. বো. ২০১৭; দি. বো. ২০১৭; অভিন্ন বো. ২০১৮]
১৬। বল ধ্রুবকের সংজ্ঞা দাও। [দি. বো. ২০১৭]
১৭। স্প্রিং ধ্রুবক কাকে বলে? [য. বো. ২০২৩; দি. বো. ২০২২; ঢা. বো. ২০১৯; রা. বো. ২০১৯; চ. বো. ২০১৯; দি. বো. ২০১৯]
১৮। অসংরক্ষণশীল বল কাকে বলে? [সি. বো. ২০২৩; ঢা. বো. ২০২২; রা. বো. ২০২২; য. বো. ২০২২; দি. বো. ২০২২; য. বো. ২০১৯; মাদরাসা বো. ২০২২]
১৯। স্প্রিং বল কী? [সি. বো. ২০১৯]
২০। সংরক্ষণশীল বল কাকে বলে? [রা. বো. ২০২৩, ২০১৯; ম. বো. ২০২৩; কু. বো. ২০২১; দি. বো. ২০২১; ঢা. বো. ২০১৯, ২০১৭]
২১। ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ লেখ। [রা. বো. ২০১৯]
২২। ঋণাত্মক কাজ কী? [সি. বো. ২০২১]
২৩। যান্ত্রিক শক্তি কী? [কু. বো. ২০২৩]
২৪। পরিবর্তনশীল বল কাকে বলে? [ব. বো. ২০২৩]
২৫। ক্ষমতার একক ও মাত্রা লিখ। [রা. বো. ২০২১]
২৬। সংরক্ষণশীল বল বলতে কী বোঝ? [রা. বো. ২০২৩, ২০২১; ম. বো. ২০২৩, ২০২১; ঢা. বো. ২০২১, ২০১৭; দি. বো. ২০২১]
২৭। কর্মদক্ষতা বলতে কী বোঝ? এর একক লিখ। [দি. বো. ২০২৩; য. বো. ২০২১; চ. বো. ২০২১; সি. বো. ২০২১; ব. বো. ২০২১]
২৮। অভিকর্ষ বল কাকে বলে?
২৯। কাজ–শক্তি উপপাদ্যটি লিখ। [য. বো. ২০২১, ২০১৯, ২০১৮; ঢা. বো. ২০১৮; রা. বো. ২০১৮; সি. বো. ২০১৮; দি. বো. ২০১৮]
৩০। স্থিতিশক্তি কাকে বলে?
৩১। গতিশক্তি কী?
৩২। অভিকর্ষীয় বিভবশক্তি বলতে কী বোঝ?
৩৩। স্থিতিস্থাপক বিভবশক্তি কী?
৩৪। স্প্রিং ধ্রুবক কাকে বলে ? [ম. বো. ২০২৩; ঢা. বো. ২০২১; কু. বো. ২০১৫]

(ঘ) কাঠামোবদ্ধ ও বর্ণনামূলক প্রশ্ন

১। কাজ বলতে কী বুঝ? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।
২। ভেক্টর সমীকরণ ব্যবহার করে কাজের সংজ্ঞা দাও।
৩। বলের দ্বারা কাজ ও বলের বিরুদ্ধে কাজ বলতে কী বুঝ? [সি. বো. ২০১৫]

৪। স্থির বল দ্বারা কৃত কাজের রাশিমালা নির্ণয় কর।

৫। পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজের রাশিমালা নির্ণয় কর।

৬। বল–সরণ লেখচিত্রের সাহায্যে পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কৃত কাজের রাশিমালা প্রতিপাদন কর।

৭। একটি স্প্রিং-এ বলের বিপরীতে কাজের রাশিমালা বের কর।

৮। গতিশক্তি কি ঋণাত্মক হতে পারে ? ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০১৫]

৯। একটি স্প্রিং এর স্প্রিং ধ্রুবক $2.5\ Nm^{-1}$ বলতে কী বোঝ ? [য. বো. ২০২২; ২০১৫; ব. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন)]

১০। গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি বলতে কী বুঝ? উদাহরণ দাও।

১১। m ভরের একটি বস্তু v বেগে গতিশীল হলে এর গতিশক্তি নির্ণয় কর।

১২। গতিশক্তির সাথে ভরবেগের সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর। [ঢা. বো. ২০২১]

১৩। কাজ-শক্তি উপপাদ্য বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০১৯, ২০১৫; ব. বো. ২০১৫; অভিন্ন প্রশ্ন ক–সেট, ২০১৮]

১৪। বল ও সরণ ভেক্টর রাশি হওয়া সত্ত্বেও কাজ স্কেলার রাশি কেন ব্যাখ্যা কর। [অভিন্ন প্রশ্ন ক–সেট, ২০১৮]

১৫। পৃথিবী সূর্যের চারদিকে ঘুরছে; কিন্তু কোনো কাজ করছে না কেন ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০২১]
অথবা, বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল একটি বস্তুর দ্বারা কৃত কাজ শূন্য—ব্যাখ্যা কর। [ম. বো. ২০২১; ব. বো. ২০১৭]

১৬। ধনাত্মক কাজ, শূন্য কাজ এবং ঋণাত্মক কাজ ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০২১; সি. বো. ২০২১]

১৭। অভিকর্ষ বল সংরক্ষণশীল বল কেন ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০২২; কু. বো. ২০১৮; চ. বো. ২০১৮; ব. বো. ২০১৮; ঢা. বো. ২০১৬; য. বো. ২০১৫; দি. বো. ২০১৬; অভিন্ন প্রশ্ন ক–সেট, ২০১৮]

১৮। ঘর্ষণ বল একটি অসংরক্ষণশীল বল কেন ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০২৩; ঢা. বো. ২০২১; সি. বো. ২০২১; চ. বো. ২০১৬; দি. বো. ২০১৬; অভিন্ন প্রশ্ন ক–সেট, ২০১৮]

১৯। মহাকর্ষ বিভবের মান ঋণাত্মক হয় কেন ব্যাখ্যা কর।

২০। কোনো বস্তুর শক্তি কি ঋণাত্মক হতে পারে? ব্যাখ্যা কর।

২১। একটি হাল্কা ও একটি ভারী বস্তুর ভরবেগ সমান হলে কোনটির গতিশক্তি বেশি হবে—ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০১৬]

২২। বলের দ্বারা কাজ বলতে কী বোঝায়? ব্যাখ্যা কর।

২৩। কোন সমীকরণ বল, ক্ষমতা ও বেগের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে?

২৪। অভিকর্ষীয় বিভব বা স্থিতিশক্তির রাশিমালা নির্ণয় কর।

২৫। একটি স্প্রিং–এর সংকোচন ও প্রসারণের জন্য বিভবশক্তির রাশিমালা নির্ণয় কর।

২৬। একটি উদাহরণ দাও যা শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে।

২৭। প্রমাণ কর যে সর্বাধিক উচ্চতায় উৎক্ষিপ্ত একটি বস্তু শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে।

২৮। দেখাও যে দোলায়মান একটি সরল দোলক শক্তির নিত্যতার সূত্র মেনে চলে।

২৯। কোনো যন্ত্রের ক্ষমতা 50 MW—ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০১৮; ঢা. বো. ২০১৮; রা. বো. ২০১৮; য. বো. ২০১৮; দি. বো. ২০১৮]

৩০। অশ্ব ক্ষমতা ও ওয়াটের সম্পর্ক লেখ।

৩১। অভিকর্ষজ বল অসংরক্ষণশীল বল নয়—ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০১৫]

৩২। একটি হাল্কা বস্তু ও একটি ভারী বস্তুর ভরবেগ সমান। কোনটির গতিশক্তি বেশি ?

৩৩। একটি হাল্কা বস্তু এবং একটি ভারী বস্তুর গতিশক্তি সমান। কোনটির ভরবেগ বেশি ?

৩৪। অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি কেবলমাত্র h-এর ওপর নির্ভর করে; কিন্তু পথের ওপর নির্ভর করে না কেন ? —ব্যাখ্যা কর।

৩৫। ক্ষমতা, বল ও বেগের মধ্যে সম্পর্কটি লিখ।

৩৬। কোনো বল দ্বারা কৃত কাজ কোন অবস্থায় ঋণাত্মক বা ধনাত্মক হয় ?

৩৭। দেখাও যে, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, যেখানে P ক্ষমতা, $\vec{F}$ বল ও $\vec{v}$ বেগ।

৩৮। দেখাও যে নততল বরাবর অবাধে পতনশীল বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তি ধ্রুবক থাকে।

৩৯। মহাকর্ষের অধীনে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে মোট যান্ত্রিক শক্তি সংরক্ষিত থাকে—প্রমাণ কর।

৪০। গতিশক্তির মাত্রা কী ?

৪১। স্থিতিস্থাপক সংঘাতের ক্ষেত্রে কোন রাশিগুলো ধ্রুবক থাকে ?

৪২। একটি চলমান বস্তুর ভরবেগ P এবং গতিশক্তি K। ওদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

৪৩। সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বলের পার্থক্য ব্যাখ্যা কর।

৪৪। ওপরে ওঠার সময় গ্যাস বেলুনের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি উভয়ই বৃদ্ধি পায়। এক্ষেত্রে শক্তির সংরক্ষণসূত্র প্রযোজ্য হয় কী ? ব্যাখ্যা কর।

৪৫। শক্তি ও কাজের একই একক হয় কেন ব্যাখ্যা কর।

৪৬। দুটি বিলিয়ার্ড বলের ধাক্কা ও দুটি গাড়ির ধাক্কার মধ্যে কোনটি স্থিতিস্থাপক ? ব্যাখ্যা কর।

৪৭। যদি কোনো বস্তুর ভরবেগ দ্বিগুণ করা হয় তবে গতিশক্তির কী পরিবর্তন হবে ?

৪৮। বল দ্বারা কাজ ও বলের বিরুদ্ধে কাজ ব্যাখ্যা কর।

৪৯। স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে কখন সর্বাধিক শক্তির বিনিময় হবে—ব্যাখ্যা কর।

৫০। স্থিতিস্থাপক ও অস্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ক্ষেত্রে কোন ভৌত রাশি সংরক্ষিত থাকে ?

৫১। স্প্রিংযুক্ত খেলনা গাড়িকে পেছন দিকে টেনে ছেড়ে দিলে গাড়িটি সামনের দিকে অগ্রসর হয় কেন ? ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০১৮; কু. বো. ২০১৬]

৫২। বল ধ্রুবক 2500 Nm^{-1} এর অর্থ ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০১৯]

৫৩। কোনো বস্তু কীভাবে স্থিতিশক্তি অর্জন করে। ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৯]

৫৪। 'বল ও সরণ শূন্য না হলেও কাজ শূন্য হতে পারে'—ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০২২; ব. বো. ২০২২]

(ঙ) কাজ (গাণিতিক সমস্যা)

১। 50 N বল কোনো স্প্রিংকে টেনে 20 cm বৃদ্ধি করে। স্প্রিংকে 8 cm প্রসারিত করলে কত কাজ সম্পন্ন হবে? [উ. 0·80 J]

২। একটি কণার ওপর $\vec{F} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল প্রয়োগ করলে কণাটির $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ হয়। বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ বের কর। [উ. 4 J]

৩। 200 N-এর বল প্রয়োগ করে কোনো বস্তুকে বলের অভিমুখে 300 m সরানো হলে কত কৃতকাজ সম্পন্ন হবে বের কর। [উ. 6×10^4 J]

৪। 250 N ওজনের একজন বালক খাড়া মই বেয়ে শীর্ষে উঠতে 2000 J কাজ সম্পন্ন করে। মইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উ. 8 m]

৫। একটি বরফ খণ্ডকে দড়ির সাহায্যে সম্পূর্ণ অনুভূমিক তলের ওপর 5 m দূরত্ব টেনে আনা হলো। দড়ির টান 10 N এবং দড়িটি উক্ত তলের সাথে 30° কোণে থাকলে কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [উ. 43·3 J]

৬। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে 5 km ওপরে কিছু মেঘ ভেসে আছে। ওই মেঘ বৃষ্টি রূপে নেমে এসে ভূপৃষ্ঠে 100 km^2 স্থানে 1 mm গভীরতার পানি সৃষ্টি করতে পারে। উক্ত পানিকে আবার কাজে পরিণত করতে কত কাজের প্রয়োজন ? [উ. 40×10^{11} J] [KUET Admission Test, 2015–16]

৭। Z-অক্ষ বরাবর চলনক্ষম একটি কণার ওপর স্থির বল, $\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ N বল প্রয়োগ করা হলো। Z-অক্ষ বরাবর 3 m সরণ হলে কণার ওপর কৃত কাজ কত ? [উ. 12 J]

৮। পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে দেখাও যে m ভরের একটি বস্তুকে ভূপৃষ্ঠ থেকে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R এর সমান উচ্চতায় তুলতে কৃত কাজের পরিমাণ হবে $\frac{1}{2} mg$R।

৯। একটি বস্তুকণা প্রাথমিক অবস্থান $\vec{r}_1 = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ থেকে $\vec{r}_2 = 4\hat{i} + 8\hat{j}$ অবস্থানে গেল, তখন ওই বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল ছিল $(12\hat{i} + 3\hat{j})$ N। কৃত কাজের মান নির্ণয় কর। [উ. 64 J]

১০। কোনো স্প্রিংকে 1 cm সংকুচিত করতে 32·4 N বল প্রয়োজন হলে সেটিকে 20 cm সংকুচিত করতে কতটা কাজ করতে হবে ? [উ. 64·8 J]

১১। 40 g ভরের একটি বুলেট 100 ms^{-1} বেগে একটি কাঠের ব্লককে আঘাত করে। কাঠের বাধা 3600 N হলে বুলেটটা ওই কাঠের ব্লকের মধ্যে কতটা প্রবেশ করবে ? [উ. 5·6 cm]

১২। 0·05 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 20 m উচ্চতা থেকে পড়ে নরম মাটির ভেতর 2 m ঢুকে থেমে গেল। মাটির গড় বিরুদ্ধ বল কত ? [উ. 5·39 N]

১৩। 2 kg ভরের একটি হাতুড়ি দেয়ালের সাথে অভিলম্বভাবে রক্ষিত একটি পেরেককে কত বেগে অনুভূমিকভাবে আঘাত করলে পেরেকটি 640 N বল প্রতিরোধ করে দেয়ালের ভিতর 0·025 m ঢুকে যাবে? [উ. 4 ms^{-1}]

১৪। স্থিরাবস্থায় থাকা 2 kg ভরের একটি বস্তু 5 m উচ্চতা থেকে একটি উল্লম্ব স্প্রিং-এর ওপর পড়ল। স্প্রিংটির বল ধ্রুবক 980 Nm^{-1} হলে স্প্রিংটি কতটা সংকুচিত হবে ? [উ. 44·7 cm]

১৫। 160 m উচ্চতা থেকে মাটিতে পানি পড়ে অনুভূমিকভাবে নির্দিষ্ট গতিবেগে গড়িয়ে যাচ্ছে। অন্য কোনোভাবে শক্তির অপচয় না হলে পানি কী বেগে গড়িয়ে যাবে ? [উ. 56 ms^{-1}]

১৬। 100 m উচ্চতা থেকে 5 kg ভর মুক্তভাবে অভিকর্ষের টানে পড়তে থাকলে, 4 s পরে ভরটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি কত হবে ? [উ. 3841·6 J ও 1058·6 J]
[RUET Admission Test, 2010–11]

১৭। একটি বল বায়ুতে 15 ms^{-1} বেগে যাচ্ছিল। বলটিকে একটি ব্যাট দিয়ে 20 ms^{-1} বেগে উল্টো দিকে ফেরত পাঠানো হলে যদি ওর গতিশক্তি 8·75 J পরিমাণ পরিবর্তিত হয়, তবে ওর ভরবেগের কী পরিমাণ পরিবর্তন হবে নির্ণয় কর। [উ. 3·5 $kgms^{-1}$]

১৮। 40 kg ভরের একটি ট্রলি 180J গতিশক্তিসহ একটি মসৃণ অনুভূমিক রাস্তায় চলাকালে এর মধ্যে 20 kg ভরের একটি বস্তু খাড়াভাবে নামিয়ে দিলে মোট গতিশক্তি কত হবে ? [উ. 120 J]

১৯। 1 J গতিশক্তির একটি বস্তুর গতির বিপরীতে 1N বল প্রয়োগে বস্তুটি কতদূর অগ্রসর হয়ে থেমে যাবে? [উ. 1 m]

২০। 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি বন্দুক হতে গুলো ছুড়লে গুলোটি 80 cms^{-1} বেগে নির্গত হয়। গুলোর ভর 40 g হলে গুলো ও বন্দুকের গতিশক্তি নির্ণয় কর। [উ. 0·0128 J, $51·2 \times 10^{-6}$ J]

২১। 3·6 kg ভরের একটি বন্দুক হতে 365 J গতিশক্তি উৎপন্ন করে 0·05 kg ভরের একটি বুলেট কত বেগে নিক্ষিপ্ত হবে ? [উ. 120 ms^{-1}]

২২। 2 kg ভরের একটি ব্লক 0·4 m উচ্চতা থেকে টেবিলের ওপর উল্লম্বভাবে রক্ষিত স্প্রিং-এর ওপর পড়ল। যদি স্প্রিংটির বল ধ্রুবক 1960 Nm^{-1} হয়, তবে স্প্রিংটি সর্বাধিক কতটুকু সঙ্কুচিত হবে? [উত্তর : 0·1 m]

২৩। একটি সরল দোলকের ববের ভর 0·2 kg ও কার্যকরী দৈর্ঘ্য 1·2 m। উল্লম্ব রেখা হতে 0·2 m দূরে টেনে ছেড়ে দিলে গতিপথের সর্বনিম্ন বিন্দু অতিক্রমের সময় ববের গতিশক্তি ও বেগ নির্ণয় কর। [উ. 0·033 J; 0·57ms^{-1}]

২৪। 10 kg ভরের একটি কণার বেগ $(7\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$ ms^{-1} হলে এর গতিশক্তি কত হবে ? [উ. 550 J]

২৫। 300 m উঁচু হতে একটি বস্তু অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে নিচে পড়লে কোথায় তার গতিশক্তি স্থিতিশক্তির অর্ধেক হবে? [উ. 100m নিচে]

২৬। একটি নিউট্রনের ভর $1·67 \times 10^{-27}$ kg এবং এটি 4×10^4 ms^{-1} বেগে গতিশীল। এর গতিশক্তি নির্ণয় কর। [উ. $1·336\times 10^{-18}$ J]

২৭। 200 g ভরের একটি বস্তু 10 m ওপর থেকে নিচে পড়ে যায়। ভূপৃষ্ঠ স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি কত? [উ. 19·6 J]

২৮। দেখাও যে, অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত ভরের একটি বস্তুর t-তম সেকেন্ডে হারানো স্থিতিশক্তি বা অর্জিত গতিশক্তি $\frac{1}{2} mg^2 (2t - 1)$-এর সমান।

২৯। 500g ভরবিশিষ্ট কোনো বস্তু একটি জাহাজের ওপর হতে 10m নিচে পানিতে পড়ল। (i) বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি; (ii) বস্তুটির সর্বোচ্চ গতিশক্তি; (iii) বস্তুটি যে বেগ নিয়ে পানির তলকে স্পর্শ করে এবং (iv) পানি হতে 3 মিটার ওপরে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি নির্ণয় কর। [উ. (i) 49 J ; (ii) 49 J ; (iii) 14 ms^{-1} ; (iv) 34·3 J]

৩০। 2 kg ভরের একটি বস্তু 5 m উঁচু হতে মাটিতে পড়ে। এতে অভিকর্ষ বল বস্তুর ওপর কত কাজ করে ও বস্তুটি কত স্থিতিশক্তি হারায় ? [উ. 98 J; 98 J]

৩১। 2 kg ভরের একটি বস্তু কত উচ্চতা হতে অভিকর্ষের টানে পড়ে মাটিতে আঘাত করার পূর্ব মুহূর্তে 2401 J গতিশক্তি লাভ করে ? [উ. 122·5 m]

৩২। 6 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু স্থির অবস্থায় ছিল। 30 N বল প্রয়োগ করায় 10 s পর বস্তুটির গতিশক্তি কত হবে? [উ. 7500 J]

৩৩। 1×10^3 kg ভরের একটি মোটর গাড়ি 70 kmh^{-1} বেগে চলছে। একই গতিশক্তি সম্পন্ন হতে হলে 300 kg ভরের একটি মোটর সাইকেলকে কত বেগে চলতে হবে ? [উ. 127·80 kmh^{-1}]

৩৪। 0·50 kg ভরের একটি বোমা ভূমি হতে 1 km উঁচুতে অবস্থিত একটি বিমান থেকে ফেলে দেয়া হলো। ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি নির্ণয় কর। [উ. $4·9 \times 10^3$ J]

৩৫। 0·50 kg ভরের একটি পাথরকে 15 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। (i) সর্বোচ্চ উচ্চতায় পাথরের স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি নির্ণয় কর। (ii) পাথরটি আবার ভূমিতে ফিরে এলে তার গতিশক্তি কত হবে ? [উ. (i) 56·25 J ; (ii) 0, 56·25 J]

৩৬। 1 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 20 m উচ্চতাসম্পন্ন একটি দালানের ছাদ থেকে নিচে পড়ল। (i) বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি, (ii) বস্তু যে বেগ নিয়ে ভূমি স্পর্শ করে, (iii) বস্তুটির সর্বোচ্চ গতিশক্তি, (iv) ভূমি থেকে 2 m উচ্চতায় বস্তুটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি নির্ণয় কর। [উ. (i) 196 J, (ii) 19·798 ms^{-1}, (iii) 196 J (iv) 176·4 J]

৩৭। একটি 50 g ভরের বুলেট 10 ms^{-1} বেগে 950 g ভরের খণ্ডকে (স্থিরাবস্থায়) আঘাত করে এবং আটকে যায়। হারানো গতিশক্তির পরিমাণ কত ? [উ. 2·5 J] [BUTex Admission Test, 2009–10]

৩৮। দেখাও যে, একটি দোলক পিণ্ডকে সাম্যাবস্থান থেকে θ কোণে বিক্ষিপ্ত করে ছেড়ে দিলে পুনরায় সাম্যাবস্থানে এলে পিণ্ডের বেগ হবে, $v = \sqrt{2g\,(1 - \cos\theta)}$। (এখানে, l = দোলকের দৈর্ঘ্য)

৩৯। 70 kg ভরের একজন লোক প্রতিটি 15 cm উঁচু 30টি সিঁড়ি 20 s-এ উঠতে পারেন। লোকটির ক্ষমতা কত ? [উ. 154·35 W]

৪০। একটি মোটর মিনিটে $5{\cdot}5 \times 10^5$ kg পানি 100 m ওপরে তুলতে পারে। মোটরটির দক্ষতা 70% হলে এর ক্ষমতা নির্ণয় কর। [উ. $1{\cdot}28 \times 10^7$ W]

৪১। 80% দক্ষতাসম্পন্ন একটি মটর একটি ক্রেন নিয়ন্ত্রণ করে যার দক্ষতা 50%। মটরটি 3·73 kW ক্ষমতা প্রয়োগ করলে ক্রেনে 746 N ওজনের একটি বস্তুর ঊর্ধ্বমুখী গড়বেগ কত হবে ? [উ. 2 ms^{-1}]

৪২। 100 m গভীর একটি কুয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি মিনিটে 1000 kg পানি উঠানো হয়। যদি ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 42% নষ্ট হয়। তাহলে এর অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। [উ. 37·75 HP]

৪৩। কোনো কুয়া থেকে 20m ওপরে পানি তোলার জন্য 6kW এর একটি পাম্প ব্যবহার করা হচ্ছে। পাম্পের দক্ষতা 82·2% হলে প্রতি মিনিটে কত লিটার পানি তোলা যাবে ? [উ. 1620 লিটার]

৪৪। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা 7·2m ও ব্যাস 4m। 31·4 মিনিটে কুয়াটিকে পানিশূন্য করতে পারে এরূপ একটি বৈদ্যুতিক পাম্পের ক্ষমতা নির্ণয় কর। [উ. 1693·44 W]

৪৫। 1200 kg ভরের একটি গাড়ির ইঞ্জিনের ক্ষমতা 134·05 HP ও কর্মদক্ষতা 90%। গাড়িকে স্থিরাবস্থা থেকে 20 ms^{-1} বেগে আনতে ন্যূনতম কত সময় লাগবে ? [1 HP = 0·746 kW] [উ. 2·67 sec]

[Hints : $P = \eta \times 134{\cdot}05$ HP, $\frac{1}{2}mv^2 = Pt,\ t = ?$] [BUET Admission Test, 2010-11]

৪৬। একটি ইঞ্জিনে প্রতি মিনিটে 15 ms^{-1} বেগে 6000 kg পানি ওপরে ছুড়তে পারে। ইঞ্জিনের ক্ষমতা কত ? [উ. 14·7 kW]

৪৭। একটি দমকলের পাম্প মাটি থেকে 3 m নিচে অবস্থিত একটি জলাধার থেকে পানি তুলে প্রতি সেকেন্ডে 50 kg পানি ছুড়ছে এবং ওই পানি মাটি থেকে 10 m ওপরে একটি দেয়ালে লম্বভাবে 5 ms^{-1} বেগে আঘাত করছে। পাম্পটির ক্ষমতা কত ? [উ. 6·995 kW]

৪৮। 746 W ক্ষমতার একটি পাম্প প্রতি মিনিটে কী পরিমাণ পানি 10 m উচ্চতায় ওপরে উঠাতে পারবে ? [উ. 456·7 kg]

৪৯। একটি পাম্প মিনিটে 1200 gallon পরিমাণ পানি 6 ft উঁচুতে 12 fts^{-1} (9·8 ms^{-1}) গতিবেগে নিক্ষেপ করতে পারে। 1 gallon পানির ভর 10 lb হলে ইঞ্জিনের অশ্ব ক্ষমতা নির্ণয় কর। [উ. 8 HP]

[RUET Admission Test, 2006–07, 2005–06]

৫০। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার দৈর্ঘ্য 3 m এবং প্রস্থ 2 m ও গভীরতা 20 m। 70% কর্মদক্ষতাবিশিষ্ট একটি পাম্প 20 মিনিটে কুয়াটিকে পানিশূন্য করতে পারে। পাম্পটির অশ্ব ক্ষমতা নির্ণয় কর। [উ. 18·77 HP]

[KUET Admission Test, 2009–10]

৫১। 1200 kg ভরের একটি গাড়ির ইঞ্জিনের ক্ষমতা 134·05 HP ও কর্মদক্ষতা 90%। গাড়িটিকে স্থিরাবস্থা থেকে 30 ms^{-1} বেগে আনতে ন্যূনতম কত সময় লাগবে ? [1 HP = 0·746 kW] [উ. 6 s]

[BUET Admission Test, 2010–11]

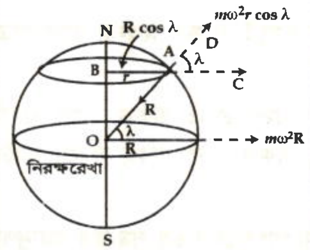
৫২। ভূপৃষ্ঠের 20 m নিচ হতে পাম্পের সাহায্যে প্রতি মিনিটে 600 kg পানি উঠানো হয়। যদি পানি বাইরে আসার বেগ 5 ms^{-1} হয়, তবে পাম্পের ক্ষমতা কত ? [উ. 15204 HP] [KUET Admission Test, 2012–13]

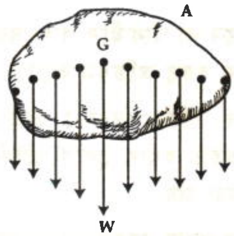
৫৩। একটি কুয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি ঘণ্টায় 25×10^6 kg পানি 50 m উচ্চতায় উঠানো হলো। 70% ক্ষমতা ক্ষয় হলে এর অশ্বক্ষমতা কত ? [উ. $1{\cdot}52 \times 10^4$ HP] [KUET Admission Test, 2017–18]

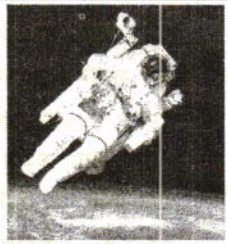
৬

মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ
GRAVITATION AND GRAVITY

প্রধান শব্দ (Key Words) : গ্যালিলিওর সূত্র, কেপলারের সূত্র, মহাকর্ষ বল, অভিকর্ষজ ত্বরণ, স্বাভাবিক উপগ্রহ, কৃত্রিম উপগ্রহ, ভূ-স্থির উপগ্রহ, মুক্তিবেগ, মহাকর্ষ সূত্রের ব্যবহার।







ভূমিকা
Introduction

এই বিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তু পরস্পর পরস্পরকে আকর্ষণ করে। পদার্থের এই সর্বজনীন ধর্মই হলো মহাকর্ষ। গ্রহগুলো সূর্যকে কেন্দ্র করে নিজ নিজ কক্ষপথে প্রদক্ষিণ করছে। সপ্তদশ শতাব্দিতে জার্মান বিজ্ঞানী কেপলার গ্রহের এই ঘূর্ণন সম্পর্কে গুরুত্বপূর্ণ সূত্র এবং তথ্য প্রদান করেন। কিন্তু কী ধরনের বল ক্রিয়াশীল তা সঠিকভাবে বুঝাতে সক্ষম হননি। এই সূত্রগুলো ব্যাখ্যা করতে 1681 খ্রিস্টাব্দে স্যার আইজ্যাক নিউটন (Sir Issac Newton) প্রথম "মহাকর্ষ সূত্র" আবিষ্কার করেন।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্র ব্যাখ্যা করতে ও পড়ন্ত বস্তুর সূত্র যাচাই করতে পারবে।
  ব্যবহারিক : পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্রের যাচাই।
- গ্রহের গতি সংক্রান্ত কেপলারের সূত্র বর্ণনা করতে পারবে।
- নিউটনের সূত্র ব্যবহার করে কেপলারের সূত্র, গ্রহের গতি ইত্যাদি আলোচনা করতে পারবে।
- মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করে মহাকর্ষীয় বিভব, প্রাবল্য পরিমাপ ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- অভিকর্ষজ ত্বরণ, মুক্তিবেগের গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন করতে পারবে।
- মহাকর্ষ সূত্রের ব্যবহার সম্বন্ধে জানতে পারবে।

৬.১ পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্র
Galileo's laws for a falling body

আমরা সর্বদা দেখি যে, কোনো বস্তুকে ওপর থেকে নিচে ছেড়ে দিলে তা সরাসরি নিচে পৌঁছায়। এর কারণ কী কখনো আমরা ভেবে দেখেছি? একই সাথে ভারী এবং হালকা বস্তুকে একই স্থান থেকে নিচে ছেড়ে দিলে এগুলো কি একই সাথে একই সময়ে ভূপৃষ্ঠে পৌঁছায় ?

আমরা দেখি যে, ভারী বস্তু ও হালকা বস্তু একই উচ্চতা থেকে পড়তে দিলে ভারী বস্তু আগে মাটিতে পৌঁছায়। যেহেতু বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না, তাই ভারী ও হালকা বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ একই। সুতরাং এদের একই সময়ে মাটিতে পৌঁছানোর কথা। ভারী ও হালকা বস্তুর পতনের সময়ের যে পার্থক্য পাওয়া যায় তা বায়ুর বাধার জন্য। গ্যালিলিও উঁচু মান মন্দিরের ছাদ থেকে বিভিন্ন রকমের ভারী বস্তু ফেলে দেখান যে, এরা প্রায় একই সময়ে মাটিতে পৌঁছায়। বাতাসের বাধা না থাকলে এগুলো একত্রেই মাটিতে পৌঁছাত। বাতাসের মধ্যে বস্তুদ্বয় থাকার জন্য এদের ওজনের বিপরীত দিকে বাতাসের প্লবতা কাজ করে। ভারী বস্তুর চেয়ে হালকা কাগজের ওপর প্লবতা বা ঊর্ধ্বমুখী বল বেশি হওয়ায় কাগজ দেরিতে মাটিতে পৌঁছে। যেহেতু বস্তুর ওপর

ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না, তাই ভারী বস্তু ও কাগজের ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজ ত্বরণ একই।

পড়ন্ত বস্তু সম্পর্কে গ্যালিলিও তিনটি সূত্র দিয়েছেন। এগুলোকে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে **গ্যালিলিওর সূত্র** বলে যা স্থির অবস্থা থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

সূত্রগুলো নিম্নে প্রদত্ত হলো :

***

১ম সূত্র : বায়ুশূন্য স্থানে বা বাধাহীন পথে সকল বস্তুই নিশ্চল অবস্থা হতে যাত্রা করে সমান দ্রুততায় নিচে নামে অর্থাৎ সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

ব্যাখ্যা : ছোট, বড় ও বিভিন্ন ওজনের কতগুলো বস্তু একই উচ্চতা হতে ও স্থিরাবস্থা হতে ছেড়ে দিলে বাধাহীন পথে তারা সমান দ্রুততায় অর্থাৎ ত্বরণে গতিশীল থাকবে এবং একই সময়ে মাটিতে পড়বে। গিনি ও পালক পরীক্ষা দ্বারা প্রথম সূত্র প্রমাণ করা যায়।

২য় সূত্র : বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক। কোনো পড়ন্ত বস্তু t সময়ে v বেগ প্রাপ্ত হলে, গাণিতিকভাবে লেখা যায়, $v \propto t$।

ব্যাখ্যা : অভিকর্ষের টানে স্থিরাবস্থা হতে বাধাহীন পথে নিচের দিকে পড়বার সময় কোনো বস্তুর বেগ যদি এক সেকেন্ড পরে v হয় তবে তার বেগ দুই সেকেন্ড পরে $v \times 2$, তিন সেকেন্ড পরে $v \times 3$ ইত্যাদি হবে। সাধারণভাবে বলা যায় যে, কোনো একটি পড়ন্ত বস্তুর বেগ t_1 ও t_2 সময়ে যথাক্রমে v_1 ও v_2 হলে আমরা পাই,

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} \quad \text{বা,} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad \therefore \boxed{v \propto t}$$

৩য় সূত্র : বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক। কোনো পড়ন্ত বস্তু t সময়ে h দূরত্ব অতিক্রম করলে গাণিতিক নিয়মে লেখা যায়, $h \propto t^2$।

ব্যাখ্যা : অভিকর্ষের টানে স্থিতাবস্থা হতে বাধাহীন পথে নিচের দিকে পড়বার সময় কোনো বস্তু যদি প্রথম সেকেন্ডে h দূরত্ব অতিক্রম করে তবে বস্তুটি দুই সেকেন্ডে $2^2 \times h$, তিন সেকেন্ডে $3^2 \times h$ ইত্যাদি দূরত্ব অতিক্রম করবে।

কাজেই বস্তুটি t_1 ও t_2 সেকেন্ডে যথাক্রমে h_1 ও h_2 দূরত্ব অতিক্রম করলে,

$$\frac{h_1}{t_1^2} = \frac{h_2}{t_2^2} \quad \text{বা,} \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \quad \therefore \boxed{h \propto t^2}$$

ক্রিয়াকর্ম : একটি লোহার বল এবং একটি কাগজ ছাদের ওপর থেকে নিচে ফেলে দিলে একত্রে মাটিতে পড়ে না কেন?

বাতাসের মধ্যে বস্তুদ্বয় পতনের সময় এদের ওজনের বিপরীতে বাতাসের প্লবতা (buoyancy) কাজ করে। ভারী বস্তুর চেয়ে হালকা বস্তুতে প্লবতা বা ঊর্ধ্বমুখী বল বেশি হওয়ায় তা দেরিতে মাটিতে পৌঁছায়।

কাজ : যেকোনো উচ্চতা থেকে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে অভিকর্ষীয় ত্বরণ সুষম থাকে না—ব্যাখ্যা কর।

অভিকর্ষীয় ত্বরণ উচ্চতার ওপর নির্ভর করে। তাই বিভিন্ন উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ বিভিন্ন হয়। কম উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ বেশি এবং বেশি উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ কম।

৬·২ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড: ২	পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিওর সূত্রের যাচাই Verification of Galileo's law of a falling body

তত্ত্ব (Theory) : যেকোনো বস্তুকে ওপর থেকে ছেড়ে দিলে অভিকর্ষের ক্রিয়ায় নিচের দিকে পড়ে। সাধারণভাবে বস্তু যে উচ্চতা থেকে পড়ে তা পৃথিবীর ব্যাসার্ধের তুলনায় অত্যন্ত ক্ষুদ্র। এজন্য বস্তুর নিম্নমুখী গতির ক্ষেত্রে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান স্থির থাকে বলে ধরা যায়। অভিকর্ষের ক্রিয়ায় পতনশীল বস্তুর ওপর যদি বায়ুর বাধা না থাকে অর্থাৎ বস্তু যদি অবাধে পতনশীল হয়, তবে নিম্নোক্ত সহজ সূত্রগুলো ওই গতির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয়।

স্থিরাবস্থা থেকে অবাধে পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে—

১. শূন্যস্থানে সকল বস্তুই সমান দ্রুততায় নিচে নামে।

২. কোনো নির্দিষ্ট সময়ে বস্তু যে বেগ লাভ করে তা ওই সময়ের সমানুপাতিক হয়।

৩. কোনো নির্দিষ্ট সময়ে বস্তু যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক হয়।

প্রথম সূত্র : একই উচ্চতায় স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় বিভিন্ন আকারের সকল পড়ন্ত বস্তু সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

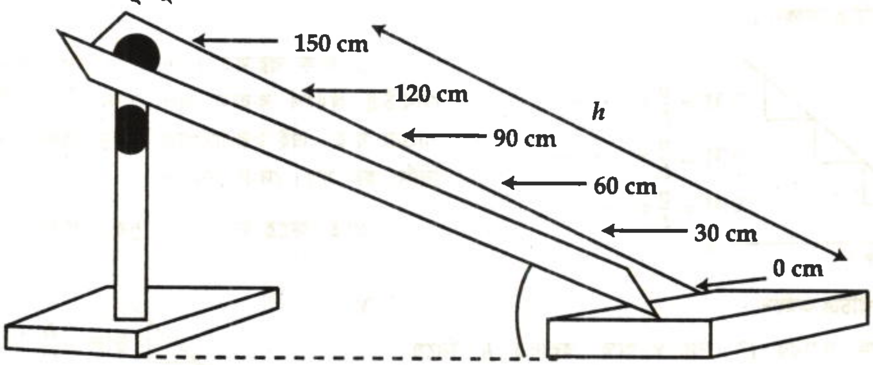
দ্বিতীয় সূত্র : স্থির অবস্থা থেকে বিনা বাধায় কোনো পড়ন্ত বস্তুর বেগ সময়ের সমানুপাতিক। অর্থাৎ পড়ন্ত বস্তুটি t_1 সময়ে v_1 বেগ, t_2 সময়ে v_2 বেগ এবং t_3 সময়ে v_3 বেগ প্রাপ্ত হলে,

$\frac{v_1}{t_1}=\frac{v_2}{t_2}=\frac{v_3}{t_3}=$ ধ্রুবক হবে বা $\frac{v}{t}=$ ধ্রুবক বা $v \propto t$ হবে।

তৃতীয় সূত্র : স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় কোনো পতনশীল বস্তু নির্দিষ্ট সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক। ধরা যাক, কোনো পড়ন্ত বস্তু t_1 সময়ে h_1 দূরত্ব, t_2 সময়ে h_2 দূরত্ব এবং t_3 সময়ে h_3 দূরত্ব অতিক্রমে করল। তা হলে,

$\frac{h_1}{t_1^2}=\frac{h_2}{t_2^2}=\frac{h_3}{t_3^2}=$ ধ্রুবক হবে বা $\frac{h}{t^2}=$ ধ্রুবক বা $h \propto t^2$ হবে।

পরীক্ষার সাহায্যে সূত্রগুলোর প্রমাণ :



চিত্র ৬১

যন্ত্রপাতি :

১. একটি আনত মসৃণ তল

২. একটি মিটার স্কেল

৩. একটি স্টপওয়াচ

৪. কয়েকটি মার্বেল

পরীক্ষণ পদ্ধতি (Experimental procedure) :

১. একটি আনত তলকে ভূমি বা টেবিলের ওপর চিত্রানুযায়ী স্থাপন কর। আনত তলটির শীর্ষবিন্দু এর উচ্চতা ভূমি থেকে মিটার স্কেল দিয়ে পরিমাপ কর। এবার একটি চকের সাহায্যে আনত তলের ওপর 30 cm ব্যবধানে কয়েকটি দাগ দাও।

২. প্রথমে একটি মার্বেলকে ওপরের দাগাঙ্কিত বিন্দু হতে ছাড়ার সাথে সাথে স্টপওয়াচ চালু কর। মার্বেলটি ভূমি বা টেবিল স্পর্শ করার সাথে সাথে স্টপওয়াচ বন্ধ কর। স্টাপওয়াচ থেকে সময় (t_1) এবং মিটার স্কেলের সাহায্যে মার্বেল কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব (h_1) নির্ণয় কর। এই পদ্ধতিতে আরও দুইবার পাঠ নিয়ে তিনটি পাঠের গড় মান নির্ণয় কর।

৩. পুনরায় মার্বেলটিকে ওপর থেকে দ্বিতীয় দাগাঙ্কিত বিন্দু হতে ছাড়ার সাথে সাথে স্টপওয়াচ চালু কর। মার্বেলটি ভূমি বা টেবিল স্পর্শ করার সাথে সাথে স্টপওয়াচ বন্ধ কর। স্টাপওয়াচ থেকে সময় (t_2) এবং মিটার স্কেলের সাহায্যে মার্বেল কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব (h_2) নির্ণয় কর। এই পদ্ধতিতে আরো দুইবার পাঠ নিয়ে তিনটি পাঠের গড় মান নির্ণয় কর।

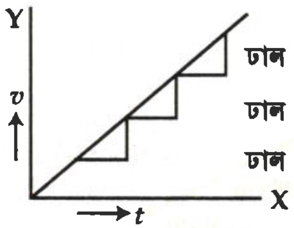
৪. একইভাবে মার্বেলটিকে অন্যান্য দাগাঙ্কিত বিন্দু হতে ছেড়ে দিয়ে ভূমি পর্যন্ত দূরত্ব এবং সময় পরিমাপ কর এবং নিচের ছকে তা লিপিবদ্ধ কর।

পরীক্ষণ ছক–১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	দূরত্ব h (cm)	সময় t (s)	গড় সময় t (s)	বেগ $v = \frac{s}{t}$ (cms^{-1})	t^2 (s^2)	$\frac{h}{t^2}$ (cms^{-2})
1	150					
2	120					
3	90					
4	60					
5	30					
6	0					

হিসাব :

I. v—t লেখচিত্র অঙ্কন :



ঢাল $= \frac{v}{t} =$ ·········

ঢাল $= \frac{v}{t} =$ ·········

ঢাল $= \frac{v}{t} =$ ·········

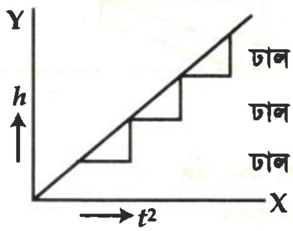
X-অক্ষ বরাবর t এবং Y-অক্ষ বরাবর v নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করলে মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এই সরলরেখার বিভিন্ন বিন্দুতে কয়েকটি ঢাল নির্ণয় করা হয়। দেখা যায় যে,

প্রতি ক্ষেত্রে ঢাল $= \frac{v}{t} =$ ধ্রুব রাশি হয় বা $v \propto t$ হয়।

II. h—t^2 লেখচিত্র অঙ্কন :

X-অক্ষ বরাবর t^2 এবং Y-অক্ষ বরাবর h নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করলে মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এই সরলরেখার বিভিন্ন বিন্দুতে কয়েকটি ঢাল নির্ণয় করা হয়। দেখা যায় যে,

প্রতি ক্ষেত্রে $\frac{h}{t^2} = \frac{1}{\text{ঢাল}} =$ ধ্রুবক হয় বা $h =$ ধ্রুবক $\times t^2$ হয় বা $h \propto t^2$ হয়।



ঢাল $= \frac{h}{t^2} \therefore \frac{t^2}{h} = \frac{1}{\text{ঢাল}}$

ঢাল $= \frac{h}{t^2} \therefore \frac{t^2}{h} = \frac{1}{\text{ঢাল}}$

ঢাল $= \frac{h}{t^2} \therefore \frac{t^2}{h} = \frac{1}{\text{ঢাল}}$

ফলাফল :

১. প্রাপ্ত মান থেকে দেখা যায় সমান সময়ে মার্বেলটি সমান দূরত্ব অতিক্রম করে। অতএব **প্রথম সূত্রটি প্রমাণিত হলো।**

২. v—t লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $v \propto t$ হয় অতএব **দ্বিতীয় সূত্রটি প্রমাণিত হলো।**

৩. h—t^2 লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $h \propto t^2$ হয় অতএব **তৃতীয় সূত্রটি প্রমাণিত হলো।**

সতর্কতা এবং আলোচনা :

(১) প্রতিটি মার্বেল আনত তলের শীর্ষে একই বিন্দু থেকে ছাড়তে হবে।

(২) মার্বেল পতনে যেন কোনো বাধার সৃষ্টি না হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

(৩) দূরত্ব এবং সময় সঠিকভাবে পরিমাপ করতে হবে।

(৪) পরীক্ষণীয় স্থানে বাতাস যেন মার্বেল পতনে বাধার সৃষ্টি করতে না পারে সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.১

১। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে আনত 60 m দৈর্ঘ্যের একটি ঘর্ষণহীন তলে একটি মার্বেলকে সর্বোচ্চ অবস্থান থেকে ছেড়ে দেয়া হলো। প্রথম সেকেন্ডে মার্বেলটি 2·5 m দূরত্ব অতিক্রম করলে ভূমিতে পৌঁছতে মার্বেলটির কত সময় লাগবে ?

আমরা জানি,

$$h = ut + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$h = \frac{1}{2}at^2$$

বা, $2{\cdot}5 = \frac{1}{2}a(1)^2$

$a = 5\,\text{ms}^{-2}$

এখানে,
$h = 2{\cdot}5$ m

ভূমিতে পৌঁছতে t সময় লাগে,

$\therefore\ h = \frac{1}{2}at^2$

বা, $60 = \frac{1}{2}at^2$

বা, $at^2 = 60 \times 2$

বা, $t^2 = \frac{120}{a}$

$\therefore\ t = \sqrt{\frac{120}{5}} = 4{\cdot}9$ sec

এখানে,
$h = 60$ m
$t = ?$

***৬·৩ গ্রহের গতি সম্পর্কিত কেপলারের সূত্র
Kepler's laws about motion of the planets

অতি প্রাচীনকাল হতে গ্রহ-নক্ষত্রের গতিবিধি সম্পর্কে বিজ্ঞানীদের যথেষ্ট আগ্রহ ছিল। ষোড়শ শতাব্দীতে ডেনমার্কের জ্যোতির্বিদ **টাইকো ব্রে** (Tycho-Brahe) মঙ্গলগ্রহের গতিবিধি লক্ষ করেন এবং কিছু তথ্য সংগ্রহ করেন। তাঁর এ গবেষণা লব্ধ তথ্য এবং অন্যান্য পর্যবেক্ষণের সাহায্যে 1618 খ্রিস্টাব্দে ডেনমার্কের অপর জ্যোতির্বিদ **জোহান কেপলার** (Johann Kepler) সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, গ্রহগুলো কোনো এক বলের প্রভাবে সূর্যকে কেন্দ্র করে অবিরাম ঘুরছে। এই সম্পর্কে তিনি তিনটি সূত্র প্রদান করেন। তাঁর নাম অনুসারে এই তিনটি সূত্রকে **কেপলার-এর গ্রহ সম্পর্কীয় গতিসূত্র** (Kepler's laws of planetary motion) বলা হয়। সূত্র তিনটি নিম্নে আলোচিত হলো—

(১) **উপবৃত্ত সূত্র (Law of ellipse) : প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের ফোকাসে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করছে।** DAT(19-20,20-21)

(২) **ক্ষেত্রফল সূত্র (Law of area) : গ্রহ এবং সূর্যের সংযোগকারী ব্যাসার্ধ রেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।**

(৩) **সময়ের সূত্র (Law of time) : প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ সূর্য হতে তার গড় দূরত্বের ঘনফলের সমানুপাতিক।** অর্থাৎ $T^2 \propto a^3$। DAT(20-21,23-24) MAT(13-14)

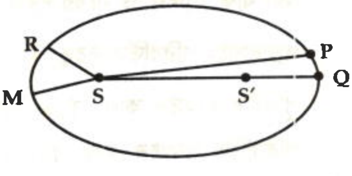
ব্যাখ্যা :

১ম সূত্র : এই সূত্র সূর্যের চারদিকে গ্রহের কক্ষপথের আকৃতি প্রকাশ করে। মনে করি S এবং S′ একটি উপবৃত্তের দুটি নাভি। ধরি S নাভিটি সূর্যের ফোকাসে অবস্থিত [চিত্র ৬·২]। কেপলারের প্রথম সূত্র অনুসারে যেকোনো গ্রহ সূর্যকে S বিন্দুতে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে ঘুরছে।

২য় সূত্র : এই সূত্র কক্ষীয় বেগ এবং সূর্য ও গ্রহের মধ্যবর্তী দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। মনে করি কোনো গ্রহ t সময়ে P অবস্থান হতে Q অবস্থানে আসে। যদি একই সময়ে ওই গ্রহ M অবস্থান হতে R অবস্থানে আসে, তবে কেপলারের দ্বিতীয় সূত্র হতে পাই, PQS-এর ক্ষেত্রফল এবং MSR-এর ক্ষেত্রফল সমান হবে।

৩য় সূত্র : এই সূত্র গ্রহের কক্ষপথের আকার এবং অতিক্রান্ত সময়ের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। মনে করি T গ্রহের পর্যায়কাল অর্থাৎ সূর্যকে একবার প্রদক্ষিণ করতে যে সময় লাগে তার মান T। যদি পরাক্ষের দৈর্ঘ্য $2a$ হয়, তবে কেপলারের তৃতীয় সূত্র হতে আমরা পাই, $T^2 \propto 8a^3$

যেহেতু 8 একটি ধ্রুব সংখ্যা, সেহেতু, $T^2 \propto a^3$



চিত্র ৬·২

উক্ত সমীকরণ হতে কেপলারের তৃতীয় সূত্রটিকে সামান্য পরিবর্তন করে নিম্নরূপে লেখা যায়—
প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ গ্রহের কক্ষপথের পরাক্ষের অর্ধেকের ঘন-এর সমানুপাতিক।

উপরের সূত্র থেকে দেখা যায় যে, কোনো গ্রহের আবর্তন কাল এবং সূর্য থেকে এর গড় দূরত্ব জানা থাকলে অন্য যেকোনো গ্রহের আবর্তন কাল পর্যবেক্ষণ করে সূর্য থেকে এই দ্বিতীয় গ্রহের গড় দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

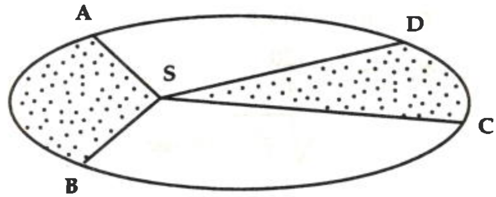
কেপলারের সূত্র বিশ্লেষণে নিম্নলিখিত বিষয়গুলো লক্ষণীয় :

(১) গ্রহের আবর্তনকাল এর ভরের ওপর নির্ভর করে না। DAT(21-22)

(২) সূর্য থেকে গ্রহের গড় দূরত্ব যত কম হয় অর্থাৎ গ্রহ সূর্যের যত নিকটে থাকে এর আবর্তনকাল তত কম হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.২

১। S হলো সূর্যের অবস্থান। এর চতুর্দিকে উপবৃত্তাকার কক্ষপথে একটি গ্রহের A হতে B বিন্দুতে আসতে 30 দিন সময় লাগে। তা হলে CD দূরত্ব অতিক্রম করতে গ্রহটির কত সময় লাগবে ? (ASB-এর ক্ষেত্রফল = 3 × CSD-এর ক্ষেত্রফল)।



প্রশ্নানুসারে, ASB-এর ক্ষেত্রফল = 3 × CSD-এর ক্ষেত্রফল

ধরা যাক, AB পথ অতিক্রম করতে সময় লাগে = t_1 এবং CD পথ অতিক্রম করতে সময় লাগে = t_2

এখানে, $t_1 = 30$ দিন

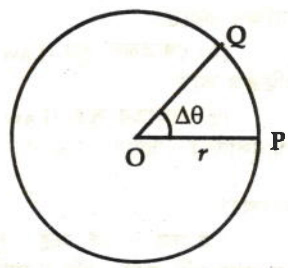
আমরা জানি, $\dfrac{\text{ASB ক্ষেত্রফল}}{\text{CSD ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{t_1}{t_2}$

বা, $\dfrac{3 \times \text{CSD ক্ষেত্রফল}}{\text{CSD ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{t_1}{t_2}$

$\therefore\ t_2 = \dfrac{t_1}{3} = \dfrac{30}{3} = 10$ দিন

২। পৃথিবী সূর্যের চারদিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে ধরে দেখাও যে, একক সময়ে পৃথিবীর কক্ষপথ যে ক্ষেত্রফল তৈরি করে তা একটি ধ্রুবক।

মনে করি পৃথিবী সূর্যের চারদিকে r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ω ধ্রুব বেগে ঘুরছে এবং Δt সময়ে কেন্দ্রে $\Delta\theta$ কোণ উৎপন্ন করে।



পৃথিবী ও সূর্যের সংযোজক সরলরেখা দ্বারা Δt সময়ে অঙ্কিত ক্ষেত্রফল = ΔOPQ-এর ক্ষেত্রফল। এখন r উচ্চতা ও $r\Delta\theta$ ভূমিবিশিষ্ট ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ΔOPQ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের প্রায় সমান।

ΔOPQ-এর ক্ষেত্রফল $\simeq \dfrac{1}{2} r \times r\Delta\theta = \dfrac{1}{2} r^2\Delta\theta$

$\therefore$ একক সময়ে অঙ্কিত ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{r^2\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{1}{2} r^2\omega$

এখানে, r এবং ω ধ্রুবক, কাজেই ক্ষেত্রফলও ধ্রুবক।

৩। সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্ব যদি বর্তমান দূরত্বের অর্ধেক হয় তা হলে এক বছরে দিনের সংখ্যা কত ? (দেওয়া আছে পৃথিবীর আবর্তন কাল 365 দিন)। [ঢা. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন)]

ধরা যাক, পৃথিবী ও সূর্যের দূরত্ব = R_1

প্রশ্নানুসারে পরিবর্তিত দূরত্ব, $R_2 = \dfrac{R_1}{2}$

পৃথিবীর আবর্তন কাল, $T_1 = 365$ দিন

পরিবর্তিত আবর্তন কাল, $T_2 = ?$

কেপলারের সূত্র অনুযায়ী,
আমরা জানি,

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{R_1^3}$$

বা, $$T_2^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \times T_1^2$$

$$\therefore \quad T_2 = T_1 \times \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 365 \times \left(\frac{\frac{R_1}{2}}{R_1}\right)^{1.5}$$

$= 129$ দিন

৬.৪ মহাকর্ষ
Gravitation

মহাকর্ষ বল (Gravitational force) : বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন আবিষ্কার করেন যে, এই মহাবিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুকণার মধ্যে একটি পারস্পরিক আকর্ষণ বল রয়েছে। দুটি বস্তুকণার মধ্যকার এই পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে কখনো মহাকর্ষ আবার কখনো অভিকর্ষ বলে। এই দুটি বলের মধ্যে পার্থক্য রয়েছে। তা হলে প্রশ্ন জাগে মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ কী ?

মহাকর্ষ : মহাবিশ্বে অবস্থিত দুটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বলে। এই আকর্ষণ বলের মান শুধু বস্তুদ্বয়ের ভর ও এদের মধ্যকার দূরত্বের ওপর নির্ভর করে—এদের আকৃতি, প্রকৃতি, অভিমুখ ও মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না।

অভিকর্ষ : পৃথিবী এবং অন্য একটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ বলে।

উদাহরণ : সূর্য ও চন্দ্রের মধ্যকার আকর্ষণ বল মহাকর্ষ; অন্যদিকে পৃথিবী এবং গাছের আমের মধ্যকার আকর্ষণ বল অভিকর্ষ।

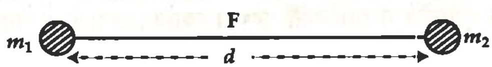
৬.৪.১ নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র
Newton's law of gravitation

1687 খ্রিস্টাব্দে বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন আপেল পতন এবং গ্রহ উপগ্রহের গতি পর্যবেক্ষণ করে মহাকর্ষের যে সূত্র আবিষ্কার করেন তা নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় :

সূত্র : মহাবিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুকণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং এদের মধ্যকার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। এই বল বস্তু কণাদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে। DAT(19-20) MAT(15-16)

ব্যাখ্যা : নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় যে এই সূত্রে তিনটি অংশ আছে। দুটি অংশ বলের পরিমাণ সম্বন্ধীয় এবং একটি অংশ বলের প্রকৃতি সম্বন্ধীয়।

মনে করি, দুটি বস্তুকণার ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং এদের মধ্যকার দূরত্ব d [চিত্র ৬.৩]। যদি তাদের মধ্যে আকর্ষণ বল F হয়, তা হলে মহাকর্ষ সূত্রানুসারে,



চিত্র ৬.৩

(i) $F \propto m_1 m_2$ [যখন d ধ্রুবক]

(ii) $F \propto \frac{1}{d^2}$ [যখন m_1 ও m_2 ধ্রুবক]

(i) ও (ii)-কে যুক্ত করলে,

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}$$ [যখন m_1, m_2 এবং d পরিবর্তনীয়]

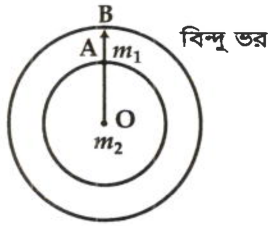
বা, $$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.1)$$

এখানে G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বা সর্বজনীন ধ্রুবক। ইহা বস্তু দুটির মধ্যকার প্রকৃতি; যেমন: প্রবেশ্যতা, প্রবণতা, দিকদর্শিতা এবং বস্তুকণা দুটির ভৌত অবস্থার ওপর নির্ভর করে না। G-এর মান 6.67×10^{-11} Nm^2 kg^{-2}

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৩

১। একটি সুষম গোলকের ভর 1×10^4 kg এবং ব্যাসার্ধ 1 m, গোলক কর্তৃক গোলকের কেন্দ্র হতে 0·5 m দূরত্বে অবস্থিত m_1 ভরের একটি কণার ওপর মহাকর্ষ বলের মান কত ? [$G = 6{\cdot}673 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²]

[BUET Admission Test, 2016-17]



চিত্র অনুযায়ী

$OB = 1$ m

$OA = 0{\cdot}5$ m

O বিন্দু থেকে OA দূরত্বে অবস্থিত m_1 ভরের কণার ওপর মহাকর্ষ বলের মান OA ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলক ও m_1 কণার মধ্যবর্তী মহাকর্ষ বলের সমান।

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(OB)^3} = \frac{10^4}{\frac{4}{3}\times\pi\times(1)^3}$$

$$m_2 = V\rho = \frac{4}{3}\pi(OA)^3 \times \rho$$

$$= \frac{4}{3}\pi(0{\cdot}5)^3 \times \frac{10^4}{\frac{4}{3}\pi(1)^3}$$

$$= 10^4 \times (0{\cdot}5)^3 = 1250 \text{ kg}$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} = \frac{Gm_1 \times 1250}{(0{\cdot}5)^2}$$

$$= \frac{6{\cdot}673 \times 10^{-11} \times 1250\, m_1}{(0{\cdot}5)^2}$$

$$= 3{\cdot}34 \times 10^{-7}\, m_1 \text{ N}$$

২। M ভরের বস্তুকে কেটে m ও $(M - m)$ ভরের বস্তুতে রূপান্তরিত করা হলো। $\frac{M}{m}$-এর অনুপাত কী হলে এদের মধ্যে মহাকর্ষ বল সর্বোচ্চ হবে ?

[BUET Admission Test, 2015-16]

$$F = Gm\frac{(M-m)}{d^2}$$

F-এর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $m(M - m)$ সর্বোচ্চ হয়।

$\therefore \quad m(M-m) = mM - m^2$

$$\frac{d}{dm}(mM - m^2) = M - 2m$$

সর্বোচ্চ মানের জন্য, $M - 2m = 0$

বা, $m = \frac{M}{2} \quad \therefore \frac{M}{m} = \frac{M}{M/2} = 2$

৩। যদি পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 49 গুণ এবং তাদের কেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব $R = 40 \times 10^4$ km হয় তবে চন্দ্র ও পৃথিবীর সংযোগকারী রেখার কোথায় কোনো বস্তুর ওপর উভয়ের টান সমান হবে ?

[RUET Admission Test, 2015-16, 2008-09 (values diff.)]

ধরি পৃথিবী থেকে x দূরত্বে টান সমান।

এখন পৃথিবী বস্তুটিকে F_1 বলে টানলে,

$$F_1 = \frac{GMm}{x^2}$$

চন্দ্র বস্তুটিকে F_2 বলে টানলে $F_2 = \dfrac{G \times \frac{M}{49} m}{(40 \times 10^4 \times 10^3 - x)^2}$

এখানে,

পৃথিবীর ভর $= M$

চন্দ্রের ভর $= \frac{M}{49}$

বস্তুর ভর $= m$

$R = 40 \times 10^4$ km

$= 40 \times 10^4 \times 10^3$ m

$F_1 = F_2$ হলে, $\frac{G \times M \times m/49}{(40 \times 10^7 - x)^2} = \frac{GMm}{x^2}$

বা, $\frac{1}{49(40 \times 10^7 - x)^2} = \frac{1}{x^2}$

বা, $x^2 = (40 \times 10^7 - x)^2 \times 49$

বা, $x = 7(40 \times 10^7 - x) = 7 \times 40 \times 10^7 - 7x$

বা, $8x = 7 \times 40 \times 10^7$

বা, $x = \frac{7 \times 40 \times 10^7}{8} m$

$\therefore \quad x = = 35 \times 10^7 m$

৪। 50 g ভরের দুটি গোলক সম্পূর্ণ মসৃণ অনুভূমিক তলে পরস্পর থেকে 1·5 m দূরত্বে রাখা আছে। মহাকর্ষীয় আকর্ষণে কতক্ষণ পরে ওরা পরস্পরের সাথে মিলিত হবে? ($G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$)

গোলক দুটির মধ্যে ক্রিয়ারত মহাকর্ষীয় বল,

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

এখানে,
$m_1 = m_2 = m = 50\ g = 0{\cdot}05\ kg$
$d = 1{\cdot}5\ m$
$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

$$\therefore \quad F = \frac{6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times 0{\cdot}05 \times 0{\cdot}05}{(1{\cdot}5)^2}$$

$$= \frac{6{\cdot}67 \times 25 \times 10^{-11} \times 10^{-4}}{(1{\cdot}5)^2}$$

$$= 74{\cdot}1 \times 10^{-15}\ N$$

আমরা জানি,

$$F = ma$$

$\therefore$ প্রতিটি গোলকের ত্বরণ, $a = \frac{F}{m} = \frac{74{\cdot}1 \times 10^{-15}}{0{\cdot}05} = 14{\cdot}8 \times 10^{-13}\ ms^{-2}$

এখন যেহেতু উভয় গোলকের গতিশক্তি শূন্য এবং উভয়ের ত্বরণ একই, সুতরাং গোলক দুটি মিলিত হওয়ার পূর্বে $\frac{1{\cdot}5}{2}$ m পথ অতিক্রম করবে। ধরা যাক, এই পথ অতিক্রম করতে প্রতিটি গোলকের t সময় লাগে। অতএব,

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{1{\cdot}5}{2} = 0 + \frac{1}{2} \times 14{\cdot}8 \times 10^{-13} \times t^2$$

বা, $t^2 = \frac{1{\cdot}5}{14{\cdot}8 \times 10^{-13}} = \frac{1{\cdot}5 \times 10^{13}}{14{\cdot}8} = \frac{15 \times 10^{12}}{14{\cdot}8} = 1{\cdot}0135 \times 10^{12}$

$\therefore \quad t = 1{\cdot}0067 \times 10^6 = \frac{1{\cdot}0067 \times 10^6}{60 \times 60 \times 24} = 11{\cdot}65$ দিন

৫। (i) সূর্য ও পৃথিবীর মধ্যে মহাকর্ষ বল এবং (ii) পৃথিবী ও চন্দ্রের মধ্যে মহাকর্ষ বল নির্ণয় কর। প্রথমটি হতে দ্বিতীয়টি কত গুণ বেশি? (দেওয়া আছে, পৃথিবীর ভর, সূর্যের ভর ও চন্দ্রের ভর যথাক্রমে 6×10^{24} kg, 2×10^{30} kg ও $7{\cdot}33 \times 10^{22}$ kg। সূর্য ও পৃথিবীর গড় দূরত্ব $r_1 = 15 \times 10^{10}$ m এবং পৃথিবী ও চন্দ্রের গড় দূরত্ব, $r_2 = 3{\cdot}84 \times 10^8$ m)।

(i) সূর্য ও পৃথিবীর মধ্যে পারস্পরিক মহাকর্ষ বল,

$$F_1 = \frac{GM_0M}{r_1^2}$$

এখানে,
$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
পৃথিবীর ভর, $M = 6 \times 10^{24}$ kg
সূর্যের ভর, $M_0 = 2 \times 10^{30}$ kg
সূর্য ও পৃথিবীর দূরত্ব $r_1 = 15 \times 10^{10}$ m

$$\therefore \quad F_1 = \frac{6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times (2 \times 10^{30}) \times (6 \times 10^{24})}{(15 \times 10^{10})^2}$$

$$= 3{\cdot}56 \times 10^{22}\ N$$

(ii) পৃথিবী ও চন্দ্রের পারস্পরিক মহাকর্ষ বল,

$$F_2 = \frac{GMm}{r_2^2}$$

$$\therefore \quad F_2 = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times (6 \times 10^{24}) \times (7.33 \times 10^{22})}{(3.84 \times 10^8)^2}$$

$$= 1.99 \times 10^{20}\ N$$

এখানে,

চন্দ্রের ভর, $m = 7.33 \times 10^{22}$ kg

পৃথিবী ও চন্দ্রের দূরত্ব,

$r_2 = 3.84 \times 10^8$ m

সুতরাং, $\dfrac{\text{সূর্য ও পৃথিবীর মধ্যে মহাকর্ষ বল}}{\text{পৃথিবী ও চন্দ্রের মধ্যে মহাকর্ষ বল}} = \dfrac{3.56 \times 10^{22}}{1.99 \times 10^{20}} = 179$ (প্রায়)

অতএব, প্রথমটি দ্বিতীয়টির 179 গুণ বেশি।

৬.৪.২ মহাকর্ষ সূত্রের ভেক্টর রূপ
Vector form of gravitational law

মহাকর্ষ সূত্রকে ভেক্টর রাশি দ্বারা নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় :

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

এখানে $\vec{F}_{21}$ হচ্ছে দ্বিতীয় বস্তুর ওপর প্রথম বস্তুর সদিক বল (আকর্ষণ), $\vec{r}_{12}$ হচ্ছে প্রথম বস্তু হতে দ্বিতীয় বস্তুর সদিক দূরত্ব।

যেহেতু প্রথম বস্তু আকর্ষণ করে দ্বিতীয় বস্তুকে নিজের দিকে টানছে অর্থাৎ $\vec{F}_{21}$ এবং দিক $\vec{r}_{12}$-এর বিপরীত, সুতরাং উপরিউক্ত সমীকরণে ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে। কিন্তু মহাকর্ষ বলের মান ধ্রুবক। সুতরাং ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়নি।

৬.৪.৩ মহাকর্ষ বলের প্রকৃতি
*
Nature of gravitational force

(i) মহাকর্ষ বল দুটি বস্তুর মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বল।
(ii) মহাকর্ষ বল বস্তু দুটির সংযোগ সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে।
(iii) মহাকর্ষ বল বস্তুদ্বয়ের মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না।
(iv) মহাকর্ষ বল বস্তুদ্বয়ের ভরের গুণফলের সমানুপাতিক হয়।
(v) মহাকর্ষ বল বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

ওপর থেকে কোনো বস্তুকে অবাধে নিচে পড়তে দিলে তা নিচে পড়ে অর্থাৎ পৃথিবী পৃষ্ঠে পড়ে। আম গাছের আম সব সময় মাটিতে পতিত হয়। কিন্তু কখনো কী ভেবে দেখেছ, আম কেন গাছ থেকে নিচে পড়ে, ওপরের দিকে যায় না? আসলে কোনো বস্তুকে পৃথিবী তার কেন্দ্রের দিকে টানে। আবার বস্তুটিও পৃথিবীকে সমান ও বিপরীতমুখী বলে আকর্ষণ করে। যেকোনো পার্থিব বস্তুর তুলনায় পৃথিবীর ভর বহুগুণে বেশি হয়। তাই এই বলের ক্রিয়ায় পৃথিবীর গতি উপেক্ষণীয় হয়, তাই সব সময় বস্তুটি পৃথিবীর দিকে পড়ে, পৃথিবী বস্তুর দিকে এগিয়ে যায় না। **সেজন্য গাছ থেকে আম নিচে পড়ে, ওপরের দিকে যায় না।**

ওপরের আলোচনায় স্পষ্ট যে, প্রত্যেক বস্তুকে পৃথিবী তার কেন্দ্রের দিকে টানে বা আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বলই হলো বস্তুর ওজন। অর্থাৎ ওজন হলো কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত অভিকর্ষ। এই ওজন সর্বদা বস্তুর ভারকেন্দ্র দিয়ে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

m ভরের বস্তুর ওজন W হলে আমরা লেখতে পারি,

$$W = mg \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.2)$$

অর্থাৎ ওজন = ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ

অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পরিবর্তিত হলে বস্তুর ওজনও সমহারে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ বস্তুর ওজন পরিবর্তনশীল, বস্তুর ওজন স্থান নিরপেক্ষ নয়। বস্তুর ওজন তার একটি মৌলিক বৈশিষ্ট্য নয়। বস্তুর ওজন থাকতে পারে, নাও থাকতে পারে।

কোনো একটি বস্তু যে পরিমাণ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হয় তাকে তার ওজন বা ভার বলে।

৬.৫ নিউটনের সূত্র থেকে কেপলারের সূত্র

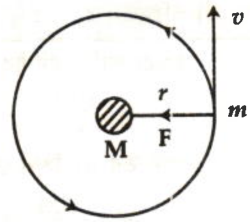
Kepler's law from Newton's law

মনে করি সূর্যকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের কক্ষপথে একটি গ্রহ v দ্রুতিতে আবর্তন করছে [চিত্র ৬.৪]। সূর্যের ভর M, গ্রহের (পৃথিবী) ভর m এবং গ্রহের পর্যায়কাল T হলে,

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র অনুযায়ী দুটি বস্তুর মধ্যকার মহাকর্ষ বল,

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.3)$$

এখানে, G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক



চিত্র ৬.৪

আবার গ্রহের বৃত্তাকার গতির জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল,

$$F_C = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.4)$$

গ্রহের ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলই এই কেন্দ্রমুখী বল যোগান দেয়।

$\therefore \quad F_g = F_C$

বা, $\dfrac{GMm}{r^2} = \dfrac{mv^2}{r}$

বা, $\dfrac{GM}{r} = v^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.5)$

উপগ্রহটির পর্যায়কাল T হলে অর্থাৎ r ব্যাসার্ধের কক্ষপথে সূর্যকে একবার আবর্তন করতে T সময় প্রয়োজন হলে এর রৈখিক বেগ হবে, $v = \dfrac{2\pi r}{T}$

$\therefore$ (6.5) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই

$$\frac{GM}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

বা, $\dfrac{GM}{r} = \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2}$

$$\therefore \quad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) \times r^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.6)$$

এই সমীকরণে $\left(\dfrac{4\pi^2}{GM}\right) = K =$ ধ্রুবরাশি। K-এর মান $2{\cdot}97 \times 10^{-19}\ s^2m^{-3}$। এই মান সকল গ্রহের জন্য একই।

$\therefore \quad T^2 = K \times r^3$

$T^2 \propto r^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.7)$

অর্থাৎ গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ সূর্য হতে গ্রহের কক্ষপথের মধ্যবর্তী দূরত্বের ঘনের সমানুপাতিক।
ইহাই কেপলারের তৃতীয় সূত্র।

৬.৫.১ সূর্যের ভর নির্ণয়

Determination of mass of the sun

মনে করি, সূর্যের ভর M এবং m ভরের একটি গ্রহের পর্যায়কাল T এবং গ্রহটি সূর্য হতে r দূরে থেকে সূর্যের চারদিকে এটি ω কৌণিক বেগে বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করে। তা হলে গ্রহের কেন্দ্রমুখী বলের জন্য লেখা যায়,

$$\frac{GMm}{r^2} = mr\omega^2 = \frac{mr4\pi^2}{T^2} \quad \left(\because \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\therefore \quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

এখানে, T = 365 দিন = $365 \times 24 \times 3600$ s, $r = 1{\cdot}5 \times 10^{11}$ m, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$। এই মানগুলো উপরিউক্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$M = \frac{4 \times 9{\cdot}87 \times (1{\cdot}5 \times 10^{11})^3}{6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times (365 \times 24 \times 3600)^2}$$

$$= \boxed{2 \times 10^{30}\ kg}$$

নিজে কর : চাঁদ থেকে পৃথিবীর দূরত্ব 3×10^8 m এবং পৃথিবীকে একবার প্রদক্ষিণ করতে চাঁদের সময় লাগে 29.5 দিন। চাঁদের ভর নির্ণয় কর।

নিজে কর : পৃথিবীর ব্যাসার্ধ হঠাৎ অর্ধেক হয়ে গেল কিন্তু ভর অপরিবর্তিত রইল, সেক্ষেত্রে ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কী পরিবর্তন হবে ?

আমরা জানি পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হলে ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

এখন ভর M স্থির রেখে ব্যাসার্ধ অর্ধেক অর্থাৎ $\frac{R}{2}$ করলে ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g' = \frac{GM}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{4GM}{R^2} = 4g$$

সুতরাং অভিকর্ষজ ত্বরণ চারগুণ হবে।

৬.৬ জড়তা ভর ও মহাকর্ষীয় ভর
Inertial mass and gravitational mass

জড়তা ভর
Inertial mass

নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র থেকে আমরা জানি, $F = ma$। এখানে F হলো প্রযুক্ত বল, m হলো বস্তুর ভর ও a বস্তুর সৃষ্ট ত্বরণ।

ওপরের সম্পর্ক থেকে দেখা যায় যে ধ্রুব প্রযুক্ত বলের জন্য বস্তুর ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে। অর্থাৎ,

$$a \propto \frac{1}{m} \qquad [\because F = \text{ধ্রুবক}]$$

বস্তুর এই ভর m-কে **জড়তা ভর** বলে। এই ভর বস্তুর এমন একটি ধর্ম যা ত্বরণকে বাধা দেয়। সুতরাং, **জড়তা ভর বস্তুর জড়তার পরিমাপ এবং এর মান প্রযুক্ত বল ও সৃষ্ট ত্বরণের অনুপাতের সমান।**

মহাকর্ষীয় ভর
Gravitational mass

নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্র থেকে আমরা জানি, $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$। এখানে m_1 ও m_2 দুটি বস্তুর ভর এবং r হলো এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব। এই সম্পর্ক থেকে দেখা যায় যে, বস্তুর ওপর মহাকর্ষীয় বল বা টান বস্তুর ভরের সমানুপাতিক।

এই সূত্র ব্যবহার করে কোনো বস্তুর ওপর কোনো বৃহৎ বস্তুর (যেমন পৃথিবী) আকর্ষণ বল পরিমাপ করে, ওই বস্তুর ভর নির্ণয় করা যায়। বস্তুর এই ভরকে **মহাকর্ষীয় ভর** বলে। বস্তুর মহাকর্ষীয় ভর এমন একটি ভর যার ওপর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে মহাকর্ষীয় টান নির্ভর করে।

৬.৭ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষজ ত্বরণ
Gravitational constant and acceleration due to gravity

৬.৭.১ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক
Gravitational constant

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র অনুযায়ী M ও m ভরের দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বল,

$F = \frac{GMm}{d^2}$, এখানে G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক এবং d = বস্তু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব

মনে করি বস্তু দুটির মধ্যকার ভর এক একক এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বও এক একক অর্থাৎ M = 1 একক, $m = 1$ একক এবং $d = 1$ একক হলে,

$$F = \frac{G \times 1 \times 1}{1 \times 1}$$

বা, $F = G$ ... ... (6.8)

সমীকরণ (6.8) অনুযায়ী মহাকর্ষীয় ধ্রুবককে নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করতে পারি :

একক ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুকণা একক দূরত্বে থেকে যে পরিমাণ বল দ্বারা পরস্পরকে আকর্ষণ করে তার সংখ্যাগত মানকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলে। MAT(16-17,22-23)

G-এর সর্বজনীনতা : মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G-কে সর্বজনীন ধ্রুবক বলা হয়। কারণ এর মান বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী মাধ্যমের কোন ধর্ম যেমন— দিকদর্শিতা বা প্রবণতা বা প্রবেশতা ইত্যাদির উপর নির্ভর করে।

আবার, G-এর মান বস্তুর ভরের ওপর বা ভরকেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্বের ওপর নির্ভর করে না। আবার বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী মাধ্যমের প্রকৃতি, উপাদানের ওপরও নির্ভর করে না। আবার যেহেতু মহাকর্ষ বল কেলাসের দিকদর্শিতা এবং প্রবেশ্যতার ওপর নির্ভর করে না, তাই G-এর মান দিকদর্শিতা ধর্মের ওপর নির্ভর করে না। এই জন্য G-কে সর্বজনীন ধ্রুবক বলে।

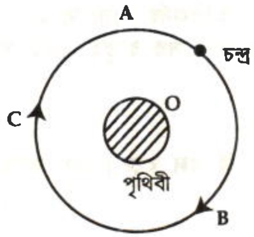
এস. আই. পদ্ধতিতে এর মান $6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ N-m^{2}kg^{-2} MAT(22-23) DAT(17-18,22-23)

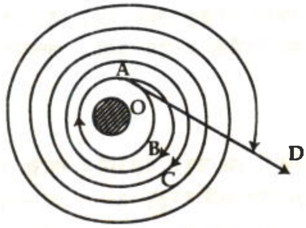
মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মাত্রা : $[G] = [M^{-1}T^{-2}L^3]$

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, G কে সর্বজনীন ধ্রুবক বলে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : যদি মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G-এর মান ধীরে ধীরে কমতে থাকে, তবে তা চন্দ্রের গতিতে কী প্রভাব ফেলবে? ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক O বিন্দুতে পৃথিবী অবস্থিত। একে কেন্দ্র করে চন্দ্র ABC বৃত্তাকার পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে। এখন, G-এর মান অপরিবর্তিত থাকলে চন্দ্র ABC পথেই গতিশীল থাকবে। অর্থাৎ গতিপথ অপরিবর্তিত থাকবে। এখন যদি হঠাৎ G-এর মান শূন্য হয় তবে চন্দ্রের ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ শূন্য হবে, ফলে চন্দ্র কক্ষপথের স্পর্শক বরাবর AD পথে ছিটকে বেরোবে। কিন্তু G-এর মান খুব ধীরে ধীরে কমতে থাকলে চন্দ্রের গতিপথ আস্তে আস্তে বাড়তে থাকবে, অর্থাৎ





চন্দ্র ক্রমশ পৃথিবী থেকে দূরে সরে যেতে থাকবে এবং গতিপথটি হবে সর্পিল (spiral)।

৬·৭·২ অভিকর্ষজ ত্বরণ
Acceleration due to gravity

নিউটনের গতির সূত্র অনুসারে বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করলে ত্বরণ সৃষ্টি হয়। অভিকর্ষও একটি বল। এই বল কোনো একটি বস্তুর ওপর ক্রিয়া করে ত্বরণ সৃষ্টি করবে। অতএব, **বস্তুতে অভিকর্ষ বল কর্তৃক যে ত্বরণ উৎপন্ন হয় তাকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে।** অথবা **কোনো স্থানে অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে ওই স্থানের অভিকর্ষজ বা অভিকর্ষীয় ত্বরণ বলে।** একে 'g' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পরীক্ষার সাহায্যে জানা গেছে, বাধাহীন পথে ও একই স্থান হতে সকল বস্তু সমত্বরণে পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে পতিত হয়। স্থানভেদে এই ত্বরণের মান বিভিন্ন। সুতরাং **অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তু নিরপেক্ষ, স্থান নিরপেক্ষ নয়। পৃথিবীর 45° অক্ষাংশে অভিকর্ষজ ত্বরণকে আদর্শ মান ধরা হয়।**

একক ও মাত্রা :

এর একক এম.কে.এস. ও আন্তর্জাতিক SI পদ্ধতিতে মিটার/সে^{2}। এর মাত্রা সমীকরণ = $[LT^{-2}]$

৬·৭·৩ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষজ ত্বরণের সম্পর্ক
Relation between gravitational constant and acceleration due to gravity

মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত এবং পৃথিবী একটি গোলাকার বস্তু [চিত্র ৬·৫]। যদি পৃথিবীর ভর 'M' এবং ব্যাসার্ধ 'R' হয়, তবে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র হতে আমরা পাই,

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.9)$$

পুনরায় নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র হতে আমরা পাই,

বল = ভর × ত্বরণ

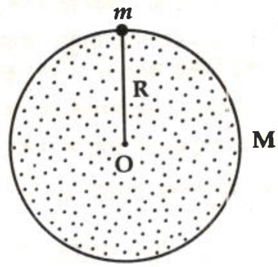
∴ অভিকর্ষীয় বল = বস্তুর ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ। অর্থাৎ,

$$F = mg \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.10)$$

∴ সমীকরণ (6.9) এবং সমীকরণ (6.10) হতে আমরা পাই,

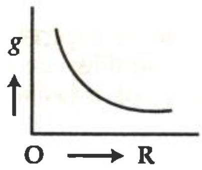
$$mg = G\frac{Mm}{R^2}$$

বা, $$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.11)$$



চিত্র ৬·৫

এই সমীকরণ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষজ ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।



চিত্র ৬.৬

অর্থাৎ অভিকর্ষজ ত্বরণ = $\dfrac{\text{মহাকর্ষ ধ্রুবক} \times \text{পৃথিবীর ভর}}{(\text{পৃথিবীর ব্যাসার্ধ})^2}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধের মধ্যে সম্পর্ককে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় [চিত্র ৬.৬]।

আমরা জানি G এবং M ধ্রুব রাশি। সুতরাং, সমীকরণ (6.11) থেকে পাই, $g \propto \dfrac{1}{R^2}$ অর্থাৎ কোনো স্থানে g-এর মান পৃথিবীর কেন্দ্র থেকেওই স্থানের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।

অতএব ভূপৃষ্ঠের কোনো স্থানে 'g'-এর মান ভূ-কেন্দ্র হতে ওই স্থানের দূরত্বের ওপর নির্ভর করে। এটি হতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে, **ভূপৃষ্ঠের কোনো একটি স্থানে g-এর মান নির্দিষ্ট, কিন্তু স্থানভেদে এর পরিবর্তন ঘটে।** পৃথিবীর ভর $M = 5.983 \times 10^{24}$ kg এবং ব্যাসার্ধ $R = 6.36 \times 10^6$ m ধরে ওপরের সমীকরণ অনুসারে ভূপৃষ্ঠে g-এর মান হয়,

$$g = \frac{6.657 \times 10^{-11}\ \text{N-m}^2\ \text{kg}^{-2} \times 5.983 \times 10^{24}\ \text{kg}}{(6.36 \times 10^6\ \text{m})^2} = 9.8465\ \text{ms}^{-2}$$

সমীকরণ (6.11) থেকে আরও দেখা যায় যে, কোনো স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বস্তুর ভরের (m) ওপর নির্ভর করে না; অর্থাৎ কোনো নির্দিষ্ট স্থানে অবাধে পতনশীল হাল্কা ও ভারী সব বস্তুই একই অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g' নিয়ে নিচে পড়ে।

বস্তুর ওজন

কোনো বস্তুকে পৃথিবী যে বলে আকর্ষণ করে তাকে অভিকর্ষ বল বলে। এই অভিকর্ষ বলই হচ্ছে বস্তুর ওজন। কোনো বস্তুর ভর m হলে ওই বস্তুর ওজন, $W = mg$

পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ হলে পৃথিবীর ভর, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

সুতরাং, ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে ($r = R$) অভিকর্ষজ ত্বরণের মান হবে,

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R \rho$$

কাজ : (ক) একজন লোক মোটর গাড়িতে বসে আছে। তার ভর 70 kg। মোটর গাড়িটি 4 ms^{-2} ত্বরণসহ চলছে। লোকটির ওপর অভিকর্ষ বল কত ?
(খ) একটি লিফ্‌ট 15 ms^{-1} বেগে ওপরে উঠছে। 60 kg ভরের একজন মানুষ লিফ্‌টে অবস্থান করলে লিফ্‌টের ওপর তার প্রতীয়মান ওজন কত ?

(ক) অভিকর্ষ বল, $W = m(g + 0) = 70(9.8 + 0) = 686$ N

(খ) ওজন, $W = m(g + 0) = 60(9.8 + 0) = 588$ N

***

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষীয় ত্বরণ এর মধ্যে সম্পর্ক থেকে আমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো জানতে পারি—

(i) G একটি সর্বজনীন ধ্রুবক, অন্যদিকে g একটি পরিবর্তনশীল রাশি

(ii) G-এর মান 6.657×10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}, অন্যদিকে g এর মান 9.8 ms^{-2}

(iii) G একটি স্কেলার রাশি, অন্যদিকে g একটি ভেক্টর রাশি।

(iv) G-এর মান বস্তুর ভরের ওপর বা ভূকেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্বের ওপর নির্ভর করে না। অন্যদিকে g-এর মান ভরের ওপর নির্ভর করে না। কিন্তু ভূকেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্বের ওপর নির্ভর করে।

G এবং g-এর সম্পর্ক থেকে শিক্ষার্থীদের প্রশ্ন করা হলো—পৃথিবী কেন ভর নিরপেক্ষভাবে সকল বস্তুতে সমান ত্বরণ সৃষ্টি করে? এর জবাবে নিশ্চয় তোমরা বলবে, পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে M ও R ধরা হলে, পৃথিবী পৃষ্ঠে m ভরের কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে, $mg = G\dfrac{mM}{R^2}$।

$\therefore\ g = \dfrac{GM}{R^2}$ যেহেতু এই সমীকরণে বস্তুর ভর m অনুপস্থিত, কাজেই অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভর নিরপেক্ষ। সুতরাং R ধ্রুবক হলে কোনো স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ ধ্রুবক ও বস্তুর ভর নিরপেক্ষ হয়।

৬.৮ পৃথিবীর ভর ও গড় ঘনত্ব নির্ণয়
Determination of mass and average density of earth

পৃথিবীর ভর M, ব্যাসার্ধ R ধরে এবং পৃথিবীকে সুষম গোলক বিবেচনা করে লেখা যায়, $g = \frac{GM}{R^2}$

$\therefore\ M = \frac{gR^2}{G}$

এখানে, $R = 6.4 \times 10^6$ m এবং $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}

প্রতিটি রাশির মান বসিয়ে পৃথিবীর ভর পাওয়া যায়,

$$M = \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}}$$
$$= 6 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

আবার পৃথিবীর গড় ঘনত্ব ρ হলে, $\rho = \frac{M}{V}$ হয়। এখানে V = পৃথিবীর আয়তন $= \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\therefore\ \rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi GR} = \frac{3 \times 9.8}{4 \times 3.14 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 6.4 \times 10^6}$$
$$= 5.48 \times 10^3\ \text{kgm}^{-3}$$

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৪

১। পৃথিবীর ভর অপরিবর্তিত থেকে যদি ব্যাসার্ধ 2% হ্রাস পায়, তবে পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ কত শতাংশ বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

আমরা জানি ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = \frac{GM}{R^2}$

উভয়দিকে $\log_e$ নিয়ে পাই,

$$\log_e g = \log_e \frac{GM}{R^2}$$

or, $\log_e g = \log_e (GM) - 2\log_e R$

∴ অবকলন করে পাই,

$$\frac{dg}{g} = \frac{-2dR}{R} \quad [\because G \text{ ও } M \text{ ধ্রুবক}]$$

এখন 2% হ্রাস পাওয়ার অর্থ হলো, $\frac{dR}{R} = \frac{-2}{100}$

$$\therefore\ \frac{dg}{g} = -2 \times \left(\frac{-2}{100}\right) = \frac{4}{100}$$

সুতরাং, g-এর শতকরা পরিবর্তন $= \frac{dg}{g} \times 100\% = 4\%$

অর্থাৎ g-এর মান 4% বৃদ্ধি পাবে।

৬.৯ অভিকর্ষীয় ত্বরণের পরিবর্তন
Variation of acceleration due to gravity

মহাকর্ষ সূত্র থেকে জেনেছি যে, অভিকর্ষজ ত্বরণ (g)-এর মান বস্তুর ভর (m)-এর ওপর নির্ভর করে না। g-এর মান ভূকেন্দ্র হতে ওই স্থানের দূরত্বের ওপর নির্ভর করে। এটি হতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে, ভূপৃষ্ঠে কোনো স্থানে g-এর মান নির্দিষ্ট, কিন্তু স্থানভেদে এর পরিবর্তন ঘটে।

পৃথিবী পৃষ্ঠে g-এর মান বেশি হয়। আবার মেরু অঞ্চল অপেক্ষা বিষুব অঞ্চলে কম হয়। পৃথিবীর কেন্দ্রে শূন্য হয়। ভূপৃষ্ঠে বিভিন্ন স্থানে g-এর মান বিভিন্ন বলে 45° অক্ষাংশে সমুদ্র সমতলে g-এর মানকে আদর্শ মান ধরা হয়। এই আদর্শ মান হচ্ছে 9.80665 ms^{-2}। হিসাবের সুবিধার জন্য g-এর মান 9.78918 ms^{-2} বা 9.81 ms^{-2} ধরা হয়। MAT(17-18)

অভিকর্ষজ ত্বরণ g ধ্রুবক নয়। তিনটি কারণে অভিকর্ষজ ত্বরণের পরিবর্তন ঘটে।

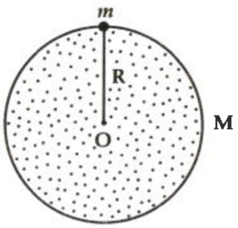
(১) উচ্চতার ক্রিয়া (Altitude effect)

(২) অক্ষাংশ ক্রিয়া বা আকৃতি ক্রিয়া (Latitude effect or effect of shape)

(৩) পৃথিবীর ঘূর্ণন ক্রিয়া বা পৃথিবীর আহ্নিক গতি ক্রিয়া (Rotational effect of the earth or effect of diurnal rotation of the earth)

(১) উচ্চতার ক্রিয়া (Altitude effect)

পৃথিবীর কেন্দ্র হতে কোনো স্থানের দূরত্বের তারতম্য ভেদে অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g'-এর মানের পরিবর্তন ঘটে। এটি আলোচনা করতে হলে তিনটি বিষয় আলোচনা করতে হয়; যথা—



চিত্র ৬·৭

ক. কোনো বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত : যদি 'M' ভর এবং 'R' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থান করে [চিত্র ৬·৭] তবে ওই বস্তুর ওপর তথা ভূপৃষ্ঠে,

$$g = G\frac{M}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.12)$$

$$= \frac{G}{R^2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\pi G R \rho$$

$$\therefore \ g = \frac{4}{3}\pi G R \rho \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.13) \ \left(\because M = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)$$

এখানে, ρ = পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব ও $\frac{4}{3}\pi R^3$ = পৃথিবীর আয়তন।

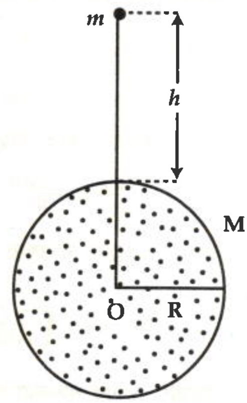
হাতে-কলমে কাজ : দার্জিলিং-এ কোনো জিনিস স্প্রিং তুলায় মেপে কেনা লাভজনক নাকি সাধারণ তুলায় মেপে কেনা লাভজনক?

দার্জিলিং সমুদ্র পৃষ্ঠ থেকে অনেক ওপরে অবস্থিত বলে g-এর মান কিছুটা কম। এই জ্ঞান কাজে লাগাও।

খ. কোনো বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে ওপরে অবস্থিত : মনে করি M পৃথিবীর ভর এবং R তার ব্যাসার্ধ। যদি বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অবস্থান করে [চিত্র ৬·৮] তবে ওই বস্তুর ওপর তথা ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণ,

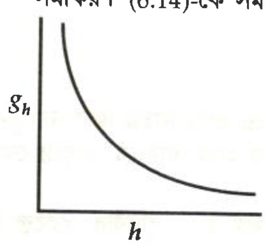
$$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.14)$$

আমরা জানি, ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = G\frac{M}{R^2}$। অতএব দেখা যায় যে, এই সমীকরণ অপেক্ষা সমীকরণ (6.14)-এ হরের মান বেশি। কাজেই ভাগফল অর্থাৎ অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান কম হবে। অতএব পৃথিবী পৃষ্ঠ অপেক্ষা ওপরে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান কম হবে এবং দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হবে। সুতরাং দূরত্ব বাড়লে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান কমবে এবং দূরত্ব কমলে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান বাড়বে। এই কারণে পাহাড়ের ওপর অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান অপেক্ষা কম হয়।



চিত্র ৬·৮

সমীকরণ (6.14)-কে সমীকরণ (6.12) দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়,



চিত্র ৬·৮(ক)

$$\frac{g_h}{g} = \frac{GM}{(R+h)^2} \times \frac{R^2}{GM}$$

বা, $$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad [6.14(a)]$$

বা, $$g_h = \frac{R^2 \times g}{(R+h)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad [6.14(b)]$$

আবার 6.14(a) সমীকরণ থেকে,

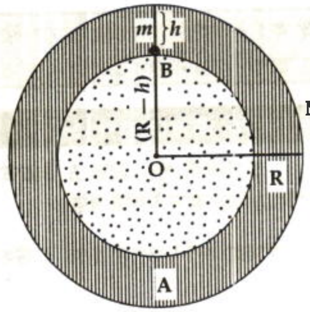
$$\frac{g_h}{g} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$= \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}; \quad h << R \text{ হলে}, \frac{g_h}{g} = 1 - \frac{2h}{R}$$

বা, $g_h = g\left(1-\frac{2h}{R}\right)$ ... ... (6.15)

অর্থাৎ, $g_h < g$। সুতরাং **বলা যায় h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান ভূপৃষ্ঠের ত্বরণের মান অপেক্ষা কম** [চিত্র ৬.৮(ক)]। 6.14(a) সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, **h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ ভূকেন্দ্র থেকে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।** অর্থাৎ ভূপৃষ্ঠ হতে যতই ওপরে ওঠা যায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান ততই কমতে থাকে।

গ. কোনো বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে নিচে বা অভ্যন্তরে অবস্থিত : মনে করি পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h দূরত্ব নিচে B বিন্দুতে কোনো বস্তু আছে এবং ওই স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g'_h [চিত্র ৬.৯]। B বিন্দুতে অবস্থিত যেকোনো বস্তুর ওপর ভূ-কেন্দ্র O-এর দিকে পৃথিবীর আর্কষণ $(R-h)$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট AB গোলকের আর্কষণের সমান। এই গোলকের বাইরের অংশ বস্তুর ওপর কার্যকর কোনো আকর্ষণ প্রয়োগ করে না।



চিত্র ৬.৯

এখন OB গোলকের আয়তন = $\frac{4}{3}\pi(R-h)^3$

OB গোলকের ভর M′ ধরলে,

M′ = আয়তন × ঘনত্ব = $\frac{4}{3}\pi(R-h)^3 \times \rho$

$$g'_h = \frac{GM'}{(R-h)^2} = G\times\frac{4}{3}\pi\frac{(R-h)^3\rho}{(R-h)^2}$$

বা, $g'_h = \frac{4}{3}\pi G(R-h)\rho$ ... ... (6.16)

বা, $g_h = K(R-h)$ ... ... (6.17)

এখানে, $K = \frac{4}{3}\pi G\rho =$ একটি ধ্রুব রাশি।

সমীকরণ (6.16)-কে সমীকরণ (6.13) দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়,

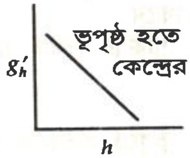
$$\frac{g_h'}{g} = \frac{\frac{4}{3}\pi G(R-h)\rho}{\frac{4}{3}\pi GR\rho}$$

বা, $\frac{g_h'}{g} = \frac{R-h}{R} = \left(1-\frac{h}{R}\right)$

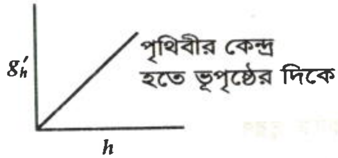
$\therefore \quad g_h' = g\left(1-\frac{h}{R}\right)$ ... ... (6.18)

অর্থাৎ, $g_h' < g$। সুতরাং **h গভীরে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান ভূপৃষ্ঠের ত্বরণের মান অপেক্ষা কম।**

ওপরের সমীকরণ অনুসারে h-এর মান যত বাড়বে, $(R-h)$-এর মান তত কমবে। অতএব, পৃথিবীর যত ভেতরের দিক যাওয়া যাবে, অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান ততই কমবে [চিত্র ৬.৯(ক)]।



চিত্র ৬.৯(ক)



চিত্র ৬.৯(খ)

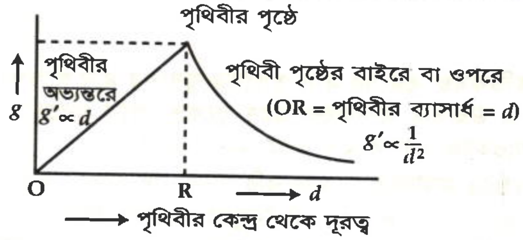
আবার ভূকেন্দ্র হতে ভূপৃষ্ঠের দিকে অভিকর্ষীয় ত্বরণ দূরত্বের সমানুপাতে বৃদ্ধি পায় [চিত্র ৬.৯(খ)]। অর্থাৎ কেন্দ্র হতে পৃষ্ঠের দিকে যতই যাওয়া যায় ততই অভিকর্ষজ ত্বরণ বৃদ্ধি পায়। এভাবে যেতে যেতে যদি ভূ-কেন্দ্রে পৌছা যায় তবে h-এর মান R-এর সমান হবে। অর্থাৎ $h = R$ হয়।

অতএব ভূ-কেন্দ্রে, $g_h' = k(R-R)$ বা, $g_h' = 0$ ... ... (6.19)

সুতরাং পৃথিবীর অভ্যন্তরে, যেমন কোনো খনির ভেতরে g-এর মান ভূপৃষ্ঠে g-এর মান অপেক্ষা কম হয়।

সিদ্ধান্ত : ভূপৃষ্ঠের ওপরে গেলে 'g'-এর মান কমে, আবার পৃথিবীর অভ্যন্তরে গেলে 'g'-এর মান কমে। পৃথিবীর কেন্দ্রে কোনো আকর্ষণ নেই। তাই পৃথিবীর কেন্দ্রে 'g'-এর মান শূন্য এবং কোনো বস্তুর ওজনও শূন্য হবে। সুতরাং ভূপৃষ্ঠে g-এর মান সবচেয়ে বেশি এবং কেন্দ্রে শূন্য। DAT(08-09)

কাজ : পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান এবং দূরত্বের লেখচিত্রটি কীরূপ হবে ?



চিত্র ৬·১০

পৃথিবীর বাইরে অভিকর্ষজ ত্বরণ পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে দূরত্বের (d) বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। অভিকর্ষজ ত্বরণ পৃথিবী আর পৃথিবীর ভেতরে কেন্দ্র থেকে দূরত্বের সমানুপাতিক। পৃথিবীর কেন্দ্রে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান শূন্য। ভূকেন্দ্র থেকে অভিকর্ষজ ত্বরণের পরিবর্তন লেখচিত্রে [চিত্র ৬·১০] দেখানো হলো।

যাচাই কর : একটি দালানের ছাদে ওঠে একটি বলকে ওপরের দিকে এবং অন্য একটি বলকে নিচের দিকে একই বেগে ছোড়া হলো। কোন বলটি অধিক গতিবেগে মাটিতে পড়বে? ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৫

১। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় এবং পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে d গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান সমান। d-এর সাপেক্ষে h-এর মান নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০২২]

আমরা জানি ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায়, $g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$

এবং ভূপৃষ্ঠ হতে d গভীরতায়, $g_d = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$

প্রশ্নানুসারে, $g_h = g_d$

$\therefore \quad g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$

বা, $1 - \frac{2h}{R} = 1 - \frac{d}{R}$

বা, $\frac{2h}{R} = \frac{d}{R}$

বা, $2h = d \quad \therefore \quad h = \frac{d}{2}$

২। পৃথিবীকে 6400 km ব্যাসার্ধের একটি গোলক ধরলে ভূপৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান ভূপৃষ্ঠের অভিকর্ষীয় ত্বরণের মানের $\frac{1}{64}$ অংশ হবে ? [চ. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৬; RU-C Admission Test, 2022-23]

আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400$ km
$= 6400 \times 10^3$ m
$= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $= g$
h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \frac{g}{64}$
পৃথিবীর ভর $= M$
উচ্চতা, $h = ?$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{g'}{g} = \frac{GM}{(R+h)^2} \times \frac{R^2}{GM} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

বা, $\frac{g/64}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$

বা, $\frac{1}{64} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$

বা, $\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 64 = 8^2$

বা, $\frac{R+h}{R} = 8$

$\therefore$ $1 + \frac{h}{R} = 8$

$\frac{h}{R} = 8 - 1 = 7$

$\therefore$ $h = 7R = 7 \times 6{\cdot}4 \times 10^6 = 44{\cdot}8 \times 10^6 m = 4{\cdot}48 \times 10^4$ km

৩। মঙ্গল গ্রহের ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের 0·532 গুণ এবং এর ভর 0·11 গুণ। ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ 9·8 ms^{-2} হলে মঙ্গল পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ কত ? [KUET Admission Test, 2014-15 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

এক্ষেত্রে,

$$g_m = \frac{GM_m}{R_m^2} \text{ এবং } g_e = \frac{GM_e}{R_e^2}$$

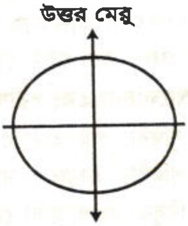
$$\therefore \frac{g_m}{g_e} = \frac{GM_m}{R_m^2} \times \frac{R_e^2}{GM_e}$$

$$\therefore g_m = \frac{M_m}{M_e} \times \frac{R_e^2}{R_m^2} \times g_e$$

$$= \frac{0{\cdot}11\,M_e}{M_e} \times \frac{R_e^2}{(0{\cdot}532)^2 R_e^2} \times 9{\cdot}8 = 3{\cdot}8\ ms^{-2}$$

(২) অক্ষাংশ ক্রিয়া বা আকৃতি ক্রিয়া (Latitude effect or effect of shape) :

পৃথিবী সম্পূর্ণ গোলাকার নয়; উত্তর-দক্ষিণ কিছুটা চাপা এবং নিরক্ষীয় অঞ্চলে কিছুটা স্ফীত, অর্থাৎ পৃথিবী আকৃতিতে হ্রস্বাক্ষ উপগোলক (oblate spheriod) [চিত্র ৬·১১]। পৃথিবীর মেরু-ব্যাসার্ধের (polar radius) চেয়ে নিরক্ষীয়-ব্যাসার্ধ (equatorial radius) প্রায় 22 km বেশি। ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক বলে মেরু অঞ্চলে g-এর মান সর্বোচ্চ এবং নিরক্ষীয় অঞ্চলে সর্বনিম্ন হয়। অন্য যেকোনো স্থানে g-এর মান এই দুটি প্রান্তিক মানের মধ্যে থাকে। DAT(18-19,20-21)

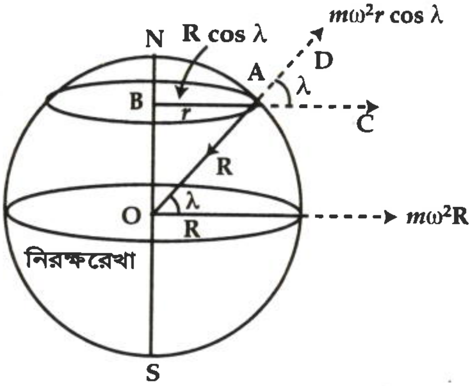


চিত্র ৬·১১

(৩) পৃথিবীর ঘূর্ণন ক্রিয়া বা পৃথিবীর আহ্নিক গতি ক্রিয়া (Rotational effect of the earth or effect of diurnal rotation of the earth) :

পৃথিবী নিজ অক্ষের চারদিকে ঘুরছে বলে একমাত্র দুটি মেরুতে অবস্থিত বস্তু ছাড়া ভূপৃষ্ঠের অন্য সব বস্তুই বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। বৃত্তাকার পথগুলোর কেন্দ্র পৃথিবীর অক্ষের ওপর থাকে। এ কারণে বস্তুগুলোর ওপর অপকেন্দ্র বল ক্রিয়া করে। এই বলের মান নিরক্ষরেখায় অবস্থিত বস্তুর ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ এবং দুটি মেরুর ক্ষেত্রে শূন্য হয়। এই বল অভিকর্ষের বিপরীত অভিমুখে ক্রিয়া করায় বস্তুর ওজনের আপাত হ্রাস হয়।

মনে করি m ভরের কোনো বস্তু ভূপৃষ্ঠে λ অক্ষাংশে A বিন্দুতে আছে [চিত্র ৬.১২]। পৃথিবী কৌণিক বেগে নিজ অক্ষ NS-এর চারদিকে ঘুরছে বলে ওই বস্তু ω কৌণিক বেগে $AB = r$ ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে ঘোরে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R হলে $r = R\cos\lambda$। এই ঘূর্ণনের জন্য বস্তুর ওপর AC অভিমুখে অপকেন্দ্র বল $m\omega^2 r$ ক্রিয়া করে। অভিকর্ষের জন্য বস্তুর ওপর $F = mg$ বল পৃথিবীর কেন্দ্র অর্থাৎ AO অভিমুখে ক্রিয়া করে। বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অপকেন্দ্র বল D অভিমুখে অর্থাৎ অভিকর্ষের বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। এর উপাংশ হলো $m\omega^2 r\cos\lambda$। A বিন্দুতে m ভরের বস্তুর ওপর কার্যকর অভিকর্ষ বল $F' = F - F_\lambda$। অতএব, A বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ g' হলে A বিন্দুতে অবস্থিত বস্তুর আপাত ওজন,



চিত্র ৬.১২

$$mg' = mg - m\omega^2 r\cos\lambda$$
$$= mg - m\omega^2 R\cos^2\lambda \quad [\because r = R\cos\lambda]$$

এখানে, $\omega^2 R\cos^2\lambda$ = অভিকর্ষজ ত্বরণ হ্রাসের মান।

A বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g' হলে বস্তুটির আপাত ওজন হয় mg'

অতএব $$g' = g\left(1 - \frac{\omega^2 R\cos^2\lambda}{g}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.20)$$

এখানে,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

T = পৃথিবীর নিজ অক্ষের ওপর আবর্তনকাল = 24 ঘণ্টা

বিষুব রেখা বরাবর বা নিরক্ষরেখায় $\lambda = 0°$; কাজেই $\cos\lambda = 1$

$$\therefore \quad g' = g\left(1 - \frac{\omega^2 R}{g}\right) = g - \omega^2 R = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.21)$$

অর্থাৎ নিরক্ষরেখাতে অভিকর্ষজ ত্বরণ পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে কম।

আবার, মেরু বিন্দুতে $\lambda = 90°$; কাজেই $\cos\lambda = 0$; $\therefore \; g' = g$। অর্থাৎ মেরু এবং ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান একই।

সুতরাং পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণনের দরুন g-এর মান পরিবর্তিত হয়। পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য বিষুবীয় অঞ্চলে বা নিরক্ষরেখায় g-এর মান সর্বনিম্ন এবং দুটি মেরুতে সর্বোচ্চ হয়। ওজনের ক্ষেত্রেও একই ঘটনা ঘটবে। অন্যান্য স্থানে g-এর মান এই দুটি প্রান্তিক মানের মধ্যে থাকে। স্পষ্টত পৃথিবীর আকৃতি ও আহ্নিক গতির দরুন g-এর মানের পরিবর্তনের জন্য বস্তুর ওজন বিষুবীয় অঞ্চল থেকে মেরু অঞ্চলের দিকে ক্রমশ বৃদ্ধি পায়। পৃথিবীর আহ্নিক গতি না থাকলে অভিকর্ষজ ত্বরণের মানও হ্রাস পাবে না। ফলে ঘূর্ণনরত অবস্থায় বাস্তব ওজন যা হবে ঘূর্ণন বন্ধ হয়ে গেলে ওজন তার চেয়ে বেশি হবে। MAT(24-25)

পূর্বের আলোচনা এবং পরীক্ষালব্ধ ফলাফল হতে g-এর মান সম্পর্কে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্ত নিতে পারি। MAT(13

(১) পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে ওপর দিকে উঠলে এর মান কমে।

(২) পৃথিবীর অভ্যন্তরে নামলে এর মান কমে।

(৩) বিষুব অঞ্চল হতে মেরু অঞ্চলে অগ্রসর হলে এর মান বাড়ে।

(৪) ঘূর্ণনজনিত কারণে মেরু অঞ্চলে এর মান অল্প কমে, কিন্তু বিষুবীয় অঞ্চলে বেশি কমে।

(৫) মেরুতে g-এর মান = 9.832 ms^{-2}; বিষুব অঞ্চলে g-এর মান = 9.780 ms^{-2}
[ঢাকায় g-এর মান = 9.7835 ms^{-2}; রাজশাহীতে g-এর মান = 9.790 ms^{-2}]

(৬) ভূপৃষ্ঠে g-এর মান বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন বলে সমুদ্র পৃষ্ঠে এবং 45° অক্ষাংশে g-এর মানকে আদর্শ মান ধরা হয়। g-এর আদর্শ বা ব্যবহারিক মান = 9.81 ms^{-2}

(৭) g-এর মান জেনে পৃথিবীর গড় ঘনত্ব সম্বন্ধে ধারণা লাভ করা যায়।

(৮) পৃথিবীর নিজ অক্ষের ওপর আবর্তনকাল 24 ঘণ্টা।

(৯) নিরক্ষীয় অঞ্চলে এর মান সর্বনিম্ন, মেরুতে সর্বাধিক।

ব্যাখ্যা কর : একটি যাত্রীপূর্ণ নৌকার যাত্রীদের দাঁড়াতে নিষেধ করা হয় কেন ?

যাত্রীরা বসা অবস্থায় নৌকার ভারকেন্দ্র যেখানে অবস্থিত থাকে যাত্রীরা দাঁড়ালে ওই অবস্থায় তা কিছুটা ওপরে ওঠে যায় বিধায় যাত্রীপূর্ণ নৌকা অস্থির সাম্যাবস্থায় পৌছায়। এতে নৌকাটি উল্টে যেতে পারে, তাই যাত্রীদের দাঁড়াতে নিষেধ করা হয়।

অনুসন্ধান : কোনো কারণে পৃথিবীর আবর্তন বন্ধ হলে নিরক্ষীয় রেখায় অবস্থিত কোনো বস্তুর ওজনের কীরূপ পরিবর্তন হবে? ব্যাখ্যা কর।

নিরক্ষররেখায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান, $g' = g - \omega^2 R$। এখানে g = পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, ω = পৃথিবীর কৌণিক বেগ। সুতরাং, পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য নিরক্ষীয় রেখায় অবস্থিত কোনো বস্তুর ওজন,

$$W = W' - m\omega^2 R$$

এখন পৃথিবীর আবর্তন বন্ধ হয়ে গেলে, $\omega = 0$ হয়। অতএব, $W' = W$

এক্ষেত্রে বস্তুর ওজন বৃদ্ধি, $\Delta W = m\omega^2 R$

অতএব, ওজনের শতকরা বৃদ্ধি,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta W}{W} \times 100\% &= \frac{m\omega^2 R}{mg} \times 100\% \\
&= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times \frac{R}{g} \times 100\% \\
&= \frac{4\pi^2}{(24 \times 60 \times 60)^2} \times \frac{6400 \times 10^3}{9{\cdot}8} \times 100\% \\
&= 0{\cdot}3465\%
\end{aligned}$$

অর্থাৎ বস্তুটির আপাত ওজন $0{\cdot}3465\%$ বৃদ্ধি পাবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৬

১। পৃথিবীর আহ্নিক গতির কৌণিক দ্রুতি $7{\cdot}3 \times 10^{-5}$ rad s^{-1}। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km এবং মেরু অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ $9{\cdot}8$ ms^{-2} হলে, বিষুব রেখায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$\begin{aligned}
g' &= g - \omega^2 R \\
&= 9{\cdot}8 - (7{\cdot}3 \times 10^{-5})^2 \times 6{\cdot}4 \times 10^6 \\
&= 9{\cdot}766 \text{ ms}^{-2}
\end{aligned}$$

এখানে,

মেরু অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}

কৌণিক দ্রুতি, $\omega = 7{\cdot}3 \times 10^{-5}$ rad s^{-1}

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400$ km $= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

বিষুব অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = ?$

২। ঢাকার অক্ষাংশ 23° উত্তর। আহ্নিক গতি না থাকলে ঢাকায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কতটুকু বৃদ্ধি পেত? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km)

আমরা জানি,

$$g' = g\left(1 - \frac{\omega^2 R \cos^2\lambda}{g}\right)$$

$$\therefore \quad g' = g - \omega^2 R \cos^2\lambda$$

$$g - g' = \omega^2 R \cos^2\lambda$$

এখানে দেওয়া আছে,

ঢাকার অক্ষাংশ, $\lambda = 23°$

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400$ km $= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

আহ্নিক গতির অনুপস্থিতিতে অভিকর্ষজ ত্বরণের বৃদ্ধি, $g - g' = ?$

কিন্তু পৃথিবীর কৌণিক বেগ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{86400 \text{ s}} = 7{\cdot}269 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\therefore \quad g - g' = (7{\cdot}269 \times 10^{-5})^2 \times 6{\cdot}4 \times 10^6 \cos^2 23° = 0{\cdot}0286 \text{ ms}^{-2}$$

৩। পৃথিবীর কৌণিক বেগ বর্তমান কৌণিক বেগের কতগুণ হলে বিষুবীয় অঞ্চলে ভূপৃষ্ঠের কোনো বস্তু পৃথিবী থেকে ছিটকে পড়ার উপক্রম হবে? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6.4×10^6 m এবং বিষুবীয় অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.78039 \text{ ms}^{-2}$)

আমরা জানি বিষুবীয় অঞ্চলে,

$$g = \frac{GM}{R^2} - \omega R^2, \text{ এখানে } \omega = \text{পৃথিবীর কৌণিক বেগ}$$

বা, $\frac{GM}{R^2} = g + \omega^2 R$

ভূপৃষ্ঠ হতে কোনো বস্তু ছিটকে পড়ার উপক্রম হলে ওই স্থানে লব্ধি ত্বরণ শূন্য হতে হবে।

এখানে,

$g = 9.78039 \text{ ms}^{-2}$

$R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{24 \times 60 \times 60}$

$= 7.272 \times 10^{-5} \text{ rads}^{-1}$

ধরা যাক, পৃথিবীর বর্তমান কৌণিক বেগ ω-এর n গুণ হলে $g = 0$ হবে।

$\therefore \; 0 = \frac{GM}{R^2} - (n\omega)^2 R$

বা, $n^2\omega^2 R = g + \omega^2 R$

বা, $(n^2 - 1)\,\omega^2 R = g$

বা, $n^2 - 1 = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{9.78039}{(7.272 \times 10^{-5})^2 \times 6.4 \times 10^6} = 289$

বা, $n^2 = 289 + 1 = 290$

$\therefore \; n = \sqrt{290} = 17.03$

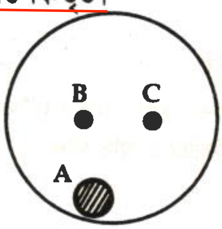
অর্থাৎ বর্তমান কৌণিক বেগ ω-এর 17·03 গুণ কৌণিক বেগ হলে বিষুবীয় অঞ্চলে একটি বস্তু পৃথিবী থেকে ছিটকে পড়ার উপক্রম হবে।

৬·১০ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র ও মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য
Gravitational field and gravitational field intensity

৬·১০·১ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র
Gravitational field

দুটি বস্তুর মধ্যে মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল বস্তু দুটির সংস্পর্শ ছাড়াই ক্রিয়া করে। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের ধারণা থেকে এই বলের প্রকৃতি খুব ভালোভাবে বোঝা যায়। এই ধারণা অনুযায়ী একটি বস্তুর চারদিকের অঞ্চল ওই বস্তুর উপস্থিতির জন্য বিশেষ ধর্ম লাভ করে। এই ধর্মের দরুন ওই অঞ্চলে অন্য কোনো বস্তু আনলে তার ওপর মহাকর্ষীয় বল ক্রিয়া করে। যেকোনো অঞ্চলে এই শর্ত পূরণ হলে বোঝা যায় যে, ওই অঞ্চলে একটি মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র আছে। অতএব মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র মহাকর্ষীয় বল সঞ্চালন প্রক্রিয়ায় মধ্যস্থতার ভূমিকা পালন করে।

কোনো বস্তুর চারপাশে যে অঞ্চলব্যাপী এর মহাকর্ষীয় প্রভাব বজায় থাকে, অর্থাৎ অন্য কোনো বস্তু রাখা হলে সেটি আকর্ষণ বল লাভ করে, তাকে বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে। তাত্ত্বিকভাবে একটি বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।



চিত্র ৬·১৩

এটি মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র যার ফলে ওই ক্ষেত্রে অবস্থিত একটি বস্তু অপর একটি বস্তুর ওপরে বল প্রয়োগ করে।

চিত্র ৬·১৩-এ একটি বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের মধ্যে A বিন্দুতে একটি বড় ভরের বস্তু আছে। এর কারণে বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রব্যাপী একটি মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র সৃষ্টি হয়েছে। এখন B অথবা C বিন্দুতে যেকোনো ভরের বস্তু রাখলে তার ওপর মহাকর্ষীয় বল ক্রিয়াশীল হবে। B ও C বিন্দুর দূরত্ব যত বেশি হবে বলের মান তত কমতে থাকবে। প্রকৃতপক্ষে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের মধ্যে সর্বত্র এর প্রভাব সমান থাকে না। বিভিন্ন বিন্দুতে এর প্রভাব বিভিন্ন হয়। এই প্রভাব পরিমাপ করা হয় মহাকর্ষ ক্ষেত্র প্রাবল্য বা তীব্রতা দ্বারা। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে একক ভরের বস্তু রেখে ওই বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল দ্বারা মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র পরিমাপ করা হয়।

৬·১০·২ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য
Gravitational field intensity

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে একটি একক ভরের বস্তু স্থাপন করলে ওই ভরের ওপর যে বল ক্রিয়া করে, তাকে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য বলে।

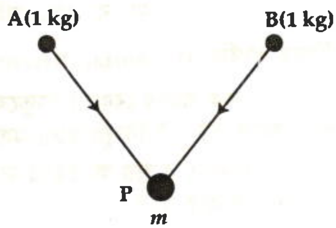
মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তুর ওপর F বল ক্রিয়া করলে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য হবে,

$$E = \frac{F}{m} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.22)$$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, m-এর মান বৃদ্ধি পেলে E হ্রাস পায়। প্রাবল্য একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক আছে। কোনো বিন্দুতে একাধিক প্রাবল্য ক্রিয়াশীল হলে ভেক্টর যোগের পদ্ধতি অনুযায়ী ওই বিন্দুতে লব্ধি প্রাবল্য গণনা করা যায়। প্রাবল্যের অভিমুখই মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের অভিমুখ নির্দেশ করে। অনেক সময় মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য বোঝাতে শুধু মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র লেখা হয়।

একক ও মাত্রা : এস. আই. পদ্ধতিতে প্রাবল্যের একক Nkg^{-1} এবং এর মাত্রা হলো LT^{-2}

এখন প্রাবল্যের দিক কোন দিকে হবে তা বোঝার জন্য মনে করি P বিন্দুতে m ভরের একটি বস্তু রাখা আছে [চিত্র ৬·১৪]। ওই বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের মধ্যে A বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য নির্ণয় করতে হলে ওই বিন্দুতে একটি একক ভরের বস্তু আছে বলে বিবেচনা করা হয়। এখন A বিন্দুতে স্থাপিত একক ভরের বস্তুটি PA বরাবর আকর্ষণ বল লাভ করবে। সুতরাং A বিন্দুতে প্রাবল্যের দিক হবে AP বরাবর। অনুরূপভাবে B বিন্দুতেও প্রাবল্যের দিক হবে BP বরাবর। সুতরাং সমীকরণ (6.22) অনুযায়ী প্রাবল্যকে ভেক্টররূপে প্রকাশ করলে, $\vec{E}_G = \frac{\vec{F}}{m}$ হয় এবং



চিত্র ৬·১৪

সেক্ষেত্রে বল, $\vec{F} = \vec{E}_G \times m$

অর্থাৎ E_G মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্যের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তু রাখলে তার ওপর mE_G বল ক্রিয়া করে। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে বল সর্বদা আকর্ষণ ধর্মী কখনো বিকর্ষণ ধর্মী হয় না।

পৃথিবীর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য ও অভিকর্ষজ ত্বরণ : ভূপৃষ্ঠে কোনো বস্তুর অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে m ভরের কোনো বস্তুর ওপর মহাকর্ষীয় বল F হচ্ছে বস্তুটির ওজন $F = mg$। আবার ভূপৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য E_G হলে,

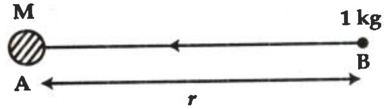
$$E_G = \frac{F}{m} = \frac{mg}{m} = g$$

অর্থাৎ **পৃথিবীর ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য আর ওই বিন্দুর অভিকর্ষজ ত্বরণ g একই।**

এখন আমরা দেখব মহাকর্ষ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুর প্রাবল্য $4\ Nkg^{-1}$ কথাটির অর্থ কী ? এর উত্তরে বলা যায় যে মহাকর্ষ ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে 1 kg ভরের একটি বস্তু রাখলে তার ওপর প্রযুক্ত আকর্ষণ বল হবে 4 N অথবা মহাকর্ষের কোনো বিন্দুতে 4 kg ভরের একটি বস্তু রাখলে তার ওপর প্রযুক্ত আকর্ষণ বল হবে 1 N।

৬·১১ বিন্দু ভরের জন্য প্রাবল্য
Gravitational intensity due to a point mass

M ভরের একটি বিন্দু ভরের জন্য r দূরত্বে B বিন্দুতে প্রাবল্য নির্ণয় করতে হলে B বিন্দুতে একক ভরের একটি বস্তু বিবেচনা করি [চিত্র ৬·১৫]। তা হলে M এবং 1 kg ভরের মধ্যকার আকর্ষণ বলই হবে ওই বিন্দুতে প্রাবল্য।



চিত্র ৬·১৫

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রানুযায়ী

প্রাবল্য, $E = \frac{GM \times 1}{r^2} \quad \therefore \quad E = \frac{GM}{r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.23)$

এর দিক BA বরাবর। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য দূরত্বের বর্গের ব্যাস্তানুপাতে পরিবর্তিত হয়।

জানার বিষয় : (i) সুষম গোলাকার খোলকের বা গোলকের ভেতরে অবস্থিত সকল বিন্দুতে প্রাবল্য শূন্য হয়।

(ii) কোনো সুষম নিরেট গোলক বা সুষম গোলাকার গোলকের ক্ষেত্রে সমস্ত ভর এদের নিজ নিজ কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে ধরে নিয়ে ওই গোলক বা গোলকের বাইরে অবস্থিত বিন্দুতে প্রাবল্য নির্ণয় করা হয়।

(iii) অভিকর্ষীয় প্রাবল্য এবং অভিকর্ষীয় ত্বরণ এর সংখ্যা মান সমান ($E = g$)

৬·১২ মহাকর্ষীয় বিভব
Gravitational Potential

কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব হবে অসীম থেকে একক ভরের কোনো বস্তুকে ওই বিন্দুতে আনতে মহাকর্ষীয় বল দ্বারা সম্পন্ন কাজের পরিমাণ।

অর্থাৎ **অসীম দূর হতে একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ওই বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে।** একে সাধারণত V দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\therefore V = \frac{W}{m}$

উল্লেখ্য, দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বলই কাজ করে থাকে। বাইরের কোনো বল বা শক্তির প্রয়োজন হয় না। সুতরাং মহাকর্ষীয় বিভবকে ঋণ রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ **মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে বিভব ঋণাত্মক। এটা একটি স্কেলার রাশি। অসীমে মহাকর্ষীয় বিভব শূন্য ধরা হয়।**

এম. কে. এস. বা এস. আই. পদ্ধতিতে এর একক জুল/কিলোগ্রাম (Jkg^{-1}) এর মাত্রা হলো L^2T^{-2}

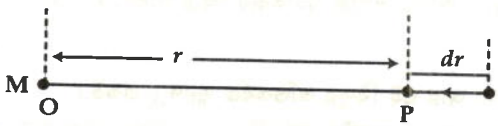
বিভব পার্থক্য (Potential difference) :

একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের এক বিন্দু হতে অন্য বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ওই দুই বিন্দুর মধ্যে মহাকর্ষীয় বিভব পার্থক্য বলে।

আকর্ষণ বলের অভিমুখে সরণ হলে বিভব পার্থক্য ঋণাত্মক এবং আকর্ষণ বলের বিরুদ্ধে সরণ হলে বিভব পার্থক্য ধনাত্মক হবে।

৬·১২·১ বিন্দু ভরের দরুন মহাকর্ষীয় বিভব
Gravitational potential due to a point mass

আমরা জানি, অসীম দূরত্ব হতে একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে উক্ত বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে। এখন বিন্দু ভরের দরুন মহাকর্ষীয় বিভবের সাধারণ সমীকরণ বের করা যাক।



চিত্র ৬·১৬

মনে করি, O বিন্দুতে M ভরের একটি বিন্দু ভর বস্তু অবস্থিত [চিত্র ৬·১৬]। O হতে r দূরে P একটি বিন্দু। P বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব বের করতে হবে।

P বিন্দুতে একক ভরের ওপর O বিন্দু অভিমুখী প্রযুক্ত বল অর্থাৎ মহাকর্ষীয় প্রাবল্য $= \frac{GM}{r^2}$। এখন একক ভরকে সামান্য দূরত্ব dr নিয়ে যেতে কাজের পরিমাণ অর্থাৎ বিভব,

$$dV = \text{বল} \times \text{সরণ} = \text{প্রাবল্য} \times \text{সরণ} = \frac{GM}{r^2}dr$$

$\therefore$ একক ভরকে অসীম দূরত্ব হতে P বিন্দুতে আনতে কাজের পরিমাণ অর্থাৎ P বিন্দুতে বিভব,

$$V = \int dV = \int_{r=\infty}^{r=r} \frac{GM}{r^2} \times dr$$

বা, $$V = GM\int_{r=\infty}^{r=r} \frac{1}{r^2}dr$$

বা, $$V = GM\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

বা, $$V = -\frac{GM}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.24)$$

এখানে ঋণচিহ্ন এই অর্থ প্রকাশ করে যে, বাহ্যিক কোনো বল বা শক্তি দ্বারা কাজ সম্পন্ন হয়নি, মহাকর্ষীয় বলই কাজ সম্পন্ন করেছে। দূরত্ব বৃদ্ধি পেলে মহাকর্ষ বিভব বৃদ্ধি পায়। **অসীমে কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় বিভব সর্বোচ্চ হয় এবং অসীমে এর সর্বোচ্চ মান হচ্ছে শূন্য।** অসীম থেকে ক্ষেত্র সৃষ্টিকারী বস্তুটির দিকে এগোতে থাকলে মহাকর্ষীয় বিভবের মান কমতে থাকে, অর্থাৎ ঋণাত্মক হয়। পৃথিবীপৃষ্ঠে বিভব = $\frac{-GM}{R}$। এখানে R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ।

মহাকর্ষীয় বিভব শক্তি :

কোনো বস্তুর ভর m, মহাকর্ষীয় বিভব V হলে বস্তু থেকে r দূরত্বে কোনো বস্তুর বিভব শক্তি $V = mV = -\frac{GMm}{r}$

বিশেষ ক্ষেত্র :

(i) কোনো সুষম নিরেট গোলক বা সুষম গোলকের ক্ষেত্রে সমস্ত ভর এদের নিজ নিজ কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে ধরে নিয়ে ওই গোলক বা গোলকের বাইরে অবস্থিত বিন্দুতে বিভব নির্ণয় করা যায়।

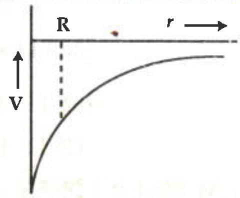
(ii) সুষম গোলকের ভেতরে অবস্থিত সকল বিন্দুতে বিভব স্থির থাকে। এই বিভব গোলকের পৃষ্ঠের বিভবের সমান হয়। গোলকের ভর M এবং ব্যাসার্ধ a হলে ভেতরে অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর বিভব, $V = \frac{-GM}{a}$

বিভব পার্থক্য (Potential difference) : কোনো মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের দুটি বিন্দুর বিভব পার্থক্য বলতে বুঝায়—একটি একক ভরের বস্তুকে এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে নিতে কোনো বাহ্যিক বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ। যেমন m ভরকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে নিতে যদি W_{AB} কাজ করতে হয় তাহলে ওই দুই বিন্দুর বিভব পার্থক্য হবে, $V_B - V_A = V = \frac{W_{AB}}{m}$

বিভব পার্থক্য এবং বিভবের একক অভিন্ন।

অনুধাবনমূলক কাজ : মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে দূরত্বের সাপেক্ষে মহাকর্ষীয় বিভবের পরিবর্তন ব্যাখ্যা কর।

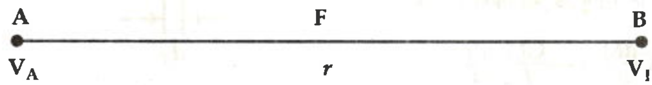
আমরা জানি, মহাকর্ষ বিভব, $V = \frac{-GM}{r}$। সুতরাং দূরত্ব বৃদ্ধির সাথে $\frac{GM}{r}$-এর মান দূরত্বের ব্যস্তানুপাতে কমে কিন্তু বিভব –ve হওয়ায় V এর মান বাড়ে। অসীম দূরত্বের জন্য বিভব শূন্য। এর লেখচিত্র ৬.১৬(ক) চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ৬.১৬(ক)

৬.১৩ প্রাবল্য ও বিভব পার্থক্যের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between intensity and potential

মহাকর্ষীয় প্রাবল্য এবং মহাকর্ষীয় বিভবের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে গিয়ে ধরি, A ও B মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে অবস্থিত কাছাকাছি দুটি বিন্দু [চিত্র ৬.১৭]। মনে করি এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব r। A বিন্দুর বিভব = V_A এবং B বিন্দুর



চিত্র ৬.১৭

বিভব = V_B। যেহেতু A ও B বিন্দু দুটি মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কাছাকাছি অবস্থিত, সেহেতু বিন্দু দুটির মহাকর্ষীয় প্রাবল্য সমান ধরে নেয়া হয়। মনে করি এই প্রাবল্য = F

এখন, একক ভরের কোনো বস্তুকে B বিন্দু হতে A বিন্দুতে আনতে কাজের পরিমাণ = প্রাবল্য × দূরত্ব

$= F \times AB = F \times r$ [$\because$ F = E একক ভরের জন্য]

এটাই হলো A বিন্দু এবং B বিন্দুর বিভব পার্থক্য অর্থাৎ $(V_A - V_B)$

$\therefore \quad F \times AB = V_A - V_B$

বা, $F = \frac{V_A - V_B}{AB} = \frac{V_A - V_B}{r}$ ... ... (6.25)

অর্থাৎ, দূরত্ব সাপেক্ষে বিভবের পরিবর্তনের হারকে প্রাবল্য বলে।

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের অভিমুখে ক্ষুদ্র সরণ $A'B' = dr$ হলে এবং A' বিন্দুর বিভব V ও B' বিন্দুর বিভব $(V + dV)$ হলে, $V_{A'} - V_{B'} = -dV$

$$\therefore \quad F = E = -\frac{dV}{dr} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.26)$$

এটাই প্রাবল্য এবং বিভবের মধ্যে সম্পর্ক। অর্থাৎ দূরত্বের সাপেক্ষে মহাকর্ষীয় বিভবের হ্রাসের হার বা ঋণাত্মক অন্তরকই হচ্ছে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য।

ব্যাখ্যা কর : তোমার জানা অন্যান্য বিভবের সাথে মহাকর্ষীয় বিভবের তফাৎ কোথায় ?

মহাকর্ষ সর্বদা আকর্ষণধর্মী বলে মহাকর্ষীয় বিভব সর্বদা ঋণাত্মক। কিন্তু তড়িৎ এবং চৌম্বক বল আকর্ষণ ও বিকর্ষণ উভধর্মী হওয়ায় বিভব ঋণাত্মক বা ধনাত্মক দুইই হতে পারে। আবার মহাকর্ষীয় বিভব মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে না। কিন্তু অন্য বিভবগুলো মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর নির্ভর করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৭

১। পৃথিবীকে $5{\cdot}5 \times 10^3$ kg m^{-3} গড় ঘনত্বের তৈরি 64×10^5 m ব্যাসার্ধের একটি গোলক হিসেবে ধরে এর পৃষ্ঠে বিভব নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৫]

আমরা জানি, $V = -\frac{GM}{R}$

পৃথিবীর ভর, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$\therefore \quad V = -G\,\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R} = -\frac{4}{3}\pi G R^2 \rho$$

এখানে,

ব্যাসার্ধ, $R = 64 \times 10^5$ m $= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

ঘনত্ব, $\rho = 5{\cdot}5 \times 10^3$ kg m^{-3}

মহাকর্ষ ধ্রুবক, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}

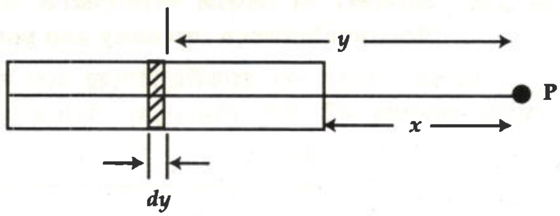
$V = ?$

$$= -\frac{4}{3} \times 3{\cdot}14 \times 6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times (6{\cdot}4 \times 10^6)^2 \times 5{\cdot}5 \times 10^3 \text{ Nm kg}^{-1}$$

$$= -6{\cdot}291 \times 10^7 \text{ Nm kg}^{-1}$$

$$= -6{\cdot}291 \times 10^7 \text{ Jkg}^{-1}$$

২। M ভরের ও l দৈর্ঘ্যের একটি সুষম সরু রডের অক্ষ বরাবর এক প্রান্ত থেকে x দূরত্বের P বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য নির্ণয় কর।



রডটির একক দৈর্ঘ্যের ভর $= \frac{M}{l}$। রডের অতি ক্ষুদ্র অংশ dy এর ভর, $dM = \frac{M}{l} \cdot dy$

dy দৈর্ঘ্যের জন্য P বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য,

$$dE = -G\frac{dM}{y^2} = -\frac{GM}{l} \cdot \frac{dy}{y^2}$$

সুতরাং, সমগ্র রডটির জন্য P বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য,

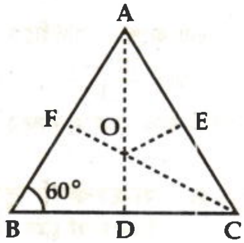
$$E = \int dE = \frac{-GM}{l}\int_x^{l+x} \frac{dy}{y^2} = \frac{-GM}{l}\left[-\frac{1}{y}\right]_x^{l+x}$$

$$= \frac{-GM}{l}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{l+x}\right] = \frac{-GM}{l}\left[\frac{l+x-x}{x(l+x)}\right]$$

$$= -\frac{GM}{x(l+x)}$$

৩। a বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি শীর্ষ বিন্দুতে m ভরের একটি করে কণা অবস্থিত। ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে মহাকর্ষীয় বিভব ও মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের মান নির্ণয় কর।

এখানে, $AB = BC = CA = a$ [চিত্র ১]। A, B ও C বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর লম্বগুলো ভরকেন্দ্র O-তে মিলিত হয়ে যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



চিত্র ১

ধরা যাক, $AO = BO = CO = r$

এখন, ΔABD ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়,

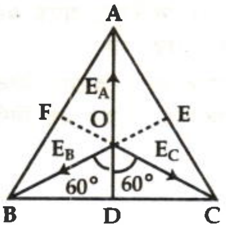
$$AO = a \sin 60° = \sqrt{\frac{3}{2}a}$$

আবার, $AO = \frac{2}{3}AD \therefore r = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$

সুতরাং, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র O বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব,

$$V = -\frac{Gm}{r} + \frac{-Gm}{r} + \frac{-Gm}{r} = -\frac{3Gm}{r}$$

$$= \frac{-3Gm}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = -\frac{3\sqrt{3}Gm}{a}$$



চিত্র ২

প্রাবল্য : ধরা যাক, A, B এবং C–তে অবস্থিত ভরগুলোর জন্য O বিন্দুতে প্রাবল্য যথাক্রমে E_A (O থেকে A-এর দিকে), E_B (O থেকে B-এর দিকে) এবং E_C (O থেকে C-এর দিকে) [চিত্র ২]।

$$\therefore \quad EA = \frac{Gm}{r^2} = E_B = B_C$$

উপরোক্ত প্রাবল্যগুলোকে AO বরাবর এবং AO-এর লম্বদিক বরাবর বিয়োগ করে পাওয়া যায় যথাক্রমে,

$E_A - E_B \cos 60° - E_C \cos 60° = E_A = \frac{1}{2}E_B - \frac{1}{2}E_C = 0$ [$\because E_B = E_C = E_A$]

এবং $E_C \sin 60° - E_B \sin 60° = 0$ [$\because E_B = E_C$]

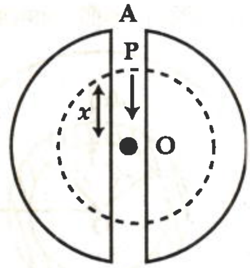
অতএব, ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য = 0

সম্প্রসারিত কর্মকাণ্ড : পৃথিবীর ব্যাস বরাবর এক প্রান্ত থেকে অপর প্রান্ত পর্যন্ত একটি সুড়ঙ্গ পথে একটি বস্তুখণ্ড ছেড়ে দিলে তা কী অপর প্রান্তে পৌঁছাবে ? এর গতির প্রকৃতি কী হবে ? [কু. বো. ২০২৩]

পৃথিবীকে ρ ঘনত্বের সমসত্ত্ব গোলক ধরলে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে x দূরত্বে m ভরের বস্তুর ওপর প্রযুক্ত মহাকর্ষীয় বল, $F = \frac{4}{3}\pi G\rho m x$

অর্থাৎ $F \propto x \left[\because \frac{4}{3}\pi G\rho m = \text{ধ্রুবক}\right]$

আবার এই বল সর্বদা কেন্দ্রমুখী। সুতরাং বস্তুটি পৃথিবীর কেন্দ্রকে মধ্য অবস্থানে রেখে পৃথিবীর এক প্রান্ত থেকে অপর প্রান্ত পর্যন্ত সরল দোলগতিতে দুলতে থাকবে।



চিত্র ৬.১৮

ক্রিয়াকর্ম : একক ভরের কোনো বস্তুকে অসীম দূরত্ব থেকে কোনো বিন্দুতে আনতে কৃত কাজ ঋণাত্মক হয় কেন ? রকেট ভূপৃষ্ঠ হতে ওপরের দিকে উঠতে থাকলে, রকেটের অবস্থান অনুসারে পৃথিবীর জন্য বিভবের মান বাড়তে থাকে না কমতে থাকে ? পৃথিবীর অভ্যন্তরে কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব ওই বিন্দুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে কী ? ব্যাখ্যা কর।

১ম অংশ : এক্ষেত্রে যে কাজ সম্পাদিত হয় তা বস্তুটির ওপর আকর্ষণ বল বা মহাকর্ষ বলই করে থাকে, বাইরের কোনো শক্তি করে না। তাই কৃত কাজ ঋণাত্মক হয়।

২য় অংশ : রকেট যত ওপরে উঠবে, বিভবের মান তত বাড়বে। কারণ এই বিভব $V = -\frac{GM}{r}$। অর্থাৎ r বাড়লে V-এর মান বাড়তে থাকবে। r অসীম হলে V-এর মান সর্বোচ্চ হবে।

৩য় অংশ : পৃথিবীকে একটি নিরেট গোলক ধরে এর অভ্যন্তরে কেন্দ্র হতে r দূরত্বে কোনো বিন্দুতে বিভব $V = -GM \times \frac{3R^2 - r^2}{2R^3}$, যেখানে M এবং R যথাক্রমে পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ। তাই r-এর মান পরিবর্তনে বিভবের মান পরিবর্তিত হবে। অর্থাৎ বস্তুর অবস্থানের ওপর V-এর মান নির্ভর করে।

৬·১৪ মহাকর্ষ সূত্রের প্রয়োগ
Uses of gravitation law

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র কেবলমাত্র দুটি কণার মধ্যে আকর্ষণ বল নির্ণয় করতে সক্ষম। কিন্তু বাস্তবে প্রত্যেক বস্তুরই নির্দিষ্ট আকার থাকে। যখন দুটি বিস্তৃত বস্তুর দূরত্ব এদের আকারের তুলনায় অনেক বেশি হয়, কেবলমাত্র তখনই আমরা বস্তু দুটির আকার উপেক্ষা করে এদেরকে কণা বলে ধরে নিতে পারি। এক্ষেত্রে বস্তু দুটির ভর ওদের নিজ নিজ ভরকেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে বলে ধরে নিয়ে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করে আকর্ষণ বল নির্ণয় করা যায়। আকার উপেক্ষা করতে না পারলে বিস্তৃত বস্তুর ক্ষেত্রে মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল সহজে গণনা করা যায় না।

বিভিন্ন জায়গায় বস্তুর ভর অপরিবর্তিত থাকলেও অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পরিবর্তিত হয়। ফলে বস্তুর ওজন বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন হয়। অভিকর্ষ বলের প্রভাবে এবং অবস্থানের তারতম্যের কারণে অভিকর্ষজ ত্বরণসহ গোলকের ভিতরে ও বাইরে মহাকর্ষ বিভব ও প্রাবল্যের মানের তারতম্য ঘটে।

কোনো সুষম নিরেট গোলক বা সুষম গোল খোলকের সমস্ত ভর এদের নিজ নিজ কেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত আছে ধরে নিয়ে ওই গোলক বা গোলকে অবস্থিত কণার ওপর মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহার করে আকর্ষণ বল নির্ণয় করা যায়।

সুষম গোলাকার খোলকের ভেতর অবস্থিত কণার ওপর কোনো আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে না। কোনো নিরেট গোলকের জন্য অন্য কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করতে গেলে অর্থাৎ বিভব ও প্রাবল্যসহ মহাকর্ষ বল নির্ণয় করতে গেলে তিনটি ঘটনা ঘটতে পারে।

(I) বিন্দু গোলকের ভিতরে অবস্থিত হতে পারে।

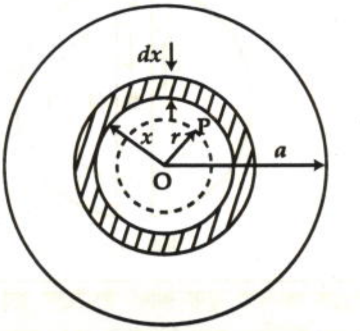
(II) বিন্দু গোলকের ওপরে অবস্থিত হতে পারে।

(III) বিন্দু গোলকের বাইরে অবস্থিত হতে পারে।

ক. নিরেট গোলকের অভ্যন্তরে মহাকর্ষীয় সূত্রের ব্যবহার (বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়)
Uses of gravitational law at a point inside a solid sphere (Determination of potential and intensity)

যখন বিন্দুটি গোলকের ভেতর অবস্থিত

মনে করি P বিন্দুটি গোলকের উপাদানের ভেতর কেন্দ্র হতে r দূরে অবস্থিত। O-কে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের একটি গোলক আঁকা হলো। বলা যায়, সমগ্র গোলকটি দুটি গোলকের যোগফল অর্থাৎ একটি হলো r ব্যাসার্ধের নিরেট গোলক এবং অপরটি $(a - r)$ বেধের ফাঁপা গোলক [চিত্র ৬.১৯]। নিরেট গোলকের দরুন P বিন্দুতে মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,



চিত্র ৬·১৯

$$\text{বিভব } (V_p)_1 = -\frac{GM}{r} = \frac{-G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} = -\frac{4}{3}\pi\rho G r^2$$

এখানে M = গোলকের ভর $= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

ρ = উপাদানের ঘনত্ব

a = গোলকের ব্যাসার্ধ

r = গোলকের কেন্দ্র হতে নির্ণেয় বিন্দুর দূরত্ব।

আবার $(a - r)$ বেধের ফাঁপা গোলকটিকে x ব্যাসার্ধের এবং dx বেধের অনেকগুলো পাতলা খোলকের সমষ্টি ভাবা যেতে পারে। এরকম একটি খোলকের দরুন খোলকের ভেতরের বিন্দু P তে বিভব,

$$(dV_p)_2 = -\frac{G\, 4\pi x^2\, dx \rho}{x} = -4\pi G\, \rho x dx$$

$(a - r)$ বেধের সমগ্র গোলকের দরুন বিভব,

$$(V_p)_2 = -4\pi G\rho \int_r^a x dx = -2\pi G\rho(a^2 - r^2)$$

তা হলে সমগ্র নিরেট গোলকের দরুন P বিন্দুর বিভব,

$$\begin{aligned}(V_p)_i &= (V_p)_1 + (V_p)_2 \\ &= -\frac{4}{3}\pi G\rho r^2 - 2\pi G\rho(a^2 - r^2) \\ &= -2\pi G\rho\left(\frac{2}{3}r^2 + a^2 - r^2\right) \\ &= -\frac{2}{3}\pi G\rho\,(2r^2 + 3a^2 - 3r^2) \\ &= -\frac{2}{3}\pi G\rho\,(3a^2 - r^2) \\ &= -\frac{4}{3}\pi Ga^3\rho\left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3}\right)\end{aligned}$$

কিন্তু $\frac{4}{3}\pi a^3\rho = M = a$ ব্যাসার্ধের নিরেট গোলকের ভর

$$\therefore \quad V = \frac{-GM\,(3a^2 - r^2)}{2a^3} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.27)$$

এবং ক্ষেত্র প্রাবল্য $(E_p)_i = -\frac{d}{dr}(V_p) = -\frac{d}{dr}(V_p)_i$

$$= -\frac{d}{dr}\left(\frac{-GM}{2a^3}(3a^2 - r^2)\right) = \frac{GM}{2a^3}\frac{d}{dr}(3a^2 - r^2)$$

$$\therefore \quad (E_p)_i = \frac{-GM}{a^3}r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.28)$$

এখানে $-$ve চিহ্ন আকর্ষণ বল বোঝায়। শুধু মান বিবেচনা করলে $E_{pi} = \frac{GM}{a^3}r$ হয়।

খ. নিরেট গোলকের বাইরে কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষ সূত্রের ব্যবহার (বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়)

Use of gravitational law at a point outside the sphere (Determination of potential and intensity)

যখন বিন্দুটি গোলকের বাইরে অবস্থিত

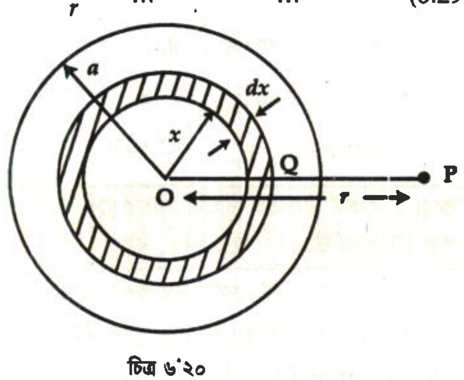
৬·২০ চিত্রানুযায়ী a ব্যাসার্ধ এবং M ভরের নিরেট গোলকের কেন্দ্র O হতে r দূরে গোলকের বাইরে P বিন্দু অবস্থিত। সমগ্র গোলকটিকে x ব্যাসার্ধের এবং dx বেধের অনেকগুলো সমকেন্দ্রিক পাতলা খোলকের সমষ্টি ভাবা যেতে পারে।

গোলকটির ভর $dm = 4\pi x^2\,dx\rho$, এখানে ρ = উপাদানের ঘনত্ব। dm কে O বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত ভাবা যেতে পারে। সুতরাং এর দরুন P বিন্দুতে বিভব $dV_p = -\frac{Gdm}{r}$

এবং সমগ্র গোলকের দরুন P বিন্দুতে বিভব, $(V_p)_0 = \frac{-G\sum dm}{r} = \frac{-GM}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.29)$

এবং প্রাবল্য, $(E_p)_0 = +\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{r}\right)$

$$= +\frac{GM}{r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6.29a)$$



চিত্র ৬·২০

যখন বিন্দুটি গোলকের পৃষ্ঠের ওপর অবস্থিত : ৬·২০ চিত্রানুযায়ী (6.29) এবং [6.29(a)] সমীকরণে $r = a$ বসিয়ে পাই,

বিভব, $V_p = -\frac{GM}{a}$

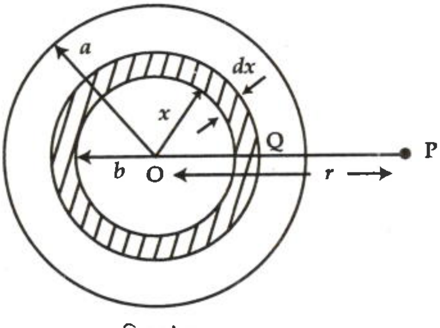
এবং প্রাবল্য, $E_p = \frac{+GM}{a^2}$

গ. ফাঁপা গোলকের বাইরে মহাকর্ষীয় সূত্রের ব্যবহার (বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়)

Use of gravitational law outside the hollow sphere (Determination of potential and intensity)

যখন বিন্দুটি গোলকের বাইরে অবস্থিত

৬·২১ নং চিত্রে ফাঁপা গোলকের কেন্দ্র O ভেতরের পিঠের ব্যাসার্ধ b এবং বাইরের পিঠের ব্যাসার্ধ a। P হলো বাইরের একটি বিন্দু, যখন $OP = r$। গোলকটিকে অনেকগুলো সমকেন্দ্রিক সরু বেধের খোলকের সমষ্টি ভাবা যেতে পারে। এরকম একটি খোলক নেয়া হলো যার ব্যাসার্ধ x এবং বেধ dx। গোলকের উপাদানের ঘনত্ব ρ হলে, সরু বেধের খোলকটির ভর $= 4\pi x^2\, dx\rho$



চিত্র ৬·২১

উক্ত খোলকের দরুন P বিন্দুতে বিভব,

$$dV_p = -G\frac{\text{খোলকের ভর}}{r}$$

$$= \frac{-G\, 4\pi x^2\, dx\rho}{r}$$

∴ সমগ্র গোলকের বিভব, $V_p = -\frac{4\pi G\rho}{r}\int_b^a x^2\, dx$

$$= \frac{-4\pi G\rho}{r}\times\frac{(a^3-b^3)}{3} = \frac{-GM}{r} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.30)$$

আবার P বিন্দুতে ক্ষেত্র প্রাবল্য, $E_p = \frac{d}{dr}\left(\frac{-GM}{r}\right) = \frac{+GM}{r^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.31)$

ঘ. ফাঁপা গোলকের ভেতরে মহাকর্ষীয় সূত্রের ব্যবহার (বিভব ও প্রাবল্য নির্ণয়)

Use of gravitational law inside the hollow sphere (Determination of potential and intensity)

যখন বিন্দুটি গোলকের ভেতরে অবস্থিত

গোলকের ভেতর ফাঁপা অংশে P বিন্দু নেয়া হলো [চিত্র ৬·২২]। $OP = r$; x ব্যাসার্ধের এবং dx বেধের একটি পাতলা খোলক নেয়া হলো। খোলকটির ভর $= 4\pi x^2 dx\rho$

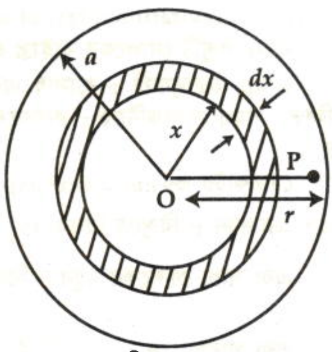
উক্ত খোলকের দরুন P বিন্দুতে বিভব,

$$dV_p = -G\frac{\text{খোলকের ভর}}{x}$$

$$= -G\frac{4\pi x^2\, dx\rho}{x} = -4\pi G\rho x dx$$

কারণ খোলকের ফাঁপা অংশের ভেতর বিভব সর্বত্র সমান যার

মান $= -G\frac{\text{খোলকের ভর}}{\text{খোলকের ব্যাসার্ধ}}$



চিত্র ৬·২২

তা হলে সমগ্র গোলকের দরুন বিভব,

$$V_p = -4\pi G\rho\int_b^a x dx$$

$$= -2\pi G\rho(a^2 - b^2) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.32)$$

এবং প্রাবল্য, $E_p = +\frac{dV_p}{dr} = 0$

কাজ : একটি বস্তুকে পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে খাড়া ওপরের দিকে v বেগে উৎক্ষেপণ করা হলো। এটি পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে কত উচ্চতায় উঠবে? ধরে নাও, বস্তুটি বাধাহীন পথে ওপরে উঠছে।

v বেগে ভূপৃষ্ঠ থেকে উৎক্ষিপ্ত m ভরের বস্তুটির ভূপৃষ্ঠে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$। ধরা যাক বস্তুটি সর্বাধিক r উচ্চতায় উঠতে পারে। সেখানে বস্তুটির বেগ শূন্য হবে। ফলে গতিশক্তি = 0। পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হলে ভূপৃষ্ঠে বস্তুটির স্থিতিশক্তি $= -\frac{GMm}{R}$ এবং r উচ্চতায় স্থিতিশক্তি $= -\frac{GMm}{r}$।

এখন শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুসারে, ভূপৃষ্ঠে বস্তুটির মোট শক্তি = r উচ্চতায় বস্তুটির মোট শক্তি

সুতরাং, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{r}$

বা, $\frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{R} - \frac{1}{2}mv^2$

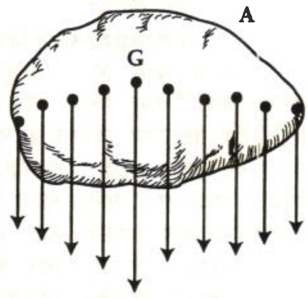
বা, $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{mv^2}{2GMm}$

বা, $r = \frac{2GMR}{2GM - v^2R} = \frac{2gR^2.R}{2gR^2 - v^2R}$ $[\because GM = gR^2]$

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{2gR^2}{2g(R - v^2)}$

৬.১৫ অভিকর্ষ কেন্দ্র
Centre of gravity

আমরা জানি, কোনো একটি বস্তু পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে যে পরিমাণ বল দ্বারা আকৃষ্ট হয় তাকে বস্তুর ওজন বা ভার বলে। কোনো বস্তুকে যেভাবেই রাখা হোক না কেন তার ওজন একটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে বস্তুর ওপর সর্বদা ক্রিয়া করে। ওই বিন্দুই হলো অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র। DAT(16-17)



চিত্র ৬.২৩

মনে করি A একটি দৃঢ় বস্তু। তা কতগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। প্রতিটি কণাই অভিকর্ষ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হবে। এসব বল মিলিত হয়ে একটি লব্ধি বল সৃষ্টি করবে। বস্তুটিকে ঘুরে ফিরে যেভাবেই রাখা হোক না কেন কণাগুলোর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলের পরিমাণ, অভিমুখ ও ক্রিয়াবিন্দুর এবং সেই সঙ্গে ওই বলগুলোর লব্ধির পরিমাণ, অভিমুখ ও ক্রিয়াবিন্দুর কোনো পরিবর্তন হবে না। এই লব্ধি বলই বস্তুর ওজন। চিত্র ৬.২৩-এ ওজন বা বল বস্তুর 'G' বিন্দুর মধ্য দিয়ে ক্রিয়া করছে। এই বিন্দুই বস্তুটির অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র।

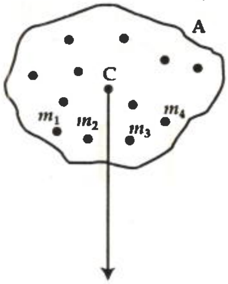
*** **জানার বিষয় :**
- I. সুষম দণ্ডের ক্ষেত্রে অভিকর্ষ কেন্দ্র—মধ্য বিন্দুতে।
- II. বৃত্ত ও আংটির ক্ষেত্রে অভিকর্ষ কেন্দ্র—জ্যামিতিক কেন্দ্রে।
- III. সামান্তরিকের ক্ষেত্রে অভিকর্ষ কেন্দ্র—কর্ণদ্বয়ের ছেদ বিন্দুতে।
- IV. বেলনাকৃতি বস্তুর ক্ষেত্রে অভিকর্ষ কেন্দ্র—অক্ষের মধ্য বিন্দুতে।

ব্যাখ্যা কর : বস্তুর ভারকেন্দ্র বস্তুর উপাদানের বাইরে থাকতে পারে কী ?

একটি ধাতব রিং বা বৃত্তাকার আংটা বা হাতে পরার চুড়ি এর ভারকেন্দ্র রিং বা বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত, অথচ সেখানে বস্তুটির উপাদান থাকে না। সুতরাং, ক্ষেত্রবিশেষে বস্তুর ভারকেন্দ্র বস্তুর উপাদানের বাইরে থাকতে পারে।

৬.১৬ ভরকেন্দ্র
Centre of mass

আমরা জানি একটি বস্তু অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। **বস্তুর কণাগুলোর সমস্ত ভরকে একটি মাত্র বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত মনে করলে ওই বিন্দুর মধ্য দিয়েই সমস্ত কণার ওপর তাদের ভরের সমানুপাতিক ক্রিয়ারত সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি ক্রিয়া করে বলে বিবেচিত হয়। ওই বিন্দুকে বস্তুর ভরকেন্দ্র বলে।**



চিত্র ৬.২৪

মনে করি A একটি বস্তু। তা অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। ধরি বস্তুকণাগুলোর ভর যথাক্রমে $m_1, m_2, m_3 ..... m_n$ ইত্যাদি [চিত্র ৬.২৪]। সমস্ত ভরকে C বিন্দুতে সমবেত ধরা হলে ওই ভরগুলোর ওপর ক্রিয়ারত কণার ভরের সমানুপাতিক সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুর মধ্য দিয়েই ক্রিয়া করবে। এই বিন্দুর নামই **ভরকেন্দ্র**।

৬.১৭ ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্রের পার্থক্য
Difference between centre of mass and centre of gravity

বস্তুর ভরকেন্দ্র	বস্তুর ভারকেন্দ্র
১। বস্তুর ভরকেন্দ্র এমন একটি বিন্দু যে বিন্দুতে বল প্রয়োগ করলে বস্তুটির শুধু রৈখিক গতি উৎপন্ন হয়, কোনো আবর্ত গতি সৃষ্টি হয় না।	১। বস্তুর ভারকেন্দ্র হলো এমন এক বিন্দু যে বিন্দু দিয়ে বস্তুর সমস্ত ওজন উল্লম্বভাবে নিচের দিকে ক্রিয়াশীল হয়।
২। কোনো নির্দিষ্ট আকার ও আয়তনবিশিষ্ট বস্তুকে মহাবিশ্বের যেখানেই নেয়া হোক না কেন তার ভর একই থাকে, ফলে ভরকেন্দ্রটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অবস্থিত থাকে।	২। পৃথিবীর কেন্দ্রে বা মহাশূন্যে যেখানে অভিকর্ষ বল ক্রিয়া করে না সেখানে বস্তুর ওজন থাকে না, ফলে ভারকেন্দ্রের কোনো অস্তিত্ব থাকে না।
৩। বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ সমান হলে বস্তুর ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র একই বিন্দু হয়।	৩। যদি বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ বিভিন্ন হয় তবে বস্তুর ভরকেন্দ্র ও ভারকেন্দ্র আলাদা বিন্দু হয়।

৬.১৮ মুক্তিবেগ
Escape velocity

ওপর থেকে কোনো বস্তুকে ছেড়ে দিলে তা নিচের দিকে পড়ে। আবার ওপরের দিকে একটি ঢিল নিক্ষেপ করলে তাও নিচের দিকে পড়ে। পৃথিবীর অভিকর্ষের টানে এই দুটি বস্তু নিচের দিকে পড়ে। কতদূর পর্যন্ত এই অভিকর্ষীয় বল ক্রিয়া করবে বা কতদূর পর্যন্ত এই অভিকর্ষ বলের সীমা বিস্তৃত ? এই প্রশ্ন আমাদের সকলের। পৃথিবীর ব্যাসার্ধের তুলনায় খুব বেশি দূরত্বে পৃথিবীর আকর্ষণ বল নগণ্য হয়; কিন্তু যত ক্ষুদ্রই হোক না কেন পৃথিবীর মহাকর্ষীয় আকর্ষণ প্রকৃতপক্ষে অসীম দূরত্ব পর্যন্ত বিস্তৃত। কোনো বস্তুকে যদি এমন বেগে উর্ধ্বে নিক্ষেপ করা হয় যে তা পৃথিবীর অভিকর্ষীয় ক্ষেত্র অতিক্রম করে যায় তবে বস্তুটি আর কখনই পৃথিবীতে ফিরে আসবে না। তখন বস্তুটি অভিকর্ষের সীমা ছাড়িয়ে মহাশূন্যে ধাবিত হবে। ন্যূনতম যে বেগে নিক্ষেপ করলে কোনো বস্তু অভিকর্ষের সীমা ছাড়িয়ে যায় সেই বেগই মুক্তিবেগ। পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ 11.2 kms^{-1} বা 7 mile s^{-1}।

সংজ্ঞা : সর্বাপেক্ষা কম যে বেগে কোনো বস্তুকে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না সেই বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

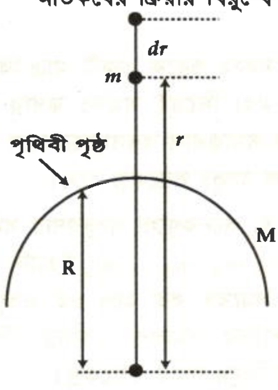
উৎক্ষিপ্ত বস্তুর ভর এবং উপগ্রহের ভর (পৃথিবী) এর ওপর মুক্তিবেগের কোনো প্রভাব আছে কি ? যেহেতু পৃথিবীর তুলনায় উৎক্ষিপ্ত বস্তুটি খুবই ছোট তাই পৃথিবীর ভরের ওপর নির্ভর করলেও নিক্ষিপ্ত বস্তুর ভরের ওপর তা নির্ভর করে না। স্পষ্টত কোনো উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ মুক্তিবেগ অপেক্ষা কম হয়, তা না হলে উপগ্রহটি মহাশূন্যে বিলীন হয়ে যেত।

৬.১৮.১ মুক্তিবেগের মান নির্ণয়
Determination of the magnitude of escape velocity

মনে কর উৎক্ষিপ্ত বস্তুর ভর m, পৃথিবীর ভর M, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R, পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে বস্তুর দূরত্ব r [চিত্র ৬.২৫] অতএব পৃথিবী ও নিক্ষিপ্ত বস্তুর মধ্যকার ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ বল,

$$F = \frac{GMm}{r^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.33)$$

অভিকর্ষের ক্রিয়ার বিরুদ্ধে বস্তুটিকে যদি ওপরের দিকে অতি ক্ষুদ্র দূরত্ব dr সরানো হয়, তবে কৃত কাজ,



চিত্র ৬.২৫

$$dW = Fdr = \frac{GMm}{r^2} \times dr \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.34)$$

ভূপৃষ্ঠ হতে বস্তুটিকে অসীম দূরত্বে সরাতে মোট কৃত কাজ W সমীকরণ (6.34) কে R থেকে ∞ সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$W = \int dW = \int_R^\infty \frac{GMm}{r^2} dr$$

$$\therefore \quad W = GMm \int_R^\infty r^{-2} dr = GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty$$

$$= GMm \left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{R} \right] = \frac{GMm}{R}$$

$$\therefore \quad W = \frac{GMm}{R} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.35)$$

মুক্তিবেগ v_e হলে বস্তুর প্রাথমিক গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_e^2$। পৃথিবীর মহাকর্ষীয় আকর্ষণের বাইরে চলে যেতে হলে বস্তুর প্রাথমিক গতিশক্তি অন্তত W এর সমান হওয়া দরকার।

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GMm}{R}$$

বা, $\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$ ... ... (6.36)

কিন্তু আমরা জানি, $g = \frac{GM}{R^2}$ $\therefore$ $GM = gR^2$

$\therefore$ সমীকরণ (6.36) থেকে, $v_e = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} = \boxed{\sqrt{2gR}}$ ... ... (6.37)

সমীকরণ (6.36) এবং (6.37) হলো মুক্তিবেগের রাশিমালা।

উপরোক্ত সমীকরণে m না থাকায় আমরা বলতে পারি যে, মুক্তিবেগ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না। বস্তু ছোট বা বড় যাই হোক না কেন, মুক্তিবেগ একই হবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে কোনো স্থির বস্তুর মুক্তিবেগ এবং পৃথিবীর চারদিকে আবর্তনরত কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ কী একই হবে ?

পৃথিবী পৃষ্ঠে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ, $v_e = \sqrt{2gR} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

পৃথিবীর চারদিকে আবর্তনরত কোনো বস্তুর মোট শক্তি,

$$E = \text{বস্তুর স্থিতিশক্তি + বস্তুর গতিশক্তি} = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{R}\right) \qquad \left[\because v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}\right]$$ [সমীকরণ 6.5 দ্রষ্টব্য]

$$= -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}$$

ওই বস্তুর ক্ষেত্রে মুক্তিবেগ v_e' হলে, আমরা পাই,

$$\frac{1}{2}m(v'_e)^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R}$$

বা, $v_e' = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

$\therefore \quad v_e > v_e'$

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৮

১। পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে 2500 km উচ্চতায় অবস্থিত একটি উল্কাপিণ্ডের মুক্তিবেগ কত? দেওয়া আছে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km এবং পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$।

এখানে,
$R = 6400\ km = 6{\cdot}4 \times 10^6\ m$
পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে উল্কাপিণ্ডের দূরত্ব,
$r = 6400\ km + 2500\ km$
$= 8900\ km = 8{\cdot}9 \times 10^6\ m$
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

আমরা জানি ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$g = \frac{GM}{R^2}$ এবং

উল্কাপিণ্ডের অবস্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$g' = \frac{GM}{r^2}$

সুতরাং, $\frac{g}{g'} = \frac{GM/R^2}{GM/r^2} = \frac{r^2}{R^2}$

বা, $g' = g\left(\frac{R}{r}\right)^2$

আমরা জানি মুক্তিবেগ, $v = \sqrt{2gR}$

সুতরাং উল্কাপিণ্ডের মুক্তিবেগ, $v' = \sqrt{2g'r}$

$$\therefore \quad v' = \sqrt{2g\left(\frac{R}{r}\right)^2 r}$$

$$= \sqrt{2g.\left(\frac{R^2}{r^2}\right).r}$$

$$= R\sqrt{\frac{2g}{r}}$$

$$\therefore \quad v' = 6.4 \times 10^6 \times \sqrt{\frac{2 \times 9.8}{8.9 \times 10^6}} = 9.5 \times 10^3\ ms^{-1}$$

$$= 9.5\ kms^{-1}$$

২। পৃথিবী পৃষ্ঠে একজন লোকের ওজন 80 kg। পৃথিবীর ভর চন্দ্র অপেক্ষা 81 গুণ বেশি হলে চন্দ্র পৃষ্ঠে লোকটির ওজন কত হবে ? (পৃথিবী ও চন্দ্রের ব্যাসার্ধের অনুপাত 4 : 1) [ঢা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); Admission Test : RUET 2015-16; KUET 2004-05]

$$g_e = \frac{GMe}{R^2e}, \quad g_m = \frac{GMm}{R_m{}^2}$$

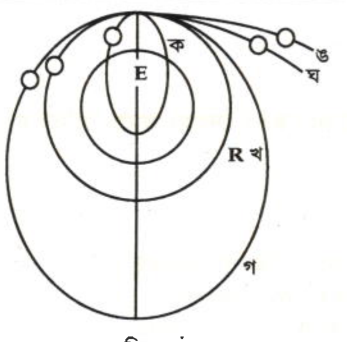
$$\therefore \quad \frac{g_m}{g_e} = \frac{Mm}{Me} \times \left(\frac{Re}{Rm}\right)^2$$

$$= \frac{1}{81} \times \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

সুতরাং চন্দ্র পৃষ্ঠে ওই লোকের ওজন, $M_m = \frac{16}{81} \times 80 = 15.8$ kg

জানার বিষয় : কয়েকটি ক্ষেত্রে মুক্তি বেগ—
I. পৃথিবীতে 11.2 km/s
II. চাঁদে 2.4 km/s DAT(18-19)
III. বুধে 4.3 km/s
IV. মঙ্গলে 5.0 km/s
V. শুক্রে 10.3 km/s
VI. বৃহস্পতিতে 59.5 km/s

হিসাব কর : পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R = 64 × 10⁵ m ও g = 9.80 ms⁻² ধরে মুক্তি বেগ নির্ণয় কর।– [য. বো. ২০০৮]



চিত্র ৬.২৬

এক্ষেত্রে মুক্তিবেগ,

$$v_e = \sqrt{2 \times 9.80 \times 64 \times 10^5} = 11.20 \times 10^3\ ms^{-1}$$

= 11.20 kms⁻¹ = 7 মাইল/সে. (প্রায়)

[∵ 1 মাইল = 1.6093 km]

= 25000 মাইল/ঘণ্টা (প্রায়)

সুতরাং কোনো বস্তুকে যদি প্রতি ঘণ্টায় 25000 মাইল বেগে বা এর অপেক্ষা অধিক বেগে উৎক্ষেপ করা হয়, তবে তা আর ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসে না।

নিজে কর : একই উচ্চতায় দুটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর চারদিকে আবর্তিত হচ্ছে। একটি উপগ্রহের ভর অপরটির দ্বিগুণ। কোনটি উচ্চতর বেগে ঘুরবে?

পৃথিবীর চারদিকে পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় আবর্তনরত কোনো উপগ্রহের কক্ষীয় বেগ, $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ যেখানে R ও M যথাক্রমে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ ও ভর। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, কক্ষীয় বেগ উপগ্রহের ভরের ওপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ দুটি উপগ্রহই সমান বেগে আবর্তিত হবে।

*** **জানার বিষয় :** পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কোনো বস্তুকে v বেগে ওপর দিকে নিক্ষেপ করলে পৃথিবীর আকর্ষণ বলের দ্বারা বস্তুটির বিভিন্ন পরিণতি হতে পারে। যথা—

(১) যদি $v^2 < \frac{v_e^2}{2}$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7{\cdot}88\ \text{kms}^{-1}$ অপেক্ষা কম হয়, তবে তা উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করবে এবং অবশেষে পৃথিবীতে ফিরে আসবে [চিত্র ৬·২৬-এ 'ক']।

(২) যদি $v^2 = \frac{v_e^2}{2}$ হয় অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7{\cdot}88\ \text{kms}^{-1}$ হয়, তবে বস্তুটি বৃত্তাকার পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করবে এবং চাঁদের মতো উপগ্রহে পরিণত হবে [চিত্র ৬·২৬-এ 'খ']।

(৩) যদি $v^2 > \frac{v_e^2}{2}$ কিন্তু $< v_E^2$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7{\cdot}88\ \text{kms}^{-1}$ হতে $11{\cdot}2\ \text{kms}^{-1}$ এর মধ্যে থাকে, তবে পৃথিবীকে একটি ফোকাসে রেখে তা উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করতে থাকবে [চিত্র ৬·২৬-এ 'গ']।

(৪) যদি $v = v_e$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $11{\cdot}2\ \text{kms}^{-1}$ অর্থাৎ মুক্তিবেগের সমান হয়, তবে বস্তুটি একটি অধিবৃত্ত পথে পৃথিবী পৃষ্ঠ ছেড়ে যায় এবং তা পৃথিবীর আকর্ষণ ক্ষেত্র অতিক্রম করে বাইরে চলে যাবে [চিত্র ৬·২৬-এ 'ঘ']।

(৫) যদি $v > v_e$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ মুক্তি বেগ অপেক্ষা বেশি হয়, তবে বস্তু পরাবৃত্ত পথে পৃথিবী পৃষ্ঠ ছেড়ে যায় এবং তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না [চিত্র ৬·২৬-এ 'ঙ']।

নিজে কর : পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে মুক্তিবেগ চন্দ্র পৃষ্ঠ থেকে মুক্তিবেগ অপেক্ষা বড় না ছোট ? — ব্যাখ্যা কর।

মনে করি v_e ও v_e' যথাক্রমে পৃথিবী ও চন্দ্রে মুক্তিবেগ। আরও মনে করি g ও R পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ ও পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। আবার g' ও R' চন্দ্রের ক্ষেত্রে অনুরূপ রাশি তা হলে,

$$v_e = \sqrt{2gR} \text{ ও } v_e' = \sqrt{2g'R'}$$

$$\therefore \frac{v_e}{v_e'} = \sqrt{\frac{gR}{g'R'}}$$

যেহেতু $g > g'$ ও $R > R'$ অতএব $v_e > v_e'$

অর্থাৎ মুক্তিবেগের মান পৃথিবীতে চন্দ্র অপেক্ষা বেশি।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.৯

১। **মঙ্গল গ্রহের ব্যাস 6000 km এবং এর পৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণ $3{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$। মঙ্গল গ্রহের পৃষ্ঠ হতে একটি বস্তুর মুক্তিবেগ নির্ণয় কর।** MAT(18-19) [দি. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৬]

এখানে,
ব্যাস, $d = 6000\ \text{km} = 6 \times 10^6\ \text{m}$
$\therefore$ ব্যাসার্ধ, $R = \frac{d}{2} = 3 \times 10^6\ \text{m}$
ত্বরণ, $g = 3{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$
মুক্তিবেগ, $v_e = ?$

আমরা জানি,

$$v_e = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 3{\cdot}8 \times 3 \times 10^6} = 4{\cdot}77 \times 10^3\ \text{ms}^{-1} = \boxed{4{\cdot}77\ \text{kms}^{-1}}$$

২। **বৃহস্পতির ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে $1{\cdot}9 \times 10^{27}$ kg এবং 7×10^7 m হলে এর মুক্তিবেগ নির্ণয় কর।** [য. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০০৪]

এখানে,
বৃহস্পতির ভর, $M = 1{\cdot}9 \times 10^{27}$ kg
বৃহস্পতির ব্যাসার্ধ, $R = 7 \times 10^7$ m
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\ \text{kg}^{-2}$

আমরা জানি মুক্তি বেগ,

$$v_e = \sqrt{2gR} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

আবার, $$g = \frac{GM}{R^2} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times GM}{R^2} \times R} = \sqrt{\frac{2\ GM}{R}}$$

$$\therefore v_e = \sqrt{\frac{2 \times 6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times 1{\cdot}9 \times 10^{27}}{7 \times 10^7}}$$

$$= 6{\cdot}02 \times 10^4\ \text{ms}^{-1}$$

৩। প্রমাণ কর যে,

(ক) অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের সংখ্যাগত মান সমান।

(খ) একটি ভারী বস্তু হতে অসীম দূরত্বে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব এবং মহাকর্ষীয় প্রাবল্য উভয়ের মান শূন্য।

(ক) মনে করি, M = পৃথিবীর ভর এবং R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। অতএব পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

উক্ত বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য,

$$E = \frac{GM}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$g = E \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$ (প্রমাণিত)

(খ) মনে করি ভারী বস্তুটির ভর = M

বস্তু হতে r দূরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব, $V = -\frac{GM}{r} \quad \ldots \quad (i)$

যদি বিন্দুটি অসীম দূরত্বে অবস্থিত হয়, তবে $r = \infty$

∴ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$V = -\frac{GM}{\infty} = -0 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$

পুনরায় মহাকর্ষীয় প্রাবল্য,

$$E = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(\infty)^2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

∴ সমীকরণ (ii) ও (iii) হতে পাই, $V = E = 0$ (প্রমাণিত)

৪। পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় স্থিতিশক্তির মান চন্দ্রপৃষ্ঠে স্থিতিশক্তির মানের সমান হবে? ধরে নাও, পৃথিবীর ভর চাঁদের ভরের 81 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চাঁদের ব্যাসার্ধের 4 গুণ। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m)

ধরা যাক, পৃথিবীর ভর = M

∴ চাঁদের ভর $= \frac{M}{81}$

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m

চাঁদের ব্যাসার্ধ $= \frac{R}{4}$

পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে r উচ্চতায় m ভরের একটি বস্তুর মহাকর্ষীয় স্থিতিশক্তি $= -\frac{GMm}{r}$

আবার চন্দ্রপৃষ্ঠে ওই বস্তুর মহাকর্ষীয় স্থিতিশক্তি,

$$-\frac{G \cdot \frac{M}{81} \cdot m}{\frac{R}{4}} = -\frac{4\,GMm}{81\,R}$$

প্রশ্নানুসারে, $-\frac{GMm}{r} = -\frac{4\,GMm}{81\,R}$

বা, $81\,R = 4r$

বা, $r = \frac{81}{4} R$

∴ পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে নির্ণেয় উচ্চতা $= r - R = \frac{81}{4} R - R$

$$= \frac{81\,R - 4\,R}{4} = \frac{77\,R}{4}$$

$$= \frac{77 \times 6.4 \times 10^6}{4} = 123.2 \times 10^6 \text{ m}$$

$$= 123.2 \times 10^3 \text{ km}$$

৫। একটি রকেটকে $5.5\ ms^{-1}$ বেগে পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে উল্লম্বভাবে নিক্ষেপ করা হলো। পৃথিবীতে ফিরে আসার পূর্বে রকেটটি পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় উপনীত হবে? (দেওয়া আছে, পৃথিবীর ভর = 6×10^{24} kg এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m ।

মনে করি, রকেটটি h উচ্চতায় উপনীত হয়। পৃথিবী পৃষ্ঠে রকেটটির মোট শক্তি,

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GM_em}{R_e}\right)$$

সুতরাং, h উচ্চতায় রকেটটির মোট শক্তি,

$$E = 0 + \left(-\frac{GM_em}{R_e+h}\right) \quad [\because h \text{ উচ্চতায় } v = 0]$$

এখানে,

$v = 5.5\ kms^{-1} = 5.5 \times 10^3\ ms^{-1}$

$M_e = 6 \times 10^{24}$ kg

$R_e = 6.4 \times 10^6$ m

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^{-2}kg^{-2}$

এখন, শক্তির নিত্যতা সূত্রানুসারে,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_em}{R_e} = -\frac{GM_em}{R_e+h}$$

বা, $$\frac{GM_e}{R_e+h} = \frac{GM_e}{R_e} - \frac{1}{2}v^2$$

বা, $$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM_e}{R_e}\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_e+h}\right)$$

বা, $$R_e + h = \left(\frac{GM_e}{\frac{GM_e}{R_e} - \frac{1}{2}v^2}\right)$$

বা, $$h = \left(\frac{GM_e}{\frac{GM_e}{R_e} - \frac{1}{2}v^2}\right) - Re = \left[\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6} - \frac{1}{2}(5.5 \times 10^3)^2} - 6.4 \times 10^6\right]$$

$$= \frac{40 \times 10^{13}}{4.74 \times 10^7} - 6.4 \times 10^6 = 8.44 \times 10^6 - 6.4 \times 10^6 = 2.04 \times 10^6 \text{ m}$$

৬। 5×10^{24} kg ভর এবং 6.1×10^6 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গ্রহের পৃষ্ঠ হতে 2 kg ভরের একটি বস্তুকে মহাশূন্যে পাঠানোর জন্য প্রয়োজনীয় শক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। ($G = 6.7 \times 10^{-11}\ Nkg^{-2}\ m^{-2}$)

[BUET Admission Test, 2011–12]

আমরা জানি,

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.7 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^{24}}{6.1 \times 10^6}} = 10480.27\ ms^{-1}$$

এখানে,

$G = 6.7 \times 10^{-11}\ Nm^2Kg^{-2}$

$M = 5 \times 10^{24}$ kg

$R = 6.1 \times 10^6$ m

$m = 2$ kg

আবার, প্রয়োজনীয় শক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (10480.27)^2 = 1.1 \times 10^8$ J

৭। একটি 20 kg ভরের কৃত্রিম উপগ্রহ অজানা ভরের একটি গ্রহের চারদিকে 8.0×10^6 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে আবর্তিত হলে তার পর্যায়কাল 2.4 h হয়। গ্রহ পৃষ্ঠের অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $8.0\ ms^{-2}$ হলে গ্রহটির ব্যাসার্ধ কত?

[BUET Admission Test, 2014–15]

আমরা জানি,

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{GM}$$

বা, $$(R+h)^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

$$\therefore (R+h)^3 = \frac{gR^2T^2}{4\pi^2}$$

এখানে,

$r = R + h = 8.0 \times 10^6$ m

$T = 2.4$ h $= 2.4 \times 3600$ s

$g = 8.0\ ms^{-2}$

$R = ?$

$$\therefore R^2 = \frac{(R+h)^3 \times 4\pi^2}{gT^2} = \frac{(8 \times 10^6)^3 \times 4 \times (3.14)^2}{8 \times (2.4 \times 3600)^2} = 33.8 \times 10^{12}$$

$$\therefore R = \sqrt{33.8 \times 10^{12}} = 5.81 \times 10^6 \text{ m}$$

৮। এক ব্যক্তি ভূপৃষ্ঠে 1·8 m উচ্চতা পর্যন্ত লাফাতে পারে। পৃথিবীর গড় ঘনত্বের সমান ঘনত্বের কোনো গ্রহের ব্যাসার্ধ কত হলে ওই গ্রহ থেকে ব্যক্তিটি কেবলমাত্র লাফ দিয়ে সেটির অভিকর্ষ বলের বাহিরে আসতে পারবে? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km)

ব্যক্তিটি ভূপৃষ্ঠে h উচ্চতা পর্যন্ত লাফালে তার প্রাথমিক গতিশক্তি = h উচ্চতায় স্থিতিশক্তি

অর্থাৎ, $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

এখানে,
$h = 1{\cdot}8\ \text{m}$
$R = 6400\ \text{km} = 6{\cdot}4 \times 10^6\ \text{m}$

এখানে m হচ্ছে ব্যক্তিটির ভর এবং v হচ্ছে ব্যক্তিটির প্রাথমিক বেগ

বা, $v = \sqrt{2gh}$ ... ... (i)

যেকোনো গ্রহ পৃষ্ঠ থেকেই ব্যক্তিটি ওই v বেগ নিয়ে লাফাতে পারবে। v যদি কোনো গ্রহের মুক্তিবেগের সমান হয় তবে ব্যক্তিটি ওই গ্রহের অভিকর্ষ বলের বাহিরে যেতে পারবে।

এখন, কোনো গ্রহের অভিকর্ষজ ত্বরণ g', ব্যাসার্ধ, R′ ও গড় ঘনত্ব ρ হলে আমরা পাই, $g' = \frac{4}{3}\pi G R'\rho$

যেহেতু $\frac{4}{3}\pi G$ ধ্রুবক এবং এখানে ρ ধ্রুবক সুতরাং, $g' \propto R'$

অর্থাৎ $\frac{g'}{g} = \frac{R'}{R}$; এখানে, R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

বা, $g' = \frac{gR'}{R}$ ... ... (ii)

আবার, ওই গ্রহের মুক্তিবেগ, $v' = \sqrt{2g'R'}$ ... (iii)

সমীকরণ (i) ও (iii) থেকে পাই,

$\sqrt{2gh} = \sqrt{2g'R'}$ বা, $gh = g'R'$

বা, $g' = \frac{gh}{R'}$ ... ... (iv)

সমীকরণ (ii) ও (iv) থেকে পাই,

$$\frac{gR'}{R} = \frac{gh}{R'}$$

বা, $R' = \sqrt{hR} = \sqrt{1{\cdot}8 \times 6{\cdot}4 \times 10^6}$

$= 3{\cdot}394 \times 10^3\ \text{m} = 3{\cdot}394\ \text{km}$

৯। m ভরের একটি উপগ্রহ পৃথিবীর চারদিকে r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে ঘুরছে। দেখাও যে উপগ্রহটির কৌণিক ভরবেগ, $L = m\sqrt{GMr}$।

কক্ষপথের কেন্দ্র সাপেক্ষে উপগ্রহটির কৌণিক ভরবেগ,

$L = mvr$; এখানে, v = উপগ্রহটির গতিবেগ

স্থির কক্ষপথে উপগ্রহটির ঘূর্ণনের জন্য আমরা জানি,

অভিকেন্দ্র বল = মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল

বা, $\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$ বা, $mv^2r = GMm$

বা, $(mvr)^2 = GMm^2r$

বা, $L = m\sqrt{GMr}$ (প্রমাণিত)

১০। পৃথিবীর গড় ঘনত্ব d হলে দেখাও যে, $g \propto d$।

পৃথিবীর গড় ঘনত্ব d হলে পৃথিবীর ভর, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 d$, এখানে R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ।

আবার ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে,

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G \times \frac{4\pi}{3} R^3 d}{R^2}$$

$$= \frac{4}{3}\pi G R d = \text{ধ্রুবক} \times d \quad [\because \frac{4}{3}\pi G R = \text{ধ্রুবক}]$$

$\therefore\ g \propto d$ (প্রমাণিত)

৬·১৯ মহাকর্ষ সূত্রের ব্যবহার
Uses of gravitational law

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহার করে আমরা কোনো স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় করতে পারি। এ ছাড়া পৃথিবীর ভর, চন্দ্রের ভর ও সূর্যের ভর, পৃথিবীর গড় ঘনত্ব নির্ণয় করতে পারি। গ্রহ নক্ষত্রসহ কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ, আবর্তন কাল ও উচ্চতা নির্ণয় করতে পারি। মহাকাশে ভ্রমণকালে মহাশূন্যচারী ওজনহীনতা, মহাকর্ষক্ষেত্র, প্রাবল্য, বিভবসহ নানাবিধ সমস্যার সমধান করতে পারি। বর্তমান বিশ্বে প্রাকৃতিক সম্পদের অনুসন্ধান, কৃত্রিম উপগ্রহের মাধ্যমে যোগাযোগ ও বস্তু গবেষণা ইত্যাদি বিজ্ঞানের অগ্রগতি মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহারেরই ফল। নিম্নে এ সম্বন্ধে আলোচনা করা হলো।

৬·১৯·১ প্রাকৃতিক সম্পদ অনুসন্ধান
Exploration of natural resources

আমরা জানি পৃথিবীর গড় ঘনত্ব, $\rho = 5{\cdot}5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$। পৃথিবীর বিভিন্ন গভীরতায় এর মান কমবেশি হতে পারে। সুতরাং 'g' পরিমাপ করে কোথাও ঘনত্ব গড় ঘনত্বের বেশি হলে সেখানে খনিজ পদার্থ থাকার সম্ভাবনা রয়েছে। সুতরাং 'g'-এর মান নির্ধারণ করে খনিজ পদার্থ অন্বেষণ করা হয়। প্রাথমিক ফলাফল আশাব্যঞ্জক হলে নিবিড় পর্যবেক্ষণ এবং বিস্তারিত গবেষণার মাধ্যমে খনিজ পদার্থের গঠন ও প্রকৃতি নির্ণয় করা যায়। সুতরাং, মহাকর্ষ সূত্র ব্যবহার করে আমরা খনিজ সম্পদ অন্বেষণ করতে পারি।

৬·১৯·২ কৃত্রিম উপগ্রহের মাধ্যমে যোগাযোগ
Communication through satellite

বর্তমান যুগ বিজ্ঞানের যুগ। বিজ্ঞানের অগ্রযাত্রার সাথে সাথে মানুষের কল্যাণে বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে এর প্রয়োগেরও অভূতপূর্ব অগ্রগতি সাধিত হয়েছে। গত কয়েক দশকে এর অগ্রগতি বিস্ময়কর প্রভাব ফেলেছে মানুষের বুদ্ধিদীপ্ত কাজ-কর্মে। মানুষ দূর-দূরান্তে মুহূর্তের মধ্যে বিভিন্ন প্রযুক্তি ব্যবহার করে যোগাযোগ স্থাপনে সক্ষম হয়েছে। কৃত্রিম উপগ্রহ হলো এমনই আশ্চর্যের জিনিস যার মাধ্যমে পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানে যোগাযোগ স্থাপনসহ মহাকাশের বিভিন্ন গ্রহ উপগ্রহ সম্পর্কে নানাবিধ তথ্য, বিভিন্ন স্থানের চিত্র ধারণ, আবহাওয়ার পূর্বাভাসসহ বিভিন্ন বিষয় জানতে পারি।

● **স্বাভাবিক উপগ্রহ** (Natural satellite) : যেসব বস্তু বা জ্যোতিষ্ক গ্রহের চারদিকে ঘোরে, তাদেরকে উপগ্রহ বলে। **যেসব উপগ্রহ প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্ট তাদেরকে স্বাভাবিক উপগ্রহ বলে।** যেমন চন্দ্র প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্টি হয়েছে। এটি পৃথিবীর চারদিকে ঘুরছে। অতএব চন্দ্র বা চাঁদ পৃথিবীর একটি স্বাভাবিক উপগ্রহ। তেমনি অন্যান্য গ্রহেরও স্বাভাবিক উপগ্রহ রয়েছে। যে ভূ-উপগ্রহের পর্যায়কাল 24 ঘণ্টা তার কক্ষপথকে পার্কিং কক্ষপথ বলে।

● **কৃত্রিম উপগ্রহ** (Artificial satellite) : আমরা জানি সৌরজগৎ নামে একটি জগৎ রয়েছে যার কেন্দ্রে থাকে সূর্য। সূর্য হতে ছিটকে আসা কতগুলো জ্যোতিষ্ক সূর্যকে প্রদক্ষিণ করছে। এদের নাম **গ্রহ** (planet)। পৃথিবী সূর্যের একটি গ্রহ। পুন, গ্রহ হতে ছিটকে আসা কতগুলো জ্যোতিষ্ক গ্রহগুলোকে প্রদক্ষিণ করছে। এদের নাম **উপগ্রহ**। চাঁদ পৃথিবীর একটি উপগ্রহ যা প্রায় 30 দিনে পৃথিবীকে একবার প্রদক্ষিণ করে। সৃষ্টির আদিকাল থেকেই মানুষের মনে কৌতূহল জাগছে কী করে চাঁদ পৃথিবীর চারদিকে ঘুরছে। এ প্রশ্নের জবাবে বিজ্ঞানীরা বলেছেন অভিকর্ষের দরুন চাঁদের ওপর পৃথিবীর কেন্দ্রমুখী বল এর কারণ। এ কেন্দ্রমুখী বল যদি না থাকত, তাহলে চাঁদ মহাশূন্যে মিলিয়ে যেত। পৃথিবীর চারদিকে চাঁদের প্রদক্ষিণের দরুন সৃষ্ট কেন্দ্রবিমুখী বল পৃথিবী কর্তৃক প্রযুক্ত কেন্দ্রমুখী বলের সমান ও বিপরীত হওয়ায় চাঁদ সোজা না গিয়ে পৃথিবীর চারদিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। **এ তত্ত্বের ওপর ভিত্তি করে মানুষ মহাশূন্যে পাড়ি দেয়ার জন্যে যে উপগ্রহ তৈরি করেছে, তার নাম কৃত্রিম উপগ্রহ।**

সংজ্ঞা : যেসব মহাশূন্যযান পৃথিবী থেকে নির্দিষ্ট উচ্চতায় তাদের নিজ নিজ কক্ষপথে থেকে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে তাদের কৃত্রিম উপগ্রহ বলে। তিন স্তরবিশিষ্ট রকেটের সাহায্যে কৃত্রিম উপগ্রহকে নির্দিষ্ট উচ্চতায় তুলে পরে ভূপৃষ্ঠের সমান্তরালে নির্দিষ্ট বেগ দেওয়া হয়। এতে উপগ্রহটি পৃথিবীর চারপাশে চাঁদের মতো ঘুরতে থাকে।

কৃত্রিম উপগ্রহের ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল এই কেন্দ্রমুখী বল যোগান দেয়। অভিকর্ষের টানে পৃথিবীর চারদিকে নির্দিষ্ট কক্ষপথে ঘোরে। নির্দিষ্ট কক্ষপথে ঘোরার জন্য প্রয়োজনীয় দ্রুতি থাকতে হয়।

● **ভূ-স্থির উপগ্রহ** (Geo-stationary satellite) : যদি একটি কৃত্রিম উপগ্রহকে নিরক্ষীয় তলে অবস্থিত একটি কক্ষপথে এমনভাবে স্থাপন করা হয় যে, পৃথিবী যে অভিমুখে নিজ অক্ষের চারদিকে আবর্তন করে, উপগ্রহটিও সেই অভিমুখে অর্থাৎ পশ্চিম থেকে পূর্বে আবর্তন করে এবং ওই কক্ষপথের উচ্চতা যদি এমন হয় যে, উপগ্রহটির আবর্তনকাল পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে আবর্তনকালের সমান অর্থাৎ 24 ঘণ্টা হয়, তা হলে পৃথিবী থেকে দেখলে ওই উপগ্রহটি নিরক্ষরেখার ওপরে একটি নির্দিষ্ট স্থানে স্থির আছে বলে মনে হয়। এরূপ **কৃত্রিম উপগ্রহকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলে এবং নির্দিষ্ট কক্ষপথে স্থাপনের আগে উপগ্রহটিকে সাময়িকভাবে যে কক্ষপথে ঘুরানো হয় সেই কক্ষপথকে পার্কিং কক্ষপথ বলে।** অর্থাৎ **যে ভূ-উপগ্রহের পর্যায়কাল 24 ঘণ্টা তার কক্ষপথকে পার্কিং কক্ষপথ বলে।**

সংজ্ঞা : কোনো কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান পৃথিবীর আবর্তনকালের সমান হলে পৃথিবীর সাপেক্ষে এটি স্থির থাকবে এ ধরনের উপগ্রহকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলে।

ব্যবহার :

১। টেলিফোন ও ইন্টারনেটের মাধ্যমে আন্ত মহাদেশীয় যোগাযোগ স্থাপনে ব্যবহৃত হয়।
২। আবহাওয়ার পূর্বাভাস পাওয়া যায়।
৩। পৃথিবীর আকার সম্পর্কিত ভূ-জরিপ কাজে ব্যবহৃত হয়।
৪। সমুদ্রের গভীরতা নির্ণয় করতে ব্যবহৃত হয়।
৫। ভূপৃষ্ঠের বিভিন্ন অঞ্চল বেতার ও টেলিভিশনের রিলে স্টেশন হিসেবে ব্যবহৃত হয়।
৬। উর্ধ্বাকাশের বিভিন্ন বিকিরণ ও তার প্রভাব সম্পর্কে বিভিন্ন তথ্য অনুসন্ধানে ব্যবহৃত হয়।
৭। প্রতিরক্ষামূলক পাহারা ও বিভিন্ন সামরিক ব্যবস্থায় ব্যবহৃত হয়।
৮। খেলাধুলাসহ বিভিন্ন অনুষ্ঠান ধারণ ও প্রেরণে ব্যবহৃত হয়।
৯। গ্রহ নক্ষত্রের গঠন সম্পর্কে গবেষণার কাজে ব্যবহৃত হয়।
১০। মহাজাগতিক রশ্মিসহ বিভিন্ন রশ্মির উৎসসহ নানাবিধ গবেষণা করতে ব্যবহৃত হয়।

৬·২০ মহাশূন্যচারীর ওজনহীনতা
Weightlessness of an astronaut

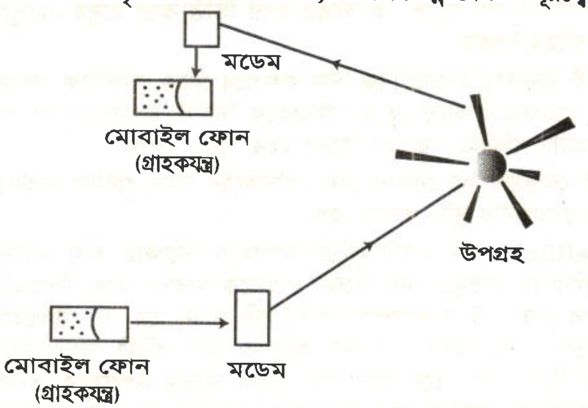
কোনো বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলই বস্তুর ওজন। যদি কোনো বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল না থাকে তা হলেই বস্তু ওজনহীন হবে। পৃথিবীর কেন্দ্রে বা পৃথিবী থেকে অসীমে বা চাঁদ বা অন্য কোনো গ্রহ এবং পৃথিবীর মাঝে যেখানে কোনো বস্তুর ওপর পৃথিবীর আকর্ষণ থাকে না অর্থাৎ যেখানে $g = 0$ হয় সেখানে বস্তু ওজনহীন হয়। পৃথিবীতে কোনো বস্তুর ওপর যখন তার ওজনের সমান ও বিপরীতমুখী কোনো প্রতিক্রিয়া বল প্রযুক্ত হয় তখনই তা ওজন অনুভব করে।

মহাশূন্যচারীরা মহাশূন্যযানে করে পৃথিবীকে একটা নির্দিষ্ট উচ্চতায় বৃত্তাকার কক্ষপথে প্রদক্ষিণ করেন। ফলে বৃত্তাকার গতির জন্য মহাশূন্য যানের পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে ওই উচ্চতায় g-এর মানের সমান একটি ত্বরণ হয়। এ অবস্থায় মহাশূন্যযানের দেওয়ালের সাপেক্ষে মহাশূন্যচারীর ত্বরণ $(g - g) = 0$ হয় এবং মহাশূন্যচারী মহাশূন্যযানের দেওয়ালের বা মেঝেতে কোনো বল প্রয়োগ করেন না। ফলে তিনি তার ওজনের বিপরীত কোনো প্রতিক্রিয়া বলও অনুভব করেন না। তাই তিনি ওজনহীনতা অনুভব করেন। এই অবস্থায় মহাশূন্যচারী মহাশূন্য থেকে না পড়ে দাঁড়িয়ে থাকবেন।

মহাশূন্যচারীর ভর থাকায় এবং ওই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ থাকায় ওজন থাকে। কিন্তু যখন মহাশূন্যযানে g ত্বরণে গতিশীল হয় তখন মহাশূন্যচারী ওজনহীনতা অনুভব করেন।

৬·২১ কৃত্রিম উপগ্রহের মাধ্যমে মোবাইল ফোন, টেলিফোন এবং ইন্টারনেটে তথ্য প্রেরণ প্রযুক্তি
Technology of transmitting of informations in mobile phone, telephone and internet through artifical satellite

ভূস্থির উপগ্রহ যোগাযোগ ব্যবস্থায় বহুলভাবে ব্যবহৃত হয়। একে বলা হয় SYNCOM Satellite (Synchronous Communication Satellite)। টেলিভিশন সংকেত, টেলিফোন কথপোকথন, বেতার সংকেত ইত্যাদি এ উপগ্রহ দ্বারা প্রতিফলিত হয়ে পৃথিবীতে ফিরে আসে, ফলে বিভিন্ন দেশ ও দূরত্বের সঙ্গে যোগাযোগ স্থাপন করা সহজ হয়।



চিত্র ৬·২৭

মূলনীতি : প্রেরক যন্ত্র যেমন মোবাইল ফোন, ইন্টারনেট, টেলিফোন থেকে বৈদ্যুতিক সংকেতকে প্রথমে প্রেরণ করা হয় মডেম নামক যন্ত্রে। পরে মডেম থেকে বৈদ্যুতিক সংকেত ইলেকট্রো ম্যাগনেটিক তরঙ্গ আকারে প্রেরণ করা হয় উপগ্রহের অ্যান্টেনাতে। উপগ্রহের অ্যান্টেনা থেকে ইলেকট্রো ম্যাগনেটিক তরঙ্গ প্রেরণ করা হয় মডেমে। সেই মডেম থেকে পুনরায় গ্রাহক যন্ত্রে অর্থাৎ যার সাথে যোগা-যোগ স্থাপন করতে চাই সেই যন্ত্রে (মোবাইল, টেলিফোন, কম্পিউটারে) পৌছে। প্রক্রিয়াটি প্রায় তাৎক্ষণিক ঘটে [চিত্র ৬·২৭]। তথ্য আদান-প্রদানে এই প্রযুক্তি ব্যবহৃত হয়।

পোলার উপগ্রহ : আর এক ধরনের উপগ্রহ রয়েছে। এদেরকে বলা হয় পোলার উপগ্রহ (Polar Satellite)। এই উপগ্রহগুলো খুব কম উচ্চতায় (সাধারণত 500 km থেকে 800 km এর মধ্যে) উৎক্ষেপণ করা হয়। উত্তর দক্ষিণে এই

উপগ্রহ আবর্তিত হয়। ভূপৃষ্ঠের খনিজ সম্পদ অন্বেষণ, বনজ, কৃষিজ এবং সামুদ্রিক সম্পদ অন্বেষণে এই উপগ্রহ ব্যবহৃত হয়। বিভিন্ন দেশের টেলিভিশন অনুষ্ঠান দেখতে, ই-মেইল, ফ্যাক্স, ওয়েবসাইট ব্রাউজ করতে কৃত্রিম উপগ্রহ গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। কৃত্রিম উপগ্রহের জন্য দেশ বিদেশের সাথে যোগাযোগ রক্ষা করা সম্ভব ও সহজ হয়েছে।

৬·২২ কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ, পর্যায়কাল, উচ্চতা এবং গতিশক্তি নির্ণয়
Determination of velocity, time period height and kinetic energy of an artificial satellite

কৃত্রিম উপগ্রহের বেগ : মনে করি, ভূপৃষ্ঠ হতে একটি ভূ-স্থির উপগ্রহের উচ্চতা h, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R হলে ওই উপগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ $r = R + h$। পৃথিবীর মহাকর্ষীয় আকর্ষণ উপগ্রহটির আবর্তনের জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল যোগান দেয়। সুতরাং উপগ্রহটির বেগ v হলে, $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ ।

এখানে, M ও m হলো যথাক্রমে পৃথিবী এবং উপগ্রহের ভর।

$$\therefore \quad v^2 = \frac{GM}{r} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.38)$$

$$\text{বা,} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.39)$$

$$\text{বা,} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^2} \times (R+h)} = \sqrt{g_n' \times (R+h)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad [6.39(\text{ক})]$$

$$\text{আবার,} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R^2} \times \frac{R^2}{(R+h)}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad [6.39(\text{খ})]$$

কৃত্রিম উপগ্রহের পর্যায়কাল : উপগ্রহটির পর্যায়কাল T হলে অর্থাৎ ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় থেকে পৃথিবীকে সম্পূর্ণ একবার প্রদক্ষিণ করতে T সময় লাগলে,

$$T = \frac{\text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{\text{রৈখিক বেগ}}$$

$$= \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R+h)}{v} \quad [\because r = R + h]$$

$$\text{বা,} \quad v = \frac{2\pi(R+h)}{T}$$

সমীকরণ (6.39) অনুসারে,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi(R+h)}{T} = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$$

$$\text{বা,} \quad T = 2\pi\,(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.40)$$

কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা : মনে করি পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা $= h$, সমীকরণ (6.40)-এর উভয় পাশে বর্গ করে পাই,

$$\therefore \quad T^2 = \frac{4\pi^2\,(R+h)^3}{GM}$$

$$\text{বা,} \quad (R+h)^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} \quad \text{বা,} \quad R + h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6.41)$$

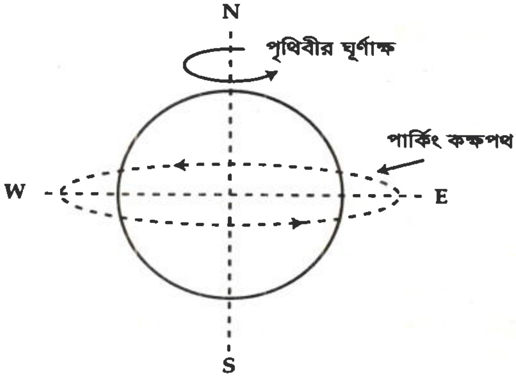
গতিশক্তি : m ভরের একটি উপগ্রহ পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় অবস্থিত হলে,
$r = R + h$ হয়, যেখানে R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ।
সুতরাং উপগ্রহের গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\,\frac{mGM}{R+h}$; সমীকরণ (6.39) ব্যবহার করে।

> **যাচাই কর :** মনে কর একই কক্ষ পথে দুটি উপগ্রহকে প্রেরণ করা হলো। একটির ভর অপরটির দ্বিগুণ। তা হলে দ্বিগুণ ভরবিশিষ্ট উপগ্রহের আবর্তনকালের কোনোরূপ পরিবর্তন হবে কী ? —ব্যাখ্যা কর।

ভূপৃষ্ঠের খুব নিকটে আবর্তনরত উপগ্রহ : যদি কোনো কৃত্রিম উপগ্রহ ভূপৃষ্ঠের খুব নিকটে থাকে অর্থাৎ R-এর তুলনায় h খুব ছোট হলে, যেসব উপগ্রহ পৃথিবীকে বৃহত্তর ব্যাসার্ধের কক্ষপথে প্রদক্ষিণ করে, তাদের আবর্তনকাল বেশি হয় এবং প্রদক্ষিণ বেগ খুব কম হয়। স্পষ্টত প্রতিটি কক্ষপথে প্রদক্ষিণ বেগের একটি নির্দিষ্ট মান থাকে। এই বেগ অপেক্ষা কম বেগে ওই কক্ষপথে কোনো কৃত্রিম উপগ্রহকে স্থাপন করলে উপগ্রহটি ওই কক্ষপথে স্থায়ীভাবে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করতে পারবে না এবং ভূপৃষ্ঠে নেমে আসবে।

৬.২২.১ পার্কিং কক্ষপথের উচ্চতা ও ভূ-স্থির উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ
Height of parking orbit and orbital velocity of a geostationary satellite

মনে করি পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R, পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে ভূ-স্থির উপগ্রহের উচ্চতা h, ভূ-স্থির উপগ্রহটির ভর m, প্রদক্ষিণ বেগ v এবং প্রদক্ষিণকাল T [চিত্র ৬.২৮]।



চিত্র ৬.২৮ : ভূ-স্থির উপগ্রহের পার্কিং কক্ষপথ।

সুতরাং পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে ভূ-স্থির উপগ্রহটির দূরত্ব, $r = R + h$

এখন, মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল যেহেতু উপগ্রহটির আবর্তনের জন্য প্রয়োজনীয় অভিকেন্দ্র বল সরবরাহ করে, তাই

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

বা, $$v^2 = \frac{GM}{r} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (6.42)$$

আবার আমরা জানি অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\therefore \quad GM = gR^2$$

সমীকরণ (6.42)-এ এই মান বসিয়ে পাই,

$$v^2 = \frac{gR^2}{r}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{gR^2}{r}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (6.43)$$

অতএব প্রদক্ষিণকাল,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{gR^2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (6.44)$$

বা, $$T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{gR^2}$$

উপগ্রহটির কক্ষপথের ব্যাসার্ধ, r

$$r = \left(\frac{T^2 gR^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (6.45)$$

সুতরাং ভূ-স্থির উপগ্রহের উচ্চতা,

$$h = r - R$$

$$= \left(\frac{T^2 g R^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (6.46)$$

এখন ভূস্থির উপগ্রহের পর্যায়কাল বা প্রদক্ষিণ কাল,

$T = 24\ \text{hrs} = 24 \times 60 \times 60\ \text{s} = 86400\ \text{s}$

$g = 9{\cdot}81\ \text{ms}^{-2}$

$R = 6400\ \text{km} = 6{\cdot}4 \times 10^6\ \text{m}$

এই মানগুলো সমীকরণ (6.45)-এ বসিয়ে পাই,

$$r = \left\{\frac{(86400)^2 \times 9{\cdot}81 \times (6{\cdot}4 \times 10^6)^2}{4 \times 9{\cdot}87}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$= 4{\cdot}235 \times 10^7$ m (প্রায়)

$= 42350$ km

সমীকরণ (6.46)-এ r এবং R-এর মান বসিয়ে নিরক্ষরেখা থেকে পার্কিং কক্ষপথের উচ্চতা,

$h = r - R = (42350 - 6400)$ km

$= 35950$ km বা $\simeq 36000$ km

ভূ-স্থির উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ,

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 4235 \times 10^7}{86400}$$

$\simeq 3078\ \text{ms}^{-1} \simeq 3{\cdot}08\ \text{kms}^{-1}$

এই প্রদক্ষিণ বেগের মান পৃথিবীর মুক্তিবেগ ($11{\cdot}2\ \text{kms}^{-1}$) বা ভূপৃষ্ঠের নিকটে আবর্তনরত কৃত্রিম উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ ($7{\cdot}9\ \text{kms}^{-1}$)-এর মানের চেয়ে অনেক কম।

৬.২২.২ উপগ্রহের স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি
Potential energy and kinetic energy of a satellite

ধরা যাক m ভরের একটি উপগ্রহ পৃথিবীকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার কক্ষপথে v বেগে প্রদক্ষিণ করছে।

সুতরাং উপগ্রহটির গতিশক্তি, $K = \frac{1}{2} mv^2$

আবর্তনরত উপগ্রহের ওপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল,

$$F_C = \frac{mv^2}{r}$$

এবং উপগ্রহ ও পৃথিবীর মধ্যে মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল,

$$F_g = \frac{GMm}{r^2}$$, M = পৃথিবীর ভর

যেহেতু উপগ্রহের ওপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল থেকে আসে, সুতরাং

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \therefore \quad mv^2 = \frac{GMm}{r}$$

অতএব গতিশক্তি, $K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{2r} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(i)}$

আবার পৃথিবী ও উপগ্রহটির অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি,

$$U = \frac{-GMm}{r} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

সুতরাং, বৃত্তাকার কক্ষপথে আবর্তনরত উপগ্রহটির স্থিতিশক্তি এর গতিশক্তির দ্বিগুণ।

$\therefore$ কক্ষপথে উপগ্রহটির মোট যান্ত্রিক শক্তি,

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(iii)}$$

সুতরাং, মোট শক্তি ঋণাত্মক।

৬.২২.৩ ভূ-স্থির উপগ্রহের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of geostationary satellite

ভূ-স্থির উপগ্রহের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যসমূহ লক্ষ করা যায়—

১। পৃথিবীকে কেন্দ্র করে উপগ্রহটি বৃত্তাকার পথে আবর্তন করে।

২। উপগ্রহটির আবর্তনকাল পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে আবর্তনকালের সমান। অর্থাৎ 24 ঘণ্টা।

৩। উপগ্রহটির কক্ষপথ পৃথিবীর নিরক্ষীয় তলে অবস্থান করে।

৪। উপগ্রহটি পৃথিবীর অনুরূপ পশ্চিম থেকে পূর্ব দিকে আবর্তন করে।

৫। ভূ-স্থির উপগ্রহটির উচ্চতা এবং পরিক্রমণ বেগ কোনোটিই উপগ্রহের ভরের ওপর নির্ভর করে না।

৬। নিরক্ষরেখা থেকে উপগ্রহটির কক্ষপথের উচ্চতা প্রায় 36,000 km।

৬.২২.৪ ভূ-স্থির উপগ্রহের ব্যবহার Reading
Applications of geostationary satellite

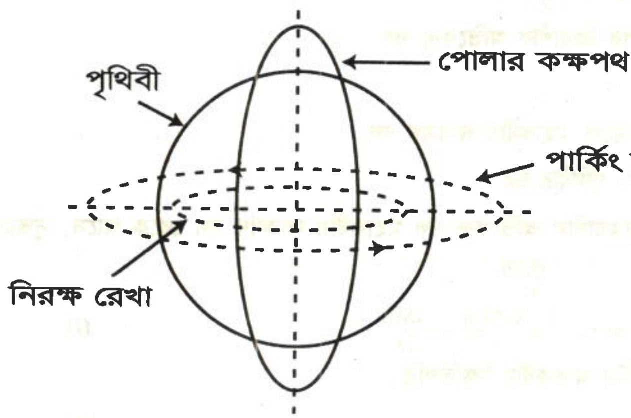
১। ভূ-স্থির উপগ্রহে রিলে (Relay) ট্রান্সমিটার ব্যবহার করে পৃথিবীর এক স্থান হতে বিভিন্ন অনুষ্ঠান, খেলাধুলা, গান-বাজনা ইত্যাদি পৃথিবীর অন্য স্থানে সহজেই দেখানো যায়।

২। আবহাওয়ার পূর্বাভাস প্রদান ও পর্যবেক্ষণ করা যায়।

৩। ভূ-স্থির উপগ্রহগুলো পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে প্রায় 36000 km ওপরে থাকে বিধায় কোনো তড়িচ্চুম্বকীয় সংকেত (electromagnetic signal) উপগ্রহে স্থাপিত রিলে স্টেশন থেকে প্রতিফলিত হয়ে পৃথিবীর এক স্থান থেকে অন্য স্থানে যেতে প্রায় (36000 × 2 km) = 72000 km পথ অতিক্রম করতে হয় এবং এ পথ অতিক্রম করতে প্রায় $\frac{1}{4}$ সেকেন্ড সময় লাগে। এর ফলে রেডিও বা টিভি সম্প্রচারে কোনো অসুবিধা না হলেও দূরবর্তী অবস্থানের গ্রাহকদের মধ্যে টেলিফোন কথোপকথনে এই সময় ব্যবধানের জন্য অসুবিধার সৃষ্টি হয়। তা ছাড়া ভূ-স্থির উপগ্রহগুলো নিরক্ষীয় তলে পৃথিবীকে আবর্তন করে বলে পৃথিবীর মেরু অঞ্চলে এগুলো ঠিকমতো কাজ করে না।

৬.২৩ মেরু বা পোলার উপগ্রহ
Polar satellite

ভূ-স্থির উপগ্রহগুলো ছাড়াও আরও এক ধরনের কৃত্রিম উপগ্রহ নিরক্ষীয় মধ্যতলের পরিবর্তে মেরু মধ্যতলে ভূপৃষ্ঠ থেকে 700–800 km ওপরে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করে। এই উপগ্রহগুলোকে মেরু বা পোলার উপগ্রহ বলে [চিত্র ৬.২৯]।



চিত্র ৬.২৯

এই উপগ্রহগুলোর আবর্তনকাল প্রায় 110 মিনিট। যেহেতু এই উপগ্রগুলো ভূপৃষ্ঠের কাছে অবস্থিত; সুতরাং এগুলোর মাধ্যমে পৃথিবীর এক স্থান হতে অন্য স্থানে কোনো সংকেত পৌঁছাতে $\frac{1}{100}$ সেকেন্ড সময় লাগে। এত অল্প সময়ে সংকেত পাঠানো যায় বলে টেলিফোন কথোপকথনে কোনো অসুবিধা হয় না।

ভূ-স্থির উপগ্রহের ন্যায় এগুলো ভূপৃষ্ঠের ওপর আপাতত স্থির অবস্থানে থাকে না।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.১০

১। একটি উপগ্রহ নিজ অক্ষে 10 ঘণ্টায় একবার আবর্তন করে। এর ব্যাস 14×10^4 m। 10^4 kg ভরবিশিষ্ট একটি নভোযান উপগ্রহটিতে অবতরণ করলে উপগ্রহের নিজ অক্ষের ঘূর্ণনের কারণে নভোযানের ওজন হ্রাস কত হবে ?

[Admission Test : BUET 2015-16 (মান ভিন্ন); RUET 2014-15 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2 \times 3.14 \times 1}{36000}$$

$$= 1.74 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$$

উপগ্রহের ওজন হ্রাস $= \frac{mv^2}{R}$

$$= \frac{m(\omega R)^2}{R} = m\omega^2 R$$

$$= 10^4 \times (1.74 \times 10^{-4})^2 \times 7 \times 10^4$$

$$= 21.3 \text{ N}$$

এখানে,

$t = 10$ h $= 10 \times 3600 = 36000$ sec

ব্যাস, $D = 14 \times 10^4$ m

ব্যাসার্ধ, $R = \frac{14 \times 10^4}{2} = 7 \times 10^4$ m

নভোযানের ভর, $m = 10^4$ kg

$N = 1$

২। একটি ভূ-স্থির উপগ্রহ পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে 4R উচ্চতায় পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে। পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে 2R উচ্চতায় অপর একটি উপগ্রহের আবর্তনকাল নির্ণয় কর। (R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ)

আমরা জানি কেপলারের তৃতীয় সূত্রানুযায়ী, $T^2 \propto r^3$

সুতরাং, প্রথম ও দ্বিতীয় উপগ্রহের পর্যায়কাল যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং কক্ষপথের ব্যাসার্ধ r_1 ও r_2 হলে আমরা পাই,

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

বা, $T_2^2 = T_1^2 \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$

বা, $T_2 = T_1 \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$= 24 \times \left(\frac{5R}{3R}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ hr}$$

$$= 24 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ hr} = 51.64 \text{ hr}$$

এখানে,

$T_1 = 24$ hr

$r_1 = 4R + R = 5R$

$r_2 = (2R + R) = 3R$

৬.২৪ বস্তু গবেষণা
Material research

আমরা জানি, পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ 11.2 kms^{-1}। অর্থাৎ পৃথিবী থেকে মুক্তি পেতে হলে বা পৃথিবীর মহাকর্ষীয় বলের আকর্ষণ থেকে মুক্ত হতে হলে কোনো বস্তুকে 11.2 kms^{-1} বা 7 miles/s বেগে যাত্রা করতে হবে।

পৃথিবীর আবহমণ্ডলে বহু ধরনের গ্যাস আছে। তবে হাইড্রোজেন, হিলিয়ামের মতো হাল্কা গ্যাস বেশ দুষ্প্রাপ্য। এর কারণ মুক্তিবেগের ধারণা থেকে ব্যাখ্যা করা যায়। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে হাইড্রোজেন অণুর গতিবেগের গড় বর্গের বর্গমূল মান (rms) প্রায় 1.6 kms^{-1}। কিন্তু পৃথিবী সৃষ্টির শুরুতে ভূপৃষ্ঠের তাপমাত্রা খুব বেশি ছিল এবং তখনকার তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন অণুর গতিবেগের গড় বর্গের বর্গমূল মান প্রায় 4 থেকে 5 kms^{-1} ছিল। এদের মধ্যে কিছু কিছু অণুর প্রকৃত গতিবেগ গড় বর্গের বর্গমূল মানের 2 বা 3 গুণ অধিক হওয়া স্বাভাবিক ছিল। অতএব, এটা খুবই সম্ভব যে পৃথিবীর বায়ুমণ্ডল থেকে হাইড্রোজেন এবং হিলিয়ামের মতো হাল্কা গ্যাসের অধিকাংশ অণুর গতিবেগ মুক্তিবেগের সমান ছিল। সুতরাং এ ধরনের গ্যাসের বেশির ভাগ অণু ভূপৃষ্ঠ হতে ধীরে ধীরে বিলীন হয়ে গেছে।

আমরা জানি, মহাজগতের বস্তুসমূহের মুক্তিবেগ (escape velocities of universal materials) এদের ভরের ওপর নির্ভর করে। সূর্যের ভর পৃথিবীর তুলনায় বহুগুণ বেশি; ফলে সূর্যের মুক্তিবেগও বেশি। তাই সূর্যের আবহমণ্ডলে

হাইড্রোজেনের মতো হাল্কা গ্যাস রয়েছে। আবার চন্দ্র, বুধ, গ্রহ এবং পৃথিবীর ভরের তুলনায় অনেক কম, তাই এদের মুক্তিবেগও কম। ফলে গ্যাসীয় অণুসমূহ বিলীন হয়ে গেছে।

সুতরাং, ইহা স্পষ্ট যে মহাকর্ষ সূত্র প্রয়োগ করে বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের বিভিন্ন নক্ষত্র, গ্রহ, উপগ্রহ মুক্তিবেগসহ অন্যান্য অনেক তথ্য উপাত্ত সংগ্রহ করে ওই সমস্ত মহাজগতের বস্তুসমূহের বিভিন্ন গ্যাসীয়, তরল, কঠিন পদার্থের উপস্থিতি সম্বন্ধে স্পষ্ট ধারণা এবং জ্ঞান লাভ করা সম্ভব।

গাণিতিক উদাহরণ ৬.১১

১। কোনো এক উচ্চতা যেখানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান $g_h = 8\ \text{ms}^{-2}$, সেখানে একটি উপগ্রহের বেগ 8 kms^{-1}। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় উপগ্রহটি পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে নির্ণয় কর। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m)।

[CUET Admission Test , 2015-16]

এখানে,
$g = g_h = 8\ \text{ms}^{-2}$
$v = 8\ \text{kms}^{-1} = 8 \times 10^3\ \text{ms}^{-1}$
$R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

আমরা জানি,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

আবার, $g_h = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$

বা, $GM = g_h (R+h)^2$

$$\therefore \quad v = \sqrt{g_h \frac{(R+h)^2}{(R+h)}} = \sqrt{g_h (R+h)} = \sqrt{8 \times (R+h)}$$

বা, $8 \times 10^3 = \sqrt{8 \times (R+h)}$

বা, $(R+h) = \dfrac{(8 \times 10^3)^2}{8} = 8 \times 10^6$

বা, $h = 8 \times 10^6 - R = 8 \times 10^6 - 6{\cdot}4 \times 10^6$
$= 1{\cdot}6 \times 10^6$ m $= 1600$ km

২। 80 kg ওজনের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ ভূপৃষ্ঠ থেকে কত উচ্চতায় স্থাপন করলে তা প্রতি 24 ঘণ্টায় 2 বার একই স্থান পর্যবেক্ষণ করতে পারবে ? পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km ও তার ভর 6×10^{21} ton।

[BUET Admission Test, 2017-18]

এখানে,
$M_E = 6 \times 10^{21}$ ton
$= 6 \times 10^{24}$ kg
$m = 80$ kg
$R = 6400$ km
$= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
$T = \dfrac{24}{2} = 12$ hr

আমরা জানি,

$$h = \left(\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R$$

$$= \left\{\frac{6{\cdot}673 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times (12 \times 60 \times 60)^2}{4 \times (3{\cdot}14)^2}\right\}^{\frac{1}{3}} - 6{\cdot}4 \times 10^6$$

$$= 2{\cdot}66 \times 10^6 - 6{\cdot}4 \times 10^6 = 20{\cdot}2 \times 10^6 \text{ m}$$

৩। একটি উপগ্রহ পৃথিবীকে 90 মিনিটে একটি বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করতে পারে। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে উপগ্রহটির উচ্চতা নির্ণয় কর। ($R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m, $g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$)

এখানে,
$T = 90$ min $= 90 \times 60$ s
$R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$
$h = ?$

আমরা জানি, পর্যায়কাল,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}}$$

বা, $(R+h)^3 = \dfrac{T^2 gR^2}{4\pi^2}$

বা, $$R + h = \left(\frac{T^2 gR^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{(90 \times 60)^2 \times 9{\cdot}8 \times (6{\cdot}4 \times 10^6)^2}{4 \times 9{\cdot}87}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$= 6668 \times 10^3$ m $= 6668$ km

$\therefore$ পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে উপগ্রহটির উচ্চতা, $h = 6668 - 6400 = 268$ km

৪। একটি উপগ্রহ পৃথিবী পৃষ্ঠের কাছাকাছি থেকে পৃথিবীকে বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করছে। উপগ্রহটিকে কত গতিবেগ প্রদান করলে সেটি পৃথিবীর আকর্ষণ বল ছাড়িয়ে মহাশূন্যে বিলীন হবে ? ($R = 6.4 \times 10^6$ m, $g = 9.8$ ms^{-2}) [রা. বো. ২০২২]

আমরা জানি উপগ্রহটির কক্ষীয় গতিবেগ, $v = \sqrt{gR}$

এবং পৃথিবী পৃষ্ঠে মুক্তিবেগ, $v_e = \sqrt{2gR}$

মনে করি উপগ্রহটিকে প্রয়োজনীয় অতিরিক্ত বেগ Δv-তে নিক্ষেপ করলে সেটি পৃথিবীর আকর্ষণ ছাড়িয়ে মহাশূন্যে বিলীন হবে।

$$\Delta v = v_e - v = \sqrt{2gR} - \sqrt{gR} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{gR}$$

$$\therefore \Delta v = 0.41 \times \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} \text{ ms}^{-1} = 3.25 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

$$= 3.25 \text{ kms}^{-1}$$

এখানে,
$R = 6.4 \times 10^6$ m
$g = 9.8$ ms^{-2}

৫। ভূপৃষ্ঠ থেকে খাড়া ওপরের দিকে একটি রকেটকে 5 kms^{-1} দ্রুতিতে উৎক্ষেপণ করা হলো। রকেটটি ঠিক ফিরবার মুহূর্তে ভূপৃষ্ঠ থেকে কত উচ্চতায় পৌঁছাবে তা বের কর। [BUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে সর্বাধিক h উচ্চতায় উঠাতে কৃত কাজ রকেটের গতিশক্তির সমান।

অর্থাৎ গতিশক্তি, $\frac{1}{2}mv^2 = GMm\int_R^h \frac{dr}{r^2}$ বা, $\frac{v^2}{2GM} = \left[-\frac{1}{r}\right]_R^h$

$$\therefore \frac{1}{R} - \frac{1}{h} = \frac{v^2}{2GM}$$

$$\therefore \frac{1}{h} = \frac{1}{R} - \frac{v^2}{2GM} = \frac{1}{6.4 \times 10^6} - \frac{(5000)^2}{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}$$

$$= 1.250 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\therefore h = 7.999 \times 10^6 \text{ m}$$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= h - R = (7.999 - 6.4) \times 10^6 = 1.599 \times 10^6$ m

এখানে,
$v = 5$ kms^{-1} $= 5000$ ms^{-1}
$G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
$R = 6.4 \times 10^6$ m
$M = 6 \times 10^{24}$ kg

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

গ্যালিলিওর ২য় সূত্র, $\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2}$ ... ... (1)

গ্যালিলিওর ৩য় সূত্র, $\frac{h_1}{t_1^2} = \frac{h_2}{t_2^2}$ ... ... (2)

মহাকর্ষ বল $= G\frac{m_1 m_2}{d^2}$ ... ... (3)

অভিকর্ষ বল, $F = \frac{GMm}{d^2}$ ... ... (4)

$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm}\right) \times r^3$ ... ... (5)

ভূপৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi GR\rho$ ... ... (6)

$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ ... ... (7)

$g' = g\left(1 - \frac{h}{R}\right)$ ... ... (8)

$W = mg$ ... ... (9)

পৃথিবীর ভর, $M = \frac{gR^2}{G} = \frac{4\pi GR\rho}{3}$ ... ... (10)

$\rho = \frac{3\,M}{4\pi GR}$ ... ... (11)

$g' = g\left(1 - \frac{\omega^2 R \cos^2 \lambda}{g}\right)$ ... ... (12)

$g' = g\left(1 - \frac{\omega^2 R}{g}\right)$ ... ... (13)

$E = \frac{GM}{r^2}$ ... ... (14)

$V = -\frac{GM}{r}$ ... ... (15)

উপগ্রহের রৈখিক বেগ, $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ ... ... (16)

$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$ ... ... (17)

$T = 2\pi\,(R+h)\sqrt{\frac{R_e h}{GM}}$ ... ... (18)

উচ্চতা, $h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$ ... ... (19)

অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি, $U = -\frac{GMm}{r}$ ... ... (20)

অভিকর্ষীয় গতিশক্তি, $K = \frac{GMm}{R^2}$ ... ... (21)

নিরেট গোলকের অভ্যন্তরে মহাকর্ষীয় বিভব, $V = \frac{-GM\,(3a^2 - r^2)}{2a^3}$ ... ... (22)

নিরেট গোলকের অভ্যন্তরে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, $E = -\frac{GM}{a^3} r$ ... ... (23)

নিরেট গোলকের বাইরে কোনো বিন্দুতে মহকর্ষীয় বিভব, $V_D = -\frac{GM}{a}$ ... ... (24)

নিরেট গোলকের বাইরে কোনো বিন্দুতে মহকর্ষীয় প্রাবল্য, $E_p = \frac{+GM}{a^2}$ ... ... (25)

ফাঁপা গোলকের বাইরে মহাকর্ষীয় বিভব, $V = \frac{-GM}{r}$ ... ... (26)

ফাঁপা গোলকের বাইরে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, $E = \frac{GM}{r^2}$ ... ... (27)

ফাঁপা গোলকের ভিতরে মহাকর্ষীয় বিভব, $V_p = -2\pi\,G\rho(a^2 - b^2)$ ... ... (28)

ফাঁপা গোলকের ভিতরে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, $E_p = +\frac{dV_p}{dr} = 0$ ... ... (29)

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। ঢাকার ভূপৃষ্ঠ হতে খাড়া 26000 km ওপরে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ স্থাপন করা হলো। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km এবং ভর 6×10^{24} kg

(ক) কৃত্রিম উপগ্রহটির কক্ষীয় বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উপগ্রহটিকে সব সময় ঢাকার ওপর দেখা যাবে কি? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মত দাও।

[সি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০২২]

(ক) আমরা জানি উপগ্রহের কক্ষীয় বেগ,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

বা, $$v = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6 + 26 \times 10^6}}$$

$$= \sqrt{\frac{6.67 \times 6 \times 10^{13} \times 10^{-6}}{32.4}}$$

$$= \sqrt{12.35 \times 10^6} = 3.5 \times 10^3\ ms^{-1}$$

এখানে,

$h = 26000\ km = 26 \times 10^6\ m$

$R = 6400\ km = 6.4 \times 10^6\ m$

$M = 6 \times 10^{24}$ kg

(খ) উপগ্রহটির পর্যায়কাল,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R+h)}{v}$$

$$= \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times (6{\cdot}4 \times 10^6 + 26 \times 10^6)}{3{\cdot}5 \times 10^3}$$

$$= \frac{6{\cdot}28 \times 32{\cdot}4 \times 10^6 \times 10^{-3}}{3{\cdot}5}$$

$= 58 \times 10^3 = 58000$ s $= 16$ ঘণ্টা

ঢাকার ওপরে উপগ্রহটি সব সময় দেখা যাবে যদি উপগ্রহটি ভূস্থির উপগ্রহ হয় যার পর্যায়কাল 24 ঘণ্টা; কিন্তু এই উপগ্রহের পর্যায়কাল 16 ঘণ্টা যা অনেক কম। সুতরাং, এটি সব সময় দেখা যাবে না।

২। 120 kg ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহকে ভূপৃষ্ঠ হতে একটি নির্দিষ্ট উচ্চতায় তুলে তার মধ্যে $3{\cdot}6 \times 10^9$ Joule গতিশক্তি সঞ্চারিত করা হলো। পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6×10^{24} kg এবং $6{\cdot}4 \times 10^6$ m।

($G = 6{\cdot}6 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}, $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2})

(ক) উপগ্রহটি ভূপৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় আছে ?

(খ) গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর যে সঞ্চারিত গতিশক্তি উপগ্রহটিকে বহিঃবিশ্বে পাঠানোর জন্য পর্যাপ্ত নয়। [দি. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) মনে করি, উপগ্রহটি ভূপৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় আছে এবং উপগ্রহটির বেগ, v

এখানে,
$m = 120$ kg
$M = 6 \times 10^{24}$ kg
$R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
$G = 6{\cdot}6 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
$g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}
$E_k = 3{\cdot}6 \times 10^9$ Joule

আমরা জানি,

$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ এবং $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{2E_k}{m}$$

বা, $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \frac{GM}{R+h}$

বা, $\frac{2E_k}{m} = \frac{GM}{R+h}$

বা, $R + h = \frac{GMm}{2E_k}$

বা, $h = \frac{GMm}{2E_k} - R$

$$= \frac{6{\cdot}6 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times 120}{2 \times 3{\cdot}6 \times 10^9} - 6{\cdot}4 \times 10^6$$

$= 6{\cdot}6 \times 10^6 - 6{\cdot}4 \times 10^6 = 0{\cdot}2 \times 10^6$ m

$= 200$ km

(খ) আবার,

$v^2 = 6 \times 10^7$

$\therefore \quad v = \sqrt{60 \times 10^6} = 7{\cdot}75 \times 10^3$ kms^{-1}

সুতরাং উপগ্রহটি বহিঃবিশ্বে যেতে হলে সর্বনিম্ন গতিশক্তি প্রয়োজন হবে,

$$E = \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2} \times 120 \times (11{\cdot}2 \times 10^3)^2$$

$= 7{\cdot}5 \times 10^9$ Joule

সুতরাং, উপগ্রহটিতে সঞ্চারিত গতিশক্তি $3{\cdot}6 \times 10^9$ Joule যা বহিঃবিশ্বে গমনের গতিশক্তি অপেক্ষা কম, অর্থাৎ পর্যাপ্ত নয়।

৩। কৃত্রিম উপগ্রহ উৎক্ষেপণ কেন্দ্র হতে $3{\cdot}6 \times 10^4$ km উচ্চতায় একটি কৃত্রিম উপগ্রহ উৎক্ষেপণ করা হলো, যেখানে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং মহাকর্ষ ধ্রুবক যথাক্রমে $6{\cdot}4 \times 10^6$ m এবং $6{\cdot}7 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}।

(ক) কৃত্রিম উপগ্রহটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) কৃত্রিম উপগ্রহটি ভূস্থির হবে কি? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [য. বো. ২০২২]

(ক) আমরা জানি উপগ্রহের বেগ,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

বা, $$v = \sqrt{\frac{6{\cdot}7 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6{\cdot}4 \times 10^6 + 3{\cdot}6 \times 10^7}}$$

$$= \sqrt{\frac{6{\cdot}7 \times 6 \times 10^{13}}{42{\cdot}4 \times 10^6}}$$

$$= \sqrt{0{\cdot}948 \times 10^7}$$

$$= \sqrt{9{\cdot}48 \times 10^6} = 3{\cdot}08 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

$h = 3{\cdot}6 \times 10^4$ km $= 3{\cdot}6 \times 10^7$ m

$g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}

$R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

$G = 6{\cdot}7 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

$M = 6 \times 10^{24}$ kg

(খ) কৃত্রিম উপগ্রহের পর্যায়কাল,

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$$

$$\therefore \quad T = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times (6{\cdot}4 \times 10^6 + 36 \times 10^6)}{3{\cdot}08 \times 10^3}$$

$$= \frac{6{\cdot}28 \times 42{\cdot}4 \times 10^6 \times 10^{-3}}{3{\cdot}08}$$

$= 86{\cdot}45 \times 10^3$ s $\simeq 24$ দিন

এখানে,

$v = 3{\cdot}08 \times 10^3$ ms^{-1}

যেহেতু ভূস্থির উপগ্রহের পর্যায়কাল T = 24 দিন; সুতরাং, কৃত্রিম উপগ্রহটি ভূস্থির উপগ্রহ হবে।

৪। একটি মহাজাগতিক বস্তুর ব্যাসার্ধ ও ভর যথাক্রমে $3{\cdot}2 \times 10^6$ m এবং 4×10^{24} kg। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $G = 6{\cdot}675 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}। একটি ধূমকেতুর আঘাতে মহাজাগতিক বস্তুটি আটটি সমান খণ্ডে বিভক্ত হলো।

(ক) মহাজাগতিক বস্তুর পৃষ্ঠে মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রতিটি খণ্ডের মুক্তিবেগ মূল বস্তুটির মুক্তিবেগের এক অষ্টমাংশ হবে কি না—যাচাই কর। [দি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R'^2}; \quad \text{এখানে, } R' = R + r$$

$$= \frac{6{\cdot}675 \times 10^{-11} \times 4 \times 10^{24}}{(6{\cdot}4 + 3{\cdot}2) \times 10^6}$$

$$= \frac{6{\cdot}675 \times 4 \times 10^{13} \times 10^{-12}}{(9{\cdot}6)^2}$$

$= 2{\cdot}9$ ms^{-2}

এখানে,

মহাজাগতিক বস্তুর ব্যাসার্ধ, $r = 3{\cdot}2 \times 10^6$ m

মহাজাগতিক বস্তুর ভর, $M = 4 \times 10^{24}$ kg

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6{\cdot}675 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

$R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

মহাকর্ষীয় বস্তুর পৃষ্ঠে মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ, $g = ?$

(খ) আমরা জানি,

N সংখ্যক খণ্ডের আয়তন = মূল খণ্ডের আয়তন

বা, $N \times \frac{4}{3}\pi r'^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

বা, $8r'^3 = r^3$

বা, $r'^3 = \frac{r^3}{8} = \left(\frac{r}{2}\right)^3$

$\therefore \quad r' = \frac{r}{2}$

দেওয়া আছে,

খণ্ড সংখ্যা, $N = 8$

প্রতিটি খণ্ডের ভর, $m = \frac{M}{8}$

প্রতিটি খণ্ডের ব্যাসার্ধ $= r$

মূল বস্তুর ব্যাসার্ধ $= R$

এখন মূল বস্তুর মুক্তিবেগ, v_e এবং প্রতিটি খণ্ডের মুক্তিবেগ v_e' হলে,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r'}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

$$v_e' = \sqrt{\frac{2Gm}{r} \times \frac{r'}{2GM}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

$$\therefore \quad \frac{v_e'}{v_e} = \sqrt{\frac{2Gm}{r} \times \frac{R}{2GM}}$$

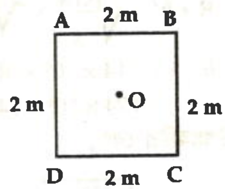
$$= \sqrt{\frac{mR}{rM}} = \sqrt{\frac{\frac{M}{8} \times r'}{\frac{r'}{2} \times M}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad v_e' = \frac{1}{2} v_e$$

অতএব প্রতিটি খণ্ডের মুক্তিবেগ মূল বস্তুটির মুক্তিবেগের এক অষ্টমাংশ না হয়ে অর্ধেক হবে।

৫। 2 m বাহুবিশিষ্ট ABCD বর্গক্ষেত্রের কেন্দ্র O এবং উক্ত বিন্দুতে 1 kg ভরের বস্তু রাখা আছে। A, B, C, D বিন্দুতে যথাক্রমে 4 kg, 4 kg, 2 kg, 2 kg ভরের চারটি বস্তু রাখা আছে। [$G = 6{\cdot}673 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}]



(ক) O বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব নির্ণয় কর।

(খ) O বিন্দুতে বস্তুটি স্থির থাকবে কি না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। **[কু. বো. ২০১৭]**

(ক) আমরা জানি,

$$V_a = \frac{-G}{r}(m_A + m_B + m_C + m_D)$$

$$= \frac{-6{\cdot}673 \times 10^{-11}}{\sqrt{2}} \times (4 + 4 + 2 + 2)$$

$$= -5{\cdot}66 \times 10^{-10}\ \text{Jkg}^{-1}$$

$\therefore$ O বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব,

$$V_a = -5{\cdot}66 \times 10^{-10}\ \text{Jkg}^{-1}$$

দেওয়া আছে,

A বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m_A = 4$ kg

B বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m_B = 4$ kg

C বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m_C = 2$ kg

D বিন্দুতে বস্তুর ভর, $m_D = 2$ kg

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6{\cdot}673 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

O বিন্দু হতে A, B, C এবং D বিন্দুর দূরত্ব,

$$r = OA = OB = OC = OD = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\text{m}$$

O বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব, $V_a = ?$

(খ) AC বিন্দুর ভরের জন্য O বিন্দুতে দুটি বল ও BD রেখায় O বিন্দুতে দুটি বল কাজ করে।

A ও C বিন্দুর ভরের জন্য O বিন্দুতে 1 kg ভরের ওপর ক্রিয়াশীল বল,

$$F_1 = \frac{4G}{(\sqrt{2})^2} - \frac{2G}{(\sqrt{2})^2} = 2G - G = G, \text{ CA বরাবর ক্রিয়াশীল}$$

B ও D বিন্দুর ভরের জন্য O বিন্দুতে 1 kg ভরের উপর ক্রিয়াশীল বল,

$$F_2 = \frac{4G}{(\sqrt{2})^2} - \frac{2G}{(\sqrt{2})^2} = 2G - G = G, \text{ DB বরাবর ক্রিয়াশীল}$$

CA ও DB পরস্পর লম্ব।

$$\therefore \quad \text{লব্ধি} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{G^2 + G^2}$$

$$= \sqrt{2G^2} = G\sqrt{2} = 6{\cdot}673 \times 10^{-11} \times 1{\cdot}414$$

$$= 9{\cdot}44 \times 10^{-11}\ \text{Nkg}^{-1}$$

প্রাবল্য উপাংশদ্বয় পরস্পর সমান হওয়ায় লব্ধি O বিন্দুতে $\angle$AOB-এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ DA বা CB রেখার সমান্তরালে ক্রিয়া করে।

অর্থাৎ O বিন্দুতে বস্তুটি স্থির থাকবে না।

৬। পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6×10^{24} kg এবং 6400 km। এর পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ 9.8 ms^{-2}। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক 6.673×10^{-11} Nm^2 kg^{-2}। এর পৃষ্ঠ থেকে একটি উপগ্রহকে 700 km উচ্চতায় তোলা হলো।
(ক) পৃথিবীর পৃষ্ঠ থেকে কত উচ্চতায় উপগ্রহের ওজন পৃথিবী পৃষ্ঠের ওজনের 80% হবে? নির্ণয় কর।
(খ) উদ্দীপকের উৎক্ষেপিত উপগ্রহটি চাঁদের মতো উপগ্রহ হবে কি? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[চ. বো. ২০১৯]

(ক) পৃথিবী পৃষ্ঠে উপগ্রহটির ভর m হলে এর ওজন,

$$W = mg = 9.8\, m$$

এই ওজনের 80% ওজন, $W' = 9.8 \times 0.8\ \text{m} = 7.84\, m$

এখন, $W' = mg'$

$$\therefore \quad g' = \frac{W'}{m} = \frac{7.84\, m}{m} = 7.84\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,
$M = 6 \times 10^{24}$ kg
$R = 6400$ km $= 6.4 \times 10^6$ m
$g = 9.8$ ms^{-2}
$G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
$h = 700$ km

ধরা যাক, h' উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ 7.84 ms^{-2}

এখন আমরা জানি,

$$g' = \frac{GM}{(R + h')^2}$$

বা, $$(R + h')^2 = \frac{GM}{g'}$$

বা, $$R + h' = \sqrt{\frac{GM}{g'}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{7.84}} = 7.14 \times 10^6$$

$$\therefore \quad h' = 7.14 \times 10^6 - R = 7.14 \times 10^6 - 6.4 \times 10^6$$
$$= 0.74 \times 10^6 = 740\ \text{km}$$

(খ) উপগ্রহটির বেগ,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{(R + h)}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(6.4 + 0.7) \times 10^6}}$$
$$= 7.50 \times 10^3\ \text{ms}^{-1} = 7.50\ \text{kms}^{-1}$$

এখন, উপগ্রহটি চাঁদের মতো উপগ্রহে পরিণত হবে যদি $v^2 = \frac{v_e^2}{2}$ হয়।

এখানে, $v_e = 11.2$ kms^{-1}

$$v^2 = (7.5\ \text{kms}^{-1})^2 = 56.4\ \text{km}^2\text{s}^{-2}$$

এবং $$\frac{v_e^2}{2} = \frac{(11.2\ \text{Kms}^{-1})^2}{2} = 62.7\ \text{km}^2\text{s}^{-2}$$

$$\therefore \quad v^2 < \frac{v_e^2}{2}$$

সুতরাং, উপগ্রহটি চাঁদের মতো উপগ্রহে পরিণত হবে না। উপগ্রহটি উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করবে এবং অবশেষে পৃথিবীতে ফিরে আসবে।

৭। A এবং B একই উপাদান এবং একই গড় ঘনত্ববিশিষ্ট দুটি গ্রহ (কাল্পনিক)। A-এর ভর 5.93×10^{24} kg, ব্যাসার্ধ 6.93×10^6 m এবং B-এর ব্যাসার্ধ 3×10^6 m।
(ক) A গ্রহের পৃষ্ঠের কোনো বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব নির্ণয় কর।
(খ) A ও B উভয় গ্রহের পৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের মান কি একই হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মন্তব্য কর।

[ব. বো. ২০২২]

(ক) আমরা জানি, মহাকর্ষীয় বিভব,

$$V = -\frac{GM}{r}$$

$$\therefore \quad V = -\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.93 \times 10^{24}}{6.93 \times 10^6}$$
$$= -\frac{6.67 \times 5.93 \times 10^{13} \times 10^{-6}}{6.93}$$
$$= -5.71 \times 10^7\ \text{Jkg}^{-1}$$

এখানে,
$G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
A গ্রহের ভর,
$m_1 = 5.93 \times 10^{24}$ kg
$r_1 = 6.93 \times 10^6$ m
$r_2 = 3 \times 10^6$ m

(খ) আবার, $M = V\rho$ এবং $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

A গ্রহের ভর, $M_1 = 5.93 \times 10^{24}$ এবং $V_1 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (6.93 \times 10^6)^3$

$$\therefore \quad \rho = \frac{M_1}{V_1} = \frac{5.93 \times 10^{24}}{\frac{4}{3} \times 3.14 \times (6.93 \times 10^6)^3}$$

$$= \frac{5.93 \times 3 \times 10^{-18} \times 10^{24}}{4 \times 3.14 \times 332.8} = 4.256 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$$

এখানে উভয় গ্রহের গড় ঘনত্ব একই।

B গ্রহের ভর,

$$M_2 = V_2\rho = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \times \rho$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times (3 \times 10^6)^3 \times 4.256 \times 10^3}{3}$$

$$= 0.48 \times 10^{24} \text{ kg}$$

আবার, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য,

$$E = \frac{GM}{r^2}$$

A গ্রহের ক্ষেত্রে প্রাবল্য,

$$E_1 = \frac{GM_1}{r_1^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.93 \times 10^{24}}{(6.93 \times 10^6)^2}$$

$$= \frac{6.67 \times 5.93 \times 10^{13} \times 10^{-12}}{6.93 \times 6.93} = 8.236$$

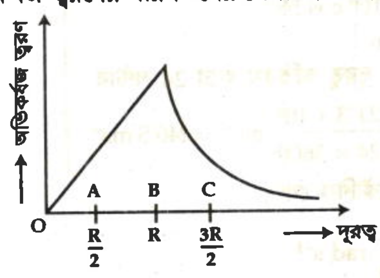
এবং B গ্রহের ক্ষেত্রে প্রাবাল্য,

$$E_2 = \frac{GM_2}{r_2^2} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 0.48 \times 10^{24}}{(3 \times 10^6)^2}$$

$$= \frac{6.67 \times 0.48 \times 10^{13} \times 10^{-12}}{9} = 0.356$$

উভয় গ্রহের প্রাবল্যের মান এক নয়।

৮। দূরত্বের সাপেক্ষে পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণের পরিবর্তনের লেখচিত্র নিম্নে প্রদত্ত হলো :



পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m, পৃথিবীর ভর, $M = 6 \times 10^{24}$ kg এবং মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6.673 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}।

(ক) যখন কোনো বস্তু A বিন্দুতে অবস্থান করে তখন অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত A ও C বিন্দুর মধ্যে এবং কোথায় কোনো একটি বস্তু বেশি ওজন অনুভব করবে? গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও। [সি. বো. ২০২২]

(ক) আমরা জানি, ভূপৃষ্ঠ হতে $\frac{R}{2}$ গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান,

$$g_{\frac{R}{2}} = g\left(1 - \frac{\frac{R}{2}}{R}\right) = g \times \left(\frac{2R - R}{2R}\right) = g \times \frac{1}{2}$$

আবার, $g = \frac{GM}{R^2}$

$\therefore \quad g_{\frac{R}{2}} = \frac{6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{2 \times (6{\cdot}4 \times 10^6)^2}$

$= \frac{6{\cdot}67 \times 6 \times 10^{-13} \times 10^{-12}}{2 \times 6{\cdot}4 \times 6{\cdot}4}$

$= \frac{400}{81{\cdot}92} = 4{\cdot}88 \text{ ms}^{-2}$

এখানে,
$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
$M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$
$R = 6{\cdot}4 \times 10^6 \text{ m}$

(খ) ভূপৃষ্ঠ হতে C বিন্দুর দূরত্ব, $h = \frac{3R}{2} - R = \frac{R}{2}$

আমরা জানি h উচ্চতায় g এর মান,

$$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right) = g\left(1 - \frac{2 \times \frac{R}{2}}{R}\right)$$

$$= g\left(1 - \frac{R}{R}\right) = 0$$

মনে করি কোনো বস্তুর ভর ভূপৃষ্ঠে m; সুতরাং এর ওজন $= mg$

$\frac{R}{2}$ গভীরতায় বস্তুটির ওজন, $W' = mg' = 4{\cdot}88$ m

এবং ভূপৃষ্ঠ হতে $\frac{R}{2}$ উচ্চতায় বস্তুটির ওজন, $W'' = mg'' = m \times 0 = 0$

সুতরাং A বিন্দুতে বস্তুটি বেশি ওজন অনুভব করবে।

৯। $6{\cdot}4 \times 10^6$ m ব্যাসার্ধের একটি গ্রহ নিজ অক্ষে 24 ঘণ্টায় একবার ঘুরে। একজন বিজ্ঞানী গ্রহটির সাথে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g-এর সম্পর্ক স্থাপনের জন্য 58° উত্তর অক্ষাংশের সাথে একটি স্থানে 80 kg ভরের একটি বস্তু রাখলেন। অভিকর্ষীয় ত্বরণ $g = 9{\cdot}80 \text{ ms}^{-2}$।

(ক) উক্ত স্থানে গ্রহটির ঘূর্ণনের জন্য বস্তুটির রৈখিক বেগ কত ?

(খ) উক্ত স্থানে বস্তুটির ওজন গ্রহটির পৃষ্ঠে বস্তুর ওজনের চেয়ে বেশি না কম হবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও। [সি. বো. ২০১৯]

(ক) বস্তুটি গ্রহটির ঘূর্ণনের সময় যে বৃত্ত তৈরি করে তার পরিধি $= 2\pi r$

$\therefore \quad 2\pi r = 2\pi R \cos\lambda$

$= 2\pi \times 6{\cdot}4 \times 10^6 \cos 58°$

$= 21{\cdot}3 \times 10^6$ m

এখন বস্তুটি পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে 24 ঘণ্টায়।

$\therefore$ বস্তুর রৈখিক বেগ $= \frac{21{\cdot}3 \times 10^6}{24 \times 3600} \text{ ms}^{-1} = 246{\cdot}5 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,
গ্রহের ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
অক্ষাংশ, $\lambda = 58°$
এবং $r = R\cos\lambda$
$T = 24 \text{ hr} = 24 \times 60 \times 60 = 24 \times 3600$

(খ) পৃথিবীর ঘূর্ণনের জন্য কৌণিক বেগ,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad s}^{-1}$$

আমরা জানি,

$$g_\lambda = g - \omega^2 R \cos^2\lambda$$

$$= 9{\cdot}80 - \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\right)^2 \times 6{\cdot}4 \times 10^6 \times \cos^2 58°$$

$$= 9{\cdot}79 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
অক্ষাংশ, $\lambda = 58°$
$g = 9{\cdot}80 \text{ ms}^{-2}$
$m = 80$ kg
$g_\lambda = ?$

উক্ত স্থানে বস্তুটির ওজন $= mg_\lambda = 80 \times 9{\cdot}79 = 783{\cdot}2$ N

গ্রহের পৃষ্ঠে বস্তুটির ওজন $= mg = 80 \times 9{\cdot}8 = 784$ N

উক্ত স্থানের চেয়ে গ্রহের পৃষ্ঠে বস্তুটির ওজন $(784 - 783{\cdot}3) = 0{\cdot}8$ N বেশি।

১০। 5 kg ভরের একটি বস্তু ভূপৃষ্ঠ হতে মুক্তিবেগে নিক্ষেপ করায় সেটি মহাশূন্যের অন্য একটি গ্রহে পৌঁছায় যার ভর পৃথিবীর ভরের ষোলোগুণ এবং ব্যাস পৃথিবীর ব্যাসার্ধের আটগুণ। (পৃথিবীর ভর 6×10^{24} kg, ব্যাসার্ধ 6.4×10^3 km)

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত অন্য গ্রহের পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত বস্তুটির ভর অর্ধেক হলে ওই বস্তুটিকে পুনরায় অন্য গ্রহটি হতে মহাশূন্যে নিক্ষেপ করতে প্রয়োজনীয় মুক্তিবেগ ভূপৃষ্ঠের মুক্তিবেগের সমান হবে কি ? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও। [অভিন্ন প্রশ্ন ক-সেট, ২০১৮]

(ক) আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 16 \times 6 \times 10^{24}}{(4 \times 6.4 \times 10^6)^2}$$

$$= 9.77\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,

$M_e = 6 \times 10^{24}$ kg

$R_e = 6.4 \times 10^6$ m

$M = 16\ M_e = 16 \times 6 \times 10^{24}$ kg

গ্রহের ব্যাস, $D = 8\ R_e$

$\therefore$ গ্রহের ব্যাসার্ধ, $R = \frac{8}{2} R_e$

$= 4 \times 6.4 \times 10^6$ m

$g = ?$

(খ) ভূপৃষ্ঠে মুক্তিবেগ,

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6}}$$

$$= 11.2\ \text{kms}^{-1}$$

অন্য গ্রহের পৃষ্ঠে মুক্তিবেগ,

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2G \times 16\ M_e}{4\ R_e}}$$

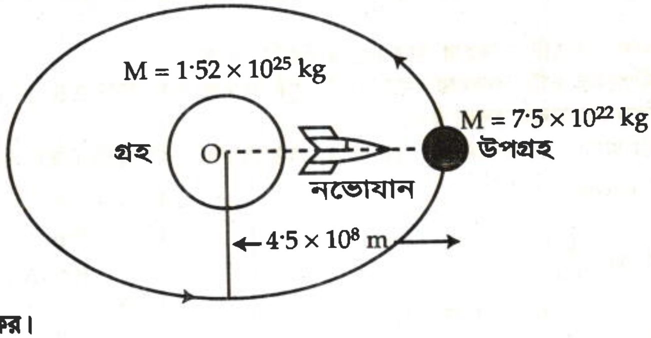
$$= \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 16 \times 6 \times 10^{24}}{4 \times 6.4 \times 10^6}}$$

$$= 22.37\ \text{kms}^{-1}$$

$$\therefore \quad \frac{v}{v_e} = \frac{22.37}{11.2} = 2 \quad \therefore v = 2v_e$$

অর্থাৎ অন্য গ্রহের পৃষ্ঠে কোনো বস্তুকে নিক্ষেপ করতে প্রয়োজনীয় মুক্তিবেগ পৃথিবীর মুক্তিবেগের দ্বিগুণ হবে, সমান হবে না।

১১।



ওপরের উদ্দীপকটি লক্ষ কর।

(ক) উপগ্রহটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) গ্রহ থেকে উপগ্রহের দিকে যাওয়ার পথে কোনো স্থানে নভোযানটির ওপর লব্ধি বল শূন্য হবে কি না— গাণিতিকভাবে সিদ্ধান্ত দাও। [অভিন্ন 'খ' সেট ২০১৮]

(ক) আমরা জানি উপগ্রহের বেগ,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$$

$$= \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 1.52 \times 10^{25}}{4.5 \times 10^{8}}}$$

$$= 1500.99 \text{ ms}^{-1}$$

$$= 1.5 \text{ kms}^{-1}$$

এখানে,

$G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

$M = 1.52 \times 10^{25}$ kg

$R + h = 4.5 \times 10^{8}$ m

(খ) ধরি, O বিন্দু হতে X দূরত্বে লব্ধি বল শূন্য হবে। গ্রহ কর্তৃক নভোযানের ওপর ক্রিয়াশীল বল = উপগ্রহ কর্তৃক নভোযানের ওপর ক্রিয়াশীল বল। অর্থাৎ,

$$\frac{GM_1M}{x^2} = \frac{GM_2M}{(4.5 \times 10^8 - x)^2}$$

বা, $\frac{x^2}{(4.5 \times 10^8 - x)^2} = \frac{M_1}{M_2}$

বা, $\left(\frac{x}{4.5 \times 10^8 - x}\right)^2 = \frac{1.52 \times 10^{25}}{7.5 \times 10^{22}}$

বা, $\frac{x}{4.5 \times 10^8 - x} = 14.24$

বা, $x = 64 \times 10^8 - 14.24\,x$

বা, $15.24\,x = 64 \times 10^8$

বা, $x = 4.2 \times 10^8$ m

∴ গ্রহটি থেকে উপগ্রহের দিকে 4.2×10^8 m দূরে লব্ধি বল শূন্য হবে।

এখানে,

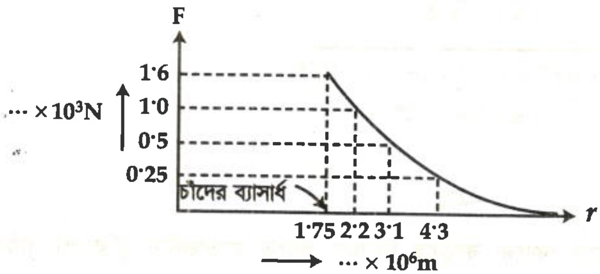
নভোযানের ভর, M

গ্রহের ভর, $M_1 = 1.52 \times 10^{25}$ kg

উপগ্রহের ভর,

$M_2 = 7.5 \times 10^{22}$ kg

১২। লেখচিত্রে দেখানো হলো চন্দ্রের কেন্দ্র থেকে দূরত্ব r, চন্দ্র পৃষ্ঠের ওপরের বিভিন্ন দূরত্বের সাথে 1000 kg ভরের একটি বস্তুর ওপর চন্দ্রের অভিকর্ষজ বল F-এর পরিবর্তন।



দেওয়া আছে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m, পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = 9.8$ ms^{-2}, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}

(ক) উদ্দীপকের ডাটা ব্যবহার করে চন্দ্রের ভর নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের ডাটা ব্যবহার করে পৃথিবী পৃষ্ঠ ও চন্দ্র পৃষ্ঠ থেকে 2.55×10^6 m উচ্চতায় ওই বস্তুর ওপর অভিকর্ষজ বলের তুলনা কর। [য. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি, পদার্থবিজ্ঞানের সূত্র সকল কাঠামোতে একই থাকে। তা হলে চাঁদে মহাকর্ষ বল,

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

চাঁদের ভর, $M = \frac{Fr^2}{Gm}$

বা, $M = \frac{1.6 \times 10^3 \times (1.75 \times 10^6)^2}{6.673 \times 10^{-11} \times 1000}$

$= 7.34 \times 10^{22}$ kg

$F = 1.6 \times 10^3$ N

$r = 1.75 \times 10^6$ m

$G = 6.673 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

$m = 1000$ kg

চাঁদের ভর, M = ?

(খ) ধরি, $m = 1000$ kg ভরের বস্তুর উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল F_e এবং চন্দ্রের আকর্ষণ বল F_m

$F_e = \frac{GM_e m}{r_1^2}$ এবং $F_m = \frac{GM_m m}{r_2^2}$

বা, $\frac{F_e}{F_m} = \frac{M_e}{r_1^2} \times \frac{r_2^2}{M_m}$

$= \left(\frac{M_e}{M_m}\right) \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$

বা, $\frac{F_e}{F_m} = \frac{6 \times 10^{24}}{7.35 \times 10^{22}} \times \left(\frac{4.3 \times 10^6}{8.95 \times 10^6}\right)^2$

$= 18.87$

$F_e : F_m = 18.87 : 1$

$r_1 = 6.4 \times 10^6 + 2.55 \times 10^6$
$= 8.95 \times 10^6$ m
$r_2 = 1.75 \times 10^6 + 2.55 \times 10^6$
$= 4.3 \times 10^6$ m
$M_e = 6 \times 10^{24}$ kg
$M_m = 7.35 \times 10^{22}$ kg

১৩। কোনো গ্রহের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ বৃত্তাকার কক্ষপথে 7.8 kms^{-1} বেগে ঘুরছে যেখানে অভিকর্ষজ ত্বরণ 9.0 ms^{-2}। অন্য একটি গ্রহের সাথে গ্রহটির ভর ও ব্যাসার্ধের অনুপাত যথাক্রমে $80 : 1$ ও $4 : 1$।

(ক) বৃত্তাকার কক্ষপথের উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) গ্রহ দুটির মধ্যে একটি নভোযান যাতায়াত করলে কোন গ্রহ হতে অধিক গতিশক্তি নিয়ে নভোযানটিকে যাত্রা শুরু করতে হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মন্তব্য কর। [সি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

বা, $v^2 = \frac{GM}{R+h}$

বা, $R + h = \frac{GM}{v^2}$

বা, $h = \frac{GM}{v^2} - R$

$= \frac{6.673 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{(7.8 \times 10^3)^2} - 6.4 \times 10^6$

$= 1.81 \times 10^5$ m

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা 1.81×10^5 m

এখানে,
$v = 7.8$ kms^{-1}
$= 7.8 \times 10^3$ ms^{-1}
$G = 6.673 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
$M = 6 \times 10^{24}$ kg
$R = 6.4 \times 10^6$ m
$h = ?$

(খ) ১ম গ্রহ হতে প্রাপ্ত গতিশক্তি,

$(KE)_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{GM_1 m}{R_1}$

এখানে প্রথম গ্রহের পৃষ্ঠ হতে অসীম ধরার কারণ উচ্চতা অনির্দিষ্ট।

২য় গ্রহের জন্য গতিশক্তি,

$(RE)_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{GM_2 m}{2R_2}$

$\therefore \frac{(KE)_1}{(KE)_2} = \frac{M_1}{M_2} \times \left(\frac{R_2}{R_1}\right) 80 \times \frac{1}{4} = 20$

$\therefore (KE)_1 = 20 \times (KE)_2$

১ম গ্রহ হতে গতিশক্তি $= 20 \times$ ২য় গ্রহ হতে গতিশক্তি

$\therefore$ ১ম গ্রহ হতে অধিক গতিশক্তি নিয়ে নভোযানটিকে যাত্রা করতে হবে।

১৪। কোনো একটি কাল্পনিক গ্রহের ভর পৃথিবীর ভরের সমান কিন্তু ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। 3 kg ভরের একটি বস্তু উভয় গ্রহের পৃষ্ঠ হতে 9 kms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। পৃথিবীর ভর 5.97×10^{24} kg এবং ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m।

(ক) পৃথিবীর মুক্তিবেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের নিক্ষিপ্ত বস্তুটি উভয় গ্রহে ফিরে আসবে কি না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[ঢা. বো. ২০২২]

(ক) ধরি পৃথিবীর ভর M এবং গ্রহের ভর M'।

প্রশ্নানুসারে, M = M' এবং গ্রহের ব্যাসার্ধ R_k পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R_E-এর দ্বিগুণ; অর্থাৎ $R_K = 2R_E$

আমরা জানি মুক্তিবেগ,

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

$$\therefore \quad v_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6}$$

$$= 11.2 \times 10^3 \text{ ms}^{-1} = 11.2 \text{ kms}^{-1}$$

এখানে,

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

$R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$

(খ) কাল্পনিক গ্রহ হতে উৎক্ষিপ্ত বস্তুর মুক্তিবেগ,

$$v_k = \sqrt{2gR_k} = \sqrt{2g \times 2R_E}$$

$$= \sqrt{4gR_E} = \sqrt{2} \times \sqrt{2gR_E}$$

$$= \sqrt{2} \times 11.2 \text{ kms}^{-1} = 15.8 \text{ kms}^{-1}$$

এখন, উৎক্ষেপণ বেগ v-এর বর্গ যদি $\frac{v_e^2}{2}$-এর বেশি এবং v_e^2-এর চেয়ে কম হয় তবে বস্তুটি পৃথিবীকে একটি ফোকাসে রেখে উপবৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকবে। এখানে $v^2 > v_e^2/2$ কিন্তু $< v_e^2$।

সুতরাং এটি উপবৃত্তাকার পথে ঘুরবে; পৃথিবীতে ফিরে আসবে না।

কাল্পনিক গ্রহের ক্ষেত্রে $v^2 < \frac{v_k^2}{2}$ বা, $81 < 124.8$; অর্থাৎ $9 \text{ kms}^{-1} < 11.17 \text{ kms}^{-1}$।

সুতরাং এটি কাল্পনিক গ্রহে ফিরে আসবে।

সার-সংক্ষেপ

গ্যালিলিওর সূত্র :

১ম সূত্র	:	বায়ুশূন্য স্থানে বা বাধাহীন পথে সকল বস্তুই নিশ্চল অবস্থা হতে যাত্রা করে সমান দ্রুততায় নিচে নামে অর্থাৎ সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।
২য় সূত্র	:	বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্তবেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক।
৩য় সূত্র	:	বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

কেপলারের সূত্র :

উপবৃত্ত সূত্র	:	প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের নতিতে বা ফোকাসে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করছে।
ক্ষেত্রফল সূত্র	:	গ্রহ এবং সূর্যের সংযোগকারী ব্যাসার্ধ রেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।
সময়ের সূত্র	:	প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ সূর্য হতে তার গড় দূরত্বের ঘনফলের সমানুপাতিক।
অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ	:	পৃথিবী এবং অন্য একটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ বলে।
ওজন বা ভার	:	কোনো একটি বস্তু যে পরিমাণ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হয় তাকে তার ওজন বা ভার বলে।
জড়তা ভর	:	জড়তা ভর বস্তুর এমন একটি ধর্ম যা ত্বরণকে বাধা দেয়। সুতরাং, জড়তা ভর জড়তার পরিমাপ এবং এর মান প্রযুক্ত বল এবং উৎপন্ন ত্বরণের অনুপাতের সমান।
মহাকর্ষীয় ভর	:	বস্তুর মহাকর্ষীয় ভর এমন একটি ভর যার ওপর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে মহাকর্ষীয় টান নির্ভর করে। বিভিন্ন পরীক্ষা থেকে প্রমাণ করা গেছে যে জড়তা ভর এবং মহাকর্ষীয় ভর সমতুল্য।

ভরকেন্দ্র	:	বস্তুর কণাগুলোর সমস্ত ভরকে একটি মাত্র বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত মনে করলে ওই বিন্দুর মধ্য দিয়েই সমস্ত কণার ওপর তাদের ভরের সমানুপাতিক ক্রিয়ারত সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি ক্রিয়া করে বলে বিবেচিত হয়। ওই বিন্দুকে বস্তুর ভরকেন্দ্র বলে।
মেরু বা পোলার উপগ্রহ	:	এটি এক ধরনের কৃত্রিম উপগ্রহ যা নিরক্ষীয় মধ্যতলের পরিবর্তে মেরু মধ্যতলে ভূপৃষ্ঠ হতে 700—800 km ওপরে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করে। এই উপগ্রহগুলোকে মেরু বা পোলার উপগ্রহ বলে। এই উপগ্রহগুলোর আবর্তনকাল প্রায় 110 মিনিট।
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক	:	একক ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুকণা একক দূরত্বে থেকে যে পরিমাণ বল দ্বারা পরস্পরকে আকর্ষণ করে তার সংখ্যাগত মানকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলে।
মহাকর্ষ	:	নভোমণ্ডলে অবস্থিত দুটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বলে।
মহাকর্ষ সূত্র	:	মহাবিশ্বের যেকোনো দুটি বস্তুকণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং এদের মধ্যকার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।
মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র	:	কোনো বস্তুর চারপাশে যে অঞ্চল ব্যাপী এর মহাকর্ষীয় প্রভাব বজায় থাকে, অর্থাৎ অন্য কোনো বস্তু রাখা হলে সেটি আকর্ষণ লাভ করে, তাকে বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে।
মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য বা তীব্রতা	:	মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের যেকোনো বিন্দুতে একটি একক ভরের বস্তু স্থাপন করলে ওই ভরের ওপর যে বল ক্রিয়া করে তাকে ওই বিন্দুতে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের প্রাবল্য বা তীব্রতা বলে।
মহাকর্ষীয় বিভব	:	অসীম দূর হতে একক ভরের কোনো বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয় তাকে ওই বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে।
অভিকর্ষজ ত্বরণ	:	বস্তুতে অভিকর্ষ বল কর্তৃক যে ত্বরণ উৎপন্ন হয় তাকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে।
অভিকর্ষ কেন্দ্র	:	কোনো বস্তুকে যেভাবেই রাখা হোক না কেন তার ওজন যে বিশেষ বিন্দুর মধ্যে দিয়ে বস্তুর ওপর সর্বদা ক্রিয়া করে ওই বিন্দুকে বস্তুর অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র বলে।
স্বাভাবিক উপগ্রহ	:	যেসব উপগ্রহ প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্ট তাদেরকে স্বাভাবিক উপগ্রহ বলে।
কৃত্রিম উপগ্রহ	:	মহাশূন্যে পাড়ি দেয়ার জন্য অথবা পৃথিবীর বা গ্রহ-নক্ষত্রের চারদিকে আবর্তনের জন্য মানুষ কর্তৃক তৈরি উপগ্রহকে কৃত্রিম উপগ্রহ বলে।
ভূ-স্থির উপগ্রহ	:	কোনো কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান পৃথিবীর আবর্তনকালের সমান হলে পৃথিবীর সাপেক্ষে এটি স্থির থাকবে; এ ধরনের উপগ্রহকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলে।
মুক্তিবেগ	:	সর্বাপেক্ষা কম যে বেগে কোনো বস্তুকে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না, সেই বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। 1 kg ভরের বস্তুর ওপর অভিকর্ষজ বলের মান 9·8 N। মহাকর্ষ ক্ষেত্র প্রাবল্য সব থেকে বেশি পৃথিবী পৃষ্ঠে $= g$।

২। মহাকর্ষীয় বিভবের একক Jkg^{-1}, প্রাবল্যের একক Nkg^{-1}, মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের একক Nm^2kg^{-2}।

৩। কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ ওই বস্তুর ভরের ওপর নির্ভরশীল নয়। মহাকর্ষীয় বিভব সর্বদা ঋণাত্মক রাশি।

৪। পৃথিবীর পৃষ্ঠে মুক্তিবেগের মান 11·18 kms^{-1}। ভূপৃষ্ঠে কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল 24 ঘণ্টা।

৫। খাড়া ওপরের দিকে g এর মান $-$ 9·8 ms^{-2}। অসীমে মহাকর্ষীয় বিভব শূন্য ধরা হয়। এই মানই সর্বোচ্চ মান।

৬। দুটি বস্তুর মধ্যে যে দূরত্ব আছে তা অর্ধেকে নেমে আসলে মহাকর্ষ বল চারগুণ বাড়ে।

৭। মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ও মহাকর্ষীয় বিভবের মধ্যে সম্পর্ক হলো $E = -\frac{dV}{dr}$। গোলকের অভ্যন্তরে মহাকর্ষীয় বিভব স্থির থাকে। বস্তুর ভর দ্বিগুণ হলেও মুক্তি বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না।

৮। যদি পৃথিবীর ভর অপরিবর্তিত রেখে এর ব্যাসার্ধ 4 গুণ বৃদ্ধি করা হয় তবে পৃথিবীতে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 16 গুণ হ্রাস পাবে। পৃথিবীর ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্য ওই বিন্দুর অভিকর্ষজ ত্বরণ একই।

৯। পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি রকেটের মুক্তিবেগ v_E। রকেটটিকে অন্য একটি গ্রহ থেকে নিক্ষেপ করা হলো যার অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং ব্যাসার্ধ পৃথিবীর দ্বিগুণ। গ্রহটির পৃষ্ঠে রকেটের মুক্তিবেগ হবে $2v_e$।

১০। মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মাত্রা $[M^{-1}T^{-2}L^3]$, মহাকর্ষীয় বিভবের মাত্রা $[L^2T^{-2}]$। কেপলারের তৃতীয় সূত্র হলে $T^2 \propto R^3$।

১১। M ভরের কোনো গ্রহের চারদিকে r ব্যাসার্ধের কক্ষে v বেগে আবর্তনশীল m ভরের উপগ্রহের বেগ, $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$।
$\frac{T_1}{R_1^3} = \frac{T_2}{R_2^3}$ হলো গ্রহের গতি সংক্রান্ত কেপলারের তৃতীয় সূত্র।

১২। E মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবল্যের কোনো বিন্দুতে m ভরের বস্তু রাখলে তার ওপর mE পরিমাণ বল ক্রিয়া করে।

১৩। পৃথিবী ও অন্য কোনো গ্রহের মধ্যবর্তী দূরত্ব দ্বিগুণ হলে মহাকর্ষ বল হবে এক-চতুর্থাংশে।

১৪। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R এবং পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ = $\frac{gR^2}{(R+h)^2}$।

১৫। ভূ-স্থির উপগ্রহের পর্যায়কাল 1 দিন বা 24 ঘণ্টা।

১৬। গ্রহগুলোর গতিপথ উপবৃত্তাকার এই সূত্রটি বিজ্ঞানী কেপলারের।

১৭। গ্রাভিটন নামক কণার বিনিময়ের ফলে মহাকর্ষ বল কার্যকর হয়। মহাকর্ষ বল সব থেকে দুর্বল বল।

১৮। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ হ্রাস পেলে g-এর মান হ্রাস পাবে। সবল নিউক্লিয় বল সব থেকে শক্তিশালী বল।

১৯। দুটি বস্তুর মধ্যকার দূরত্ব অর্ধেক করলে মহাকর্ষ বলের মান চারগুণ বাড়ে।

২০। g-এর মান মেরুতে সর্বাধিক। পৃথিবীতে কোনো বস্তুর মুক্তিবেগ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের ওপর নির্ভর করে।

২১। সূর্য থেকে পৃথিবীর গড় দূরত্ব কমে গেলে বছরের দৈর্ঘ্য কমে যাবে।

২২। একটি পাথরকে খাড়া ওপরের দিকে তুলতে থাকলে এর ওপর 2টি বল ক্রিয়া করে।

২৩। একটি কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা ও আবর্তনকালের মধ্যে সম্পর্ক হলো, $h = \left(\frac{GMT}{4\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{T}{\pi}\right)^{2/3} - R$

২৪। সূর্য হতে গড় দূরত্ব r এবং গ্রহের পর্যায়কাল T হলে $T^2 \propto r^3$ হয়।

২৫। 90° অক্ষাংশে g-এর মান সর্বাপেক্ষা বেশি। ভরকেন্দ্রে বস্তুর মোট ওজন ক্রিয়া করে।

২৬। বলের বিরুদ্ধে কাজের ক্ষেত্রে বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ 180°। পৃথিবীর 45° অক্ষাংশে অভিকর্ষজ ত্বরণকে আদর্শ মান ধরা হয়।

২৭। স্প্রিং নিক্তিতে একবার পৃথিবীতে ও আরেকবার চন্দ্রে ওজন নিলে চন্দ্রে ওজন কম হবে।

২৮। একটি হাল্কা ও একটি ভারী বস্তুর ক্ষেত্রে ভরবেগ ধ্রুব হলে হাল্কা বস্তুটির গতিশক্তি বেশি হবে।

২৯। মহাকর্ষ সূত্রের ভেক্টর রূপ : $\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$। পার্কিং কক্ষপথ হলো ভূ-স্থির উপগ্রহের কক্ষপথ।

৩০। পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণনের দরুন g-এর মান পরিবর্তিত হয়। নিরক্ষরেখায় g-এর মান সর্বনিম্ন ও দুটি মেরুতে সর্বোচ্চ হয়। মেরু বিন্দুতে অক্ষাংশ, $\lambda = 90°$ এবং $g' = g$।
নিরক্ষরেখায় $\lambda = 0°$, $\cos\lambda = 1$ এবং $g' = g - \omega^2 R$

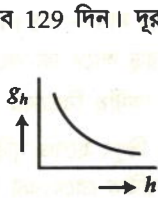
৩১। 1618 খ্রিস্টাব্দে জোহান কেপলার সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেন যে গ্রহগুলো কোনো এক বলের প্রভাবে সূর্যকে কেন্দ্র করে অবিরাম ঘুরতে থাকে। এ সম্পর্কে তিনি তিনটি সূত্র প্রদান করেন।

৩২। নভোমণ্ডলে অবস্থিত দুটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বলে। পৃথিবী এবং অন্য একটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ বলে।

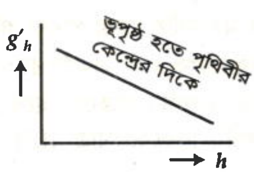
৩৩। 1687 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন মহাকর্ষ সূত্র প্রদান করেন।

৩৪। মহাকর্ষ ধ্রুবক G, মাধ্যমের প্রকৃতি বা বস্তুকণাদ্বয়ের ভৌত অবস্থার ওপর নির্ভর করে না। G-এর মান 6.67×10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}।

৩৫। সূর্য ও পৃথিবীর গড় দূরত্ব অর্ধেক হলে পৃথিবীর প্রদক্ষিণ কাল হবে 129 দিন। দূরত্ব দ্বিগুণ হলে পৃথিবীতে বছরের দৈর্ঘ্য হবে 1032 দিন।

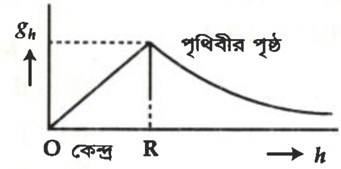
৩৬। ভূপৃষ্ঠ হতে উচ্চতার সাথে অভিকর্ষজ পরিবর্তনের লেখচিত্র 

এবং ভূপৃষ্ঠ থেকে h গভীরে অভিকর্ষজ ত্বরণের লেখচিত্র—



৩৭। মেরুতে g-এর মান $9.832\ ms^{-2}$ এবং বিষুব অঞ্চলে $g = 9.78\ ms^{-2}$

৩৮। পৃথিবীর কেন্দ্র হতে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান এবং দূরত্বের লেখচিত্র—



৩৯। সুষম গোলাকার গোলকের অভ্যন্তরে সকল বিন্দুতে প্রাবল্য শূন্য।

৪০। মহাকর্ষীয় বিভব, $V = \frac{W}{m}$ এবং মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র প্রাবাল্য $E = \frac{F}{m}$।

৪১। মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের একক Nkg^{-1} এবং মাত্রা LT^{-2} এবং বিভবের একক Jkg^{-1} এবং মাত্রা L^2T^{-1}

৪২। অসীমে কোনো বস্তুর মহাকর্ষীয় বিভব সর্বোচ্চ এবং এর মান শূন্য।

৪৩। যদি কোনো বস্তুর উৎক্ষেপণ বেগ $7.88\ kms^{-1}$ অপেক্ষা কম হয় তবে তা উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করবে এবং অবশেষে পৃথিবীতে ফিরে আসবে। যদি উৎক্ষেপন বেগ $7.88\ kms^{-1}$ হয়, তবে বস্তুটি বৃত্তাকার পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করবে এবং চাঁদের মতো উপগ্রহে পরিণত হবে।

৪৪। চাঁদে মুক্তি বেগ $2.4\ kms^{-1}$, মঙ্গল গ্রহে এর মান $5\ kms^{-1}$ এবং বৃহস্পতিতে মুক্তি বেগ $59.5\ kms^{-1}$

৪৫। পোলার উপগ্রহ সাধারণত 500 km থেকে 800 km উচ্চতায় উৎক্ষেপণ করা হয়। পোলার উপগ্রহ উত্তর-দক্ষিণে আবর্তিত হয়। কৃত্রিম উপগ্রহ পশ্চিম থেকে পূর্বে আবর্তন করে।

৪৬। যে সকল উপগ্রহ প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্ট তাদেরকে স্বাভাবিক উপগ্রহ বলে।

৪৭। ভূস্থির উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ $3.08\ kms^{-1}$, ভূপৃষ্ঠের নিকট কৃত্রিম উপগ্রহের প্রদক্ষিণ বেগ $7.9\ kms^{-1}$

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। গ্রহের পর্যায়কাল T এবং সূর্য হতে গ্রহের গড় দূরত্ব r হলে কেপলারের তৃতীয় সূত্রানুসারে—
[ঢা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০১৬; চ. বো. ২০২৩; সি. বো. ২০২২, ২০১৬; কু. বো. ২০১৭, ২০১৬; রা. বো. ২০১৬; য. বো. ২০১৫; Admission Test : JKKNIU 2019-20; DU (7 College) 2017-18; JUST-C 2017-18; RU C-3 2017-18]

ⓚ $T \propto r$
ⓛ $T \propto r^2$
ⓜ $T^2 \propto r$
ⓝ $T^2 \propto r^3$

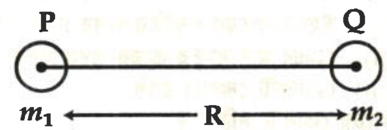
২। নিম্নের বিবৃতিগুলো লক্ষ কর—
(i) দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বল তাদের মধ্যকার দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক
(ii) মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক
(iii) সূর্যের চারদিকে প্রতিটি গ্রহের আবর্তনকালের বর্গ সূর্য থেকে ওই গ্রহের কক্ষপথের অর্ধপরাক্ষের ঘনফলের সমানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক ?
ⓚ ii
ⓛ i ও ii
ⓜ ii ও iii
ⓝ i, ii ও iii

৩। মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের একক হলো—
[কু. বো. ২০১৬; Admission Test : BSFMSTU 2019-20; JnU 2014-15]

ⓚ $Nm\,kg^{-2}$
ⓛ $Nm^{-2}\,kg^{-2}$
ⓜ $Nm^2\,kg^{-2}$
ⓝ $Nm^{-2}\,kg^2$

নিচের চিত্র ও তথ্য থেকে ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও।



চিত্রে P ও Q বস্তুদ্বয়ের ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব R। এদের মধ্যকার আকর্ষণ বল F হলে—

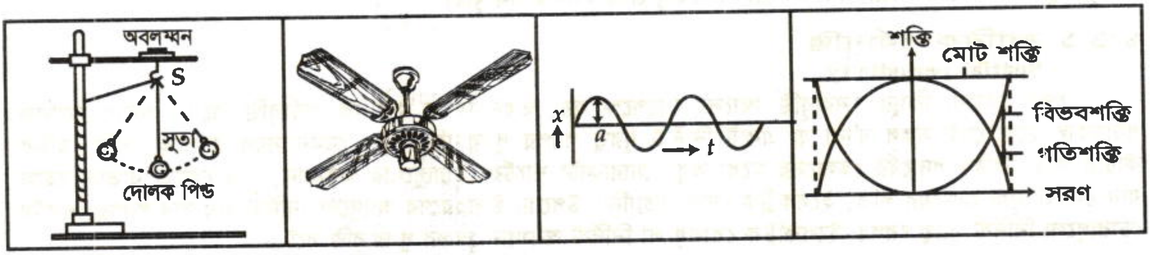
৪। মধ্যবর্তী দূরত্ব R-এর মান দ্বিগুণ করা হলে আকর্ষণ বলের মান F′ পূর্বের মানের কত গুণ হবে ?
[রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]

ⓚ এক-তৃতীয়াংশ
ⓛ এক-চতুর্থাংশ
ⓜ অর্ধেক
ⓝ দুই-তৃতীয়াংশ

৮

পর্যাবৃত্ত গতি
PERIODIC MOTION

প্রধান শব্দ (Key Words) : স্থানিক পর্যায়ক্রম, কালিক পর্যায়ক্রম, পর্যাবৃত্ত গতি, স্পন্দন গতি, সরল ছন্দিত স্পন্দন, সরল দোলক, পূর্ণ দোলন, দোলন বা পর্যায় কাল, কম্পাঙ্ক, বিস্তার, দশা, সেকেন্ড দোলক, কৌণিক কম্পাঙ্ক।



ভূমিকা
Introduction

পূর্বের অধ্যায়গুলোতে বস্তুর চলন গতি, প্রাসের গতি, বৃত্তাকার গতি আলোচনা করা হয়েছে। এখন আমরা নতুন এক ধরনের অতি পরিচিত গতি আলোচনা করব যা পর্যাবৃত্ত গতি নামে পরিচিত। স্প্রিং-এর গতি, সুরশলাকার স্পন্দন, গ্রহ-উপগ্রহের গতি ইত্যাদি পর্যাবৃত্ত গতি। পর্যাবৃত্ত গতিরই বিশেষ রূপ হলো দোলন, কম্পন বা স্পন্দন। দোলন, কম্পন বা স্পন্দন সমার্থকবোধক শব্দ। পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় সরল দোল গতি (Simple Harmonic Motion সংক্ষেপে S.H.M.) নামক এক বিশেষ ধরনের দোল গতির গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার রয়েছে। এ অধ্যায়ে আমরা পর্যাবৃত্ত গতি তথা সরল ছন্দিত গতির বিভিন্ন রূপ আলোচনা করব।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

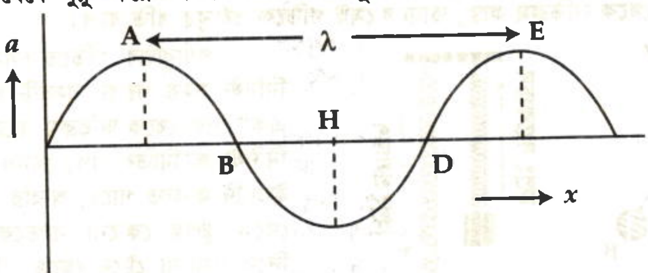
- পর্যাবৃত্ত গতি ও সরল ছন্দিত গতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সরল ছন্দিত গতির রাশিসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দৈনন্দিন জীবনে সরল দোলন গতির ব্যবহার করতে পারবে।
- সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর অন্তরক সমীকরণ প্রতিপাদন ও এর গাণিতিক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর মোট শক্তির সংরক্ষণশীলতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।

ব্যবহারিক :

(ক) স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয়ের পরীক্ষা।
(খ) স্প্রিং-এর সাহায্যে ভরের তুলনা।

৮·১ পর্যাবৃত্তি
Periodicity

যদি কোনো একটি বস্তু নির্দিষ্ট সময় পরপর একই স্থানে ফিরে আসে অথবা একই স্থান দিয়ে নির্দিষ্ট সময় অন্তর অতিক্রম করে তবে তাকে পর্যাবৃত্তি বলে। যেমন পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে, একটি সরল দোলক এক প্রান্ত থেকে শুরু করে অপর প্রান্তে গিয়ে পুনরায় ওই আদি প্রান্তে ফিরে আসে অথবা একটি স্পন্দক



চিত্র ৮·১

(oscillator) তরঙ্গ উৎপন্ন করে [চিত্র ৮·১] এবং লক্ষ করলে দেখা যাবে যে X-অক্ষের যেকোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে (যেমন A অথবা B বিন্দুতে), তরঙ্গের বিস্তার নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর পুনরাবৃত্তি ঘটছে। এগুলো সবই পর্যাবৃত্তির উদাহরণ।

পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে। এ সময়কে পর্যায়কাল বলে। সুতরাং সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর ঘূর্ণনের পর্যায়কাল 365 দিন। অনুরূপভাবে, সরল দোলক এক বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে পুনরায় ওই একই বিন্দুতে ফিরে আসতে যে সময় লাগে সেটি ওই দোলকের পর্যায়কাল। ৮·১ চিত্রে একটি কণার A বিন্দু হতে E পর্যন্ত অতিক্রম করতে যে সময় লাগে, তাই সময়কাল বা পর্যায়কাল T।

পর্যায়কাল সময় সাপেক্ষে হতে পারে, আবার স্থান সাপেক্ষে হতে পারে।

সংজ্ঞা : কোনো ঘটনার বা বিষয়ের যদি নির্দিষ্ট স্থান বা কাল পরপর পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে তাকে পর্যাবৃত্ত বলে। পর্যাবৃত্ত দু'ধরনের হতে পারে; যথা— স্থানিক পর্যাবৃত্তি ও কালিক পর্যাবৃত্ত।

৮·১·১ স্থানিক পর্যাবৃত্তি
Spatial periodicity

যখন কোনো কিছুর পুনরাবৃত্তি স্থানের সাপেক্ষে হয়, তখন তাকে স্থানিক পর্যাবৃত্তি বলে। অর্থাৎ স্থানিক পর্যায়কাল হলো সেই সকল ঘটনা যা একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব পরপর পুনরাবৃত্তি ঘটে। যেমন সরল দোলকের গতি, ঘড়ির কাঁটার গতি, কঠিন পদার্থের কেলাসের মধ্যে অণু, ডোরাকাটা শার্টের ডোরাগুলোর অবস্থান, ধান ক্ষেতে বাতাস বইলে ধান ক্ষেতে সৃষ্ট ঢেউয়ের গতি, ইলেকট্রিক পোল ইত্যাদি। উপরের উদাহরণের অণুগুলো নির্দিষ্ট অবস্থান পরপর, শার্টের ডোরাগুলো নির্দিষ্ট দূরত্ব পরপর, ইলেকট্রিক পোলগুলো নির্দিষ্ট অবস্থান পরপর পুনরাবৃত্তি ঘটে।

৮·১·২ কালিক পর্যাবৃত্তি
Temporal periodicity

পর্যাবৃত্তির পর্যায়কাল যদি একটি নির্দিষ্ট সময় সাপেক্ষ হয়, তবে তাকে কালিক পর্যাবৃত্তি বলে। অর্থাৎ কালিক পর্যাবৃত্তি হলো সেসব ঘটনা যা একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর পুনরাবৃত্তি ঘটে। যেমন ঘড়ির সেকেন্ড বা মিনিটের কাঁটা যথাক্রমে 60 সেকেন্ড বা 60 মিনিট পরপর, ঘণ্টার কাঁটা 12 ঘণ্টা পরপর পুনরাবৃত্তি ঘটে এবং পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে, পৃথিবী প্রদক্ষিণ করতে চাঁদের 30 দিন সময় লাগে ইত্যাদি।

সংজ্ঞা : কোনো রাশির মান বা ফাংশনের মান যদি এমন হয় যে নির্দিষ্ট সময় পরপর সেটি একই মান প্রাপ্ত হয় তবে তাকে কালিক পর্যাবৃত্তি বলে। অন্যভাবে বলা যায় **কোন ঘটনার বা বস্তুর গতির যদি নির্দিষ্ট সময় পরপর পুনরাবৃত্তি ঘটে তখন তাকে কালিক পর্যাবৃত্ত বলে।**

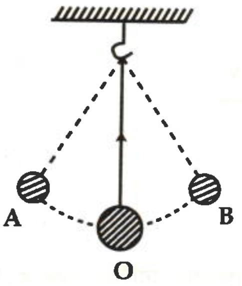
ধরা যাক, m ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ h উচ্চতায় পৃথিবীর চারদিকে v বেগে বৃত্তাকার কক্ষপথে আবর্তন করছে। উপগ্রহের পর্যায়কাল T, পৃথিবীর ভর M এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R হলে পর্যায়কালের সমীকরণ পাওয়া যায়,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$$, এখানে T হলো কালিক পর্যাবৃত্ত রাশি।

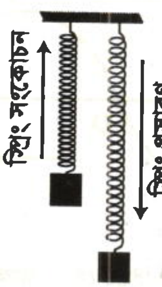
৮·২ পর্যাবৃত্ত গতি
Periodic motion

ঘড়ির পেন্ডুলাম বামে-ডানে দুলতে দেখি বা স্প্রিং-এর সংকোচন-প্রসারণজনিত গতিও আমরা লক্ষ করে থাকি [চিত্র ৮·২(ক)]। আমরা দেখতে পাই যে, **নির্দিষ্ট সময় পরপর বস্তু দুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে। এ ধরনের গতিই হলো পর্যাবৃত্ত গতি।** তা হলে আমরা বলতে পারি, কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে, একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর বস্তুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে ওই গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।

সংজ্ঞা : কোনো গতিশীল বস্তু কণার গতি যদি এমন হয় যে, এটি তার গতিপথে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে নির্দিষ্ট সময় পরপর একই দিক থেকে অতিক্রম করে, তাহলে সেই গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।



চিত্র ৮·২(ক)



চিত্র ৮·২(খ)

পর্যাবৃত্তিক গতিতে চলমান গতিপথ নির্দিষ্ট এবং নির্দিষ্ট সময় পরপর বস্তুটি গতিপথের একই বিন্দুকে একই দিক থেকে অতিক্রম করে। এই গতিপথের কোনো নির্দিষ্ট জ্যামিতিক রূপ, যেমন সরলরেখা, বৃত্ত, উপবৃত্ত ইত্যাদি থাকতে পারে, আবার নাও থাকতে পারে। স্প্রিং থেকে ঝুলন্ত কোনো বস্তুকে [চিত্র ৮·২(খ)] নিচের দিকে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে সেটি পর্যায়ক্রমে ওপর-নিচ করতে থাকে। লক্ষ করলে দেখা যায় যে, বস্তুটি গতিপথের একই বিন্দু দিয়ে নির্দিষ্ট সময় পরপর ওপর থেকে নিচে বা নিচ থেকে ওপরে যাচ্ছে। বস্তুটির

এই গতি সরলরৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি (linear periodic motion)। এক খন্ড পাথরে সুতা বেঁধে স্থির কৌণিক বেগে ঘুরাতে থাকলে পাথরটি বৃত্তীয় পর্যাবৃত্ত গতিতে (rotational periodic motion) আবর্তন করে। পৃথিবী সূর্যের চারদিকে উপবৃত্তাকার কক্ষপথে ঘোরে। এক বছর পরপর পৃথিবীর এই গতির পুনরাবৃত্তি হয়। এটি উপবৃত্তীয় পর্যায় গতির (elliptical periodic motion) একটি উদাহরণ।

আবার ধরা যাক, একটি সুতা এলোমেলোভাবে মেঝের ওপর রাখা আছে। একটি পিঁপড়া ওই সুতার ওপর দিয়ে সমদ্রুতিতে হাঁটতে থাকল। দেখা গেল যে পিঁপড়াটি সুতার যেকোনো স্থান একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর পেরিয়ে যাচ্ছে। এখানে দড়িটির কোনো নির্দিষ্ট জ্যামিতিক রূপ নেই। তবুও পিঁপড়ার গতি পর্যাবৃত্ত গতি হবে।

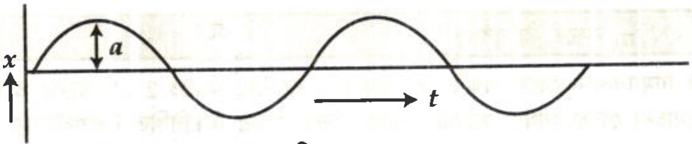
সুরযন্ত্রের তার বা বায়ুমণ্ডলের গতি, ঘড়ির কাঁটার গতি, বাষ্প বা পেট্রোল ইঞ্জিনের সিলিন্ডারের মধ্যে পিস্টনের গতি, কঠিন বস্তুতে পরমাণুর স্পন্দন ইত্যাদি হলো পর্যাবৃত্ত গতি।

পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কণার স্পন্দন একটি sine তরঙ্গ সদৃশ যার একটি বিস্তার, একটি কৌণিক কম্পাঙ্ক এবং একটি সময়ের রাশি থাকে। X-অক্ষ অভিমুখে একটি পর্যাবৃত্ত কণার সমীকরণ হলো,

$$x = a \sin \omega t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.1)$$

এখানে a = বিস্তার, ω = কৌণিক কম্পাঙ্ক, t = সময়

নিচের [চিত্র ৮.২(গ)] লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণটিকে দেখানো যায় :



চিত্র ৮.২ (গ)

পর্যায়কাল
Time period

পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোনো কণা যে নির্দিষ্ট সময় পরপর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে নির্দিষ্ট দিক দিয়ে অতিক্রম করে সেই সময়কে পর্যায়কাল বলে। পর্যাবৃত্তিক গতির গতিপথ বৃত্তাকার, উপবৃত্তাকার, সরলরৈখিক ও আরও জটিল হতে পারে।

পর্যাবৃত্ত গতির বৈশিষ্ট্য
Characteristics of periodic motion

১। পর্যাবৃত্ত গতি সরল, বক্র বা বন্ধ (rectilinear, curvilinear or closed) পথে হতে পারে।

২। পর্যাবৃত্ত গতির ক্ষেত্রে বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখী হয় যা গতিপথের ওপরে থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে।

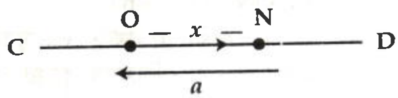
স্পন্দন গতি বা দোলন গতি
Oscillatory motion

পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কণা যদি পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় একই পথে তার বিপরীত দিকে চলে তবে তার গতিকে স্পন্দন গতি বা দোলন গতি বলে।

উদাহরণ : সরল দোলকের গতি, গীটারের তারের গতি, কম্পনশীল সুরশলাকার গতি, স্পন্দনরত তারের গতি, শব্দ সঞ্চালনের সময় বায়ুর কণার স্পন্দন ইত্যাদি।

৮.৩ সরল ছন্দিত গতি বা সরল দোলন গতি বা সরল দোল গতি
Simple harmonic motion

ছন্দিত গতি একটি বিশেষ ধরনের দোলনগতি। মনে করি, C এবং D বিন্দুর মধ্যে সরলরেখা বরাবর দোলনরত একটি কণা N-এর গতিপথ নির্দেশিত হবে [চিত্র ৮.৩]। O বিন্দু কণাটির সাম্যাবস্থান এবং যেকোনো মুহূর্তে সাম্যাবস্থান থেকে এর সরণ x। কণার গতি ছন্দিত গতি হলে ওই মুহূর্তে কণাটির ত্বরণ a-এর মান x-এর সমানুপাতিক এবং অভিমুখ O বিন্দুর দিকে হয় অর্থাৎ a সরণ x-এর বিপরীতমুখী হয়। সেজন্য আমরা লেখতে পারি,



চিত্র ৮.৩

$$a \propto -x \text{ বা, } a = -kx$$

এখানে k = ধ্রুবক $= \omega^2$; ω হলো কণাটির কৌণিক বেগ।

$\therefore \quad a = -\omega^2 x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.2)$

আবার ত্বরণ কীভাবে সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় তা আমরা জানি। নিউটনের ২য় সূত্র অনুযায়ী বল কোনো বস্তুতে ক্রিয়াশীল হলে ত্বরণ সৃষ্টি হয়।

অর্থাৎ $F = ma$

$\therefore \quad F = -m\omega^2 x$ [8.2 সমীকরণ অনুযায়ী]

বা, $F = -(m\omega^2)\, x$

বা, $F = -Kx$; এখানে K = স্প্রিং ধ্রুবক বা বল ধ্রুবক $= \dfrac{F}{x}$

$\therefore \quad F \propto -x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.3)$

এখানে $-$ve চিহ্নের অর্থ হলো সরণ বেশি হলে ত্বরণ ও বল বেশি হবে। কিন্তু দিক সর্বদা সরণের বিপরীত দিকে অর্থাৎ সাম্যাবস্থানের দিকে।

অর্থাৎ **সরল ছন্দিত গতি বল বা প্রত্যায়নক বল সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী।**

সংজ্ঞা : কোনো দোলনরত কণার ত্বরণ সাম্যাবস্থান থেকে এর দূরত্বের সমানুপাতিক ও সব সময় সাম্যাবস্থানের অভিমুখী হলে ওই কণার গতিকে সরল ছন্দিত গতি বলে।

স্পষ্টত সব পর্যাবৃত্ত গতির এই বৈশিষ্ট্যগুলো থাকে না। তাই **সরল ছন্দিত গতি মাত্রই পর্যাবৃত্ত গতি হলেও সব পর্যাবৃত্ত গতি সরল ছন্দিত গতি বা সরল দোলগতি নয়।**

কাজ : স্প্রিং ধ্রুবক 2·5 N/m বলতে কী বুঝ ?

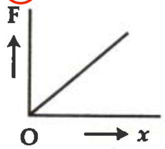
এ দ্বারা বুঝায় সাম্যাবস্থান থেকে একটি স্প্রিং-কে 1 m প্রসারিত করতে 2·5 N বলের প্রয়োজন।

উপরিউক্ত আলোচনা থেকে আমরা সহজেই সরল ছন্দিত গতির নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যসমূহ বর্ণনা করতে পারি।

৮·৩·১ সরল ছন্দিত গতির ক্ষেত্রে বলের বৈশিষ্ট্য MAT(10-11,12-13)
Characteristics of force of simple harmonic motion

(i) এটি একটি বিশেষ ধরনের ছন্দিত গতি।

(ii) এই গতির ক্ষেত্রে কণার ত্বরণ এবং এর ওপর ক্রিয়াশীল বলের মান কণার সরণের সমানুপাতিক।



চিত্র ৮·৪

(iii) ত্বরণের এবং কণার ওপর ক্রিয়াশীল বলের অভিমুখ সব সময় সাম্যাবস্থানের দিকে হয়, অর্থাৎ কণার সরণের বিপরীত দিকে হয়।

(iv) এই ধরনের গতির বলের গতিপথ সরলরৈখিক হয়।

(v) ত্রুটি একটি পর্যাবৃত্ত গতি।

প্রত্যায়নক বল ও সরণের লেখচিত্রটি (৮·৪) একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা যার নতি বা ঢাল (slope) $= m\omega^2$

৮·৪ সরল ছন্দিত গতি সম্পর্কিত কয়েকটি রাশি
Some terms related to simple harmonic motion

নির্দেশক বৃত্তের ধারণাকে কাজে লাগিয়ে সরল ছন্দিত গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশির বর্ণনা পাওয়া যায়। নির্দেশক বৃত্তের সাহায্যে সরল ছন্দিত গতি সংক্রান্ত সরণ, বেগ ও ত্বরণের রাশিমালা এবং পর্যায়কাল, কম্পাঙ্ক, কৌণিক কম্পাঙ্ক ও দশা নিম্নে প্রতিপাদন করা হলো—

১. সরণ (Displacement) : মনে করি একটি বস্তুকণা O বিন্দুকে কেন্দ্র করে A ব্যাসার্ধের ABCD বৃত্তপথে তীর চিহ্নিত দিকে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে এবং t সময়ে A বিন্দু হতে P বিন্দুতে আসছে [চিত্র ৮·৫]। P বিন্দু হতে বৃত্তের ব্যাস DB-এর ওপর PN লম্ব টানি। এখানে লম্ব পাদ বিন্দুর সরণ, $x = ON$

চিত্র হতে $\angle AOP = \angle OPN = \theta$; এখানে θ = কৌণিক সরণ

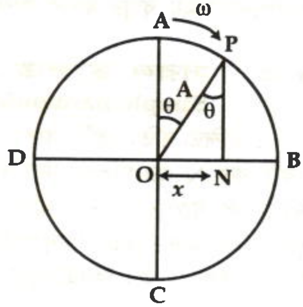
আমরা পাই, $\dfrac{ON}{OP} = \sin\theta$

বা, $ON = OP \times \sin\theta$

$\therefore \quad x = A\sin\theta$; এখানে x = মূলবিন্দু থেকে সরণ

এবং $OP = A$ = নির্দেশক বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

বা, $x = A\sin\omega t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.4)$



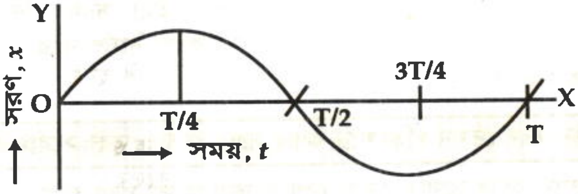
চিত্র ৮·৫

এখানে $\theta = \omega t$

আদি দশা (δ) বিবেচনা করলে $x = A \sin(\omega t + \delta)$ হয়।

ইহা সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার সাধারণ সমীকরণ নির্দেশ করে। এই সমীকরণে A, কম্পনরত কণার বিস্তার নির্দেশ করে।

পাদবিন্দুর দোলনকাল T হলে, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$; এখানে পাদবিন্দুর কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T}$। (8.4) সমীকরণ থেকে পাই, $x = A \sin 2\pi n t$ ... ... (8.5)



চিত্র ৮.৫ (ক)

সমীকরণ (8.4) এবং (8.5) হলো **সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন একটি কণার সরণের রাশিমালা।** সরণ-সময় লেখচিত্র একটি সাইন সদৃশ লেখ হবে। ৮.৫(ক) চিত্রে ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণের সমীকরণ লেখচিত্রের মাধ্যমে দেখান হলো।

২. বেগ (Velocity) : আমরা জানি সময় সাপেক্ষে সরণের পরিবর্তনের হারকে **বেগ** বলে। একে সাধারণত v দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\therefore$ বেগ, $v = \frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t) = A\,\omega \cos \omega t$ এখানে, $x = A \sin \omega t$

$\therefore$ $\sin \omega t = \frac{x}{A}$ এবং $\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$

$\therefore$ বেগ, $v = A\omega\sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = A\omega\sqrt{1 - x^2/A^2}$

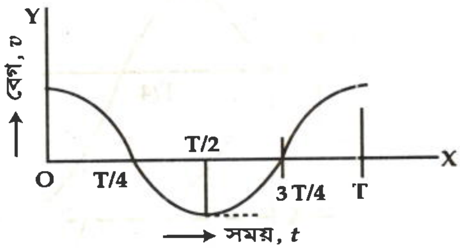
বা, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ... ... (8.6)

সমীকরণ (8.6) বেগ ও সরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

(ক) যখন $x = A$, অর্থাৎ কণাটি যখন বিস্তারের প্রান্তে উপস্থিত হয়, তখন $v = \omega\sqrt{A^2 - A^2} = 0$ হয় এবং এটিই বেগের সর্বনিম্ন মান। অর্থাৎ $v_{min} = 0$।

(খ) যখন $x = 0$, অর্থাৎ কণাটি যখন সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে, তখন $v = \omega\sqrt{A^2 - 0} = \omega A$ হয় এবং এটিই বেগের সর্বোচ্চ মান। অর্থাৎ $v_{max} = \omega A$।

অতএব সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার বেগ সাম্যাবস্থায় সর্বাধিক হয় এবং সরণ বৃদ্ধির সাথে সাথে বেগ হ্রাস পেতে থাকে এবং বিস্তারের প্রান্তে বেগ শূন্য হয়।



চিত্র ৮.৫ (খ)

৮.৫ চিত্র অনুযায়ী N বিন্দুর গতিপথের মধ্য অবস্থানে তার বেগ সর্বাধিক এবং সরণ বৃদ্ধির সাথে সাথে বেগ কমতে থাকে এবং চরম অবস্থানে B বা D বিন্দুতে এর বেগ শূন্য হবে অর্থাৎ বিস্তারের প্রান্তে বেগ শূন্য হবে। সরল ছন্দিত গতি সম্বন্ধে কণার বেগ-সময় লেখচিত্র একটি cosine সদৃশ লেখচিত্র [চিত্র ৮.৫(খ)]।

৩. ত্বরণ (Acceleration) : আমরা জানি সময় সাপেক্ষে বেগের পরিবর্তনের হারকে **ত্বরণ** বলে। একে a দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

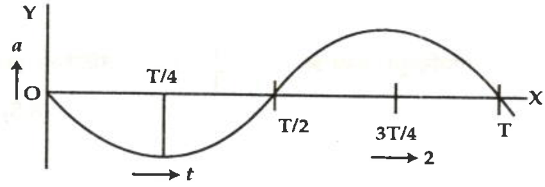
ত্বরণ, $a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}(A\omega \cos \omega t) = -A\omega^2 \sin \omega t$

বা, $a = -\omega^2 x$ $[\because x = A \sin \omega t]$ ... ... (8.7)

সমীকরণ (8.7) ত্বরণ ও সরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

ঋণাত্মক চিহ্ন বুঝায় যে, ত্বরণ ও সরণ পরস্পর বিপরীতমুখী।

(ক) যখন $x = 0$, অর্থাৎ কণাটি যখন মধ্যবর্তী সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে তখন ত্বরণ সর্বনিম্ন হয় বা $a_{min} = 0$ এবং (খ) যখন $x = A$, অর্থাৎ কণাটি যখন বিস্তারের প্রান্তে উপস্থিত হয়, তখন $a = -\omega^2 A$ হয়। ইহাই ত্বরণের সর্বোচ্চ মান। ঋণাত্মক চিহ্ন বোঝায় ত্বরণ সরণের বিপরীতমুখী। তখন ত্বরণের মান সর্বোচ্চ হয় বা, $a_{max} = \omega^2 A$ হয়।



চিত্র ৮.৫ (গ)

৮.৫(গ) চিত্রে N বিন্দুর গতিপথের চরম অবস্থানে ত্বরণ সর্বাধিক এবং মধ্য অবস্থানে ত্বরণ শূন্য হবে।

ত্বরণ-সময় লেখচিত্র একটি ঋণাত্মক sine সদৃশ লেখ। ইহা সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার ত্বরণের সমীকরণ নির্দেশ করে।

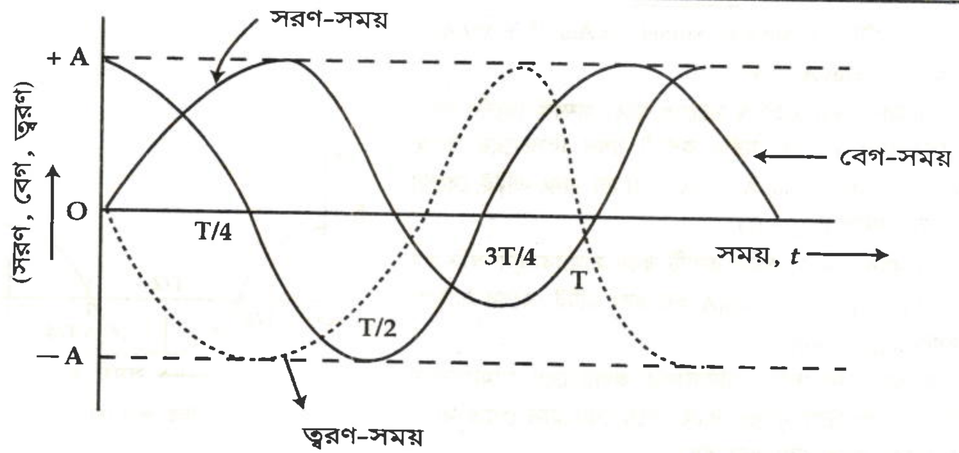
অনুধাবনমূলক কাজ : কখন সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ ও ত্বরণ সর্বোচ্চ হয় ?

সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ সরণ, বেগ ও ত্বরণের সমীকরণ হলো :

$x_{max} = A$, $v_{max} = \omega A$ এবং $a_{max} = \omega^2 A$

সুতরাং দেখা যায় যে, সর্বোচ্চ সরণ A, সর্বোচ্চ বেগ ωA এবং সর্বোচ্চ ত্বরণ $\omega^2 A$। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার যেকোনো একদিকে সরণের মান সর্বোচ্চ হলে তখন বেগের মান সর্বনিম্ন হয়। কারণ এই মুহূর্তে বেগের দিক পরিবর্তিত হয়। ঠিক এই সময় ত্বরণের মান সর্বোচ্চ হয় কিন্তু এর দিক হয় সরণের বিপরীত দিকে। আবার যখন সরণের মান শূন্য হয় তখন বেগ সর্বোচ্চ এবং ত্বরণ শূন্য হয়। কণাটি যখন সাম্যাবস্থানের দিকে এগুতে থাকে তখন তার বেগ বাড়তে থাকে অর্থাৎ কণাটি যখন সর্বোচ্চ সরণের দিকে যেতে থাকে তখন বেগ কমতে থাকে।

যাচাই কর : সরণের সমীকরণ, $x = A \sin \omega t$, বেগ, $v = A\omega \cos \omega t$ এবং ত্বরণ $a = -A\omega^2 \sin \omega t$ কে একটি লেখচিত্ররূপে প্রকাশ করলে কীরূপ দেখাবে ? পর্যায়কাল ও দশা বিবেচনা করে ব্যাখ্যা কর।



চিত্র ৮.৬

৪. পর্যায়কাল (Time period) : সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কোনো কণার একটি পূর্ণ স্পন্দন সম্পন্ন করতে যে সময় ব্যয় হয় তাকে তার পর্যায়কাল বলে। একে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কম্পাঙ্ক n হলে $T = \frac{1}{n}$ হয়। সরল দোলন গতির সরণের সমীকরণ $x = A \sin(\omega t + \delta)$ ... ... (8.8)

সময় t কে $\frac{2\pi}{\omega}$ পরিমাণ বৃদ্ধি করা হলে সরণ হবে $x' = A \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \delta\right]$

$$= A \sin(\omega t + 2\pi + \delta) = A \sin(\omega t + \delta) = x$$

অর্থাৎ $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় পরপর রাশিটির পুনরাবৃত্তি ঘটে। সুতরাং সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কাল $T = \frac{2\pi}{\omega}$

সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান হচ্ছে,

$$x = A \sin(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.9)$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় অন্তর কণার সরণ একই হচ্ছে। কাজেই, $\frac{2\pi}{\omega}$ হচ্ছে সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কাল। এই $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় পরপর রাশিটির পুনরাবৃত্তি ঘটবে।

আবার, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$ $\left[\because \frac{K}{m} = \omega^2\right]$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.10)$$

MAT(09-10)

সমীকরণ (8.10) হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কালের সমীকরণ। **এটি ভর, পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের মধ্যে সম্পর্কজনিত সমীকরণও বটে।** অর্থাৎ সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল বল ধ্রুবকের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। MAT(18-19)
পর্যায়কালের একক sec, এর মাত্রা T।

৫. কম্পাঙ্ক (Frequency) : কোনো কম্পমান বস্তু বা স্পন্দক একক সময়ে যতগুলো পূর্ণ দোলন দেয় তাকে কম্পাঙ্ক বলে। একে n দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.11)$$

[সমীকরণ (8.10) ব্যবহার করে]

এটিই হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনের কম্পাঙ্কের সমীকরণ।

৬. কৌণিক কম্পাঙ্ক (Angular frequency) : সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন কোনো কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক কম্পাঙ্ক বলে। একে ω দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = 2\pi \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \quad [\text{ সমীকরণ (8.11) ব্যবহার করে }]$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.12)$$

ω-এর একক রেডিয়ান/সেকেন্ড (rad s^{-1})।

৭. দশা (Phase) : সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কোনো বস্তু বা কণার যেকোনো মুহূর্তের গতির অবস্থাকে (সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি) এর দশা বলে। দশা বলতে যেকোনো মুহূর্তের দোলনের সঠিক অবস্থা বোঝায়। অর্থাৎ এ সময়ে বস্তু বা কণাটির সরণ, বেগ, ত্বরণ, গতির অভিমুখ ইত্যাদি বোঝায়। সমীকরণ (8.9)-এ $(\omega t + \delta)$ রাশিটি গতির দশা নির্দেশ করছে। সমীকরণে $t = 0$ বসালে δ-এর মান দশাকে বোঝায়। এক্ষেত্রে δ-কে আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা (initial phase) বা ইপক (Epoch) বলা হয়। δ-এর মান সময় নির্ভর নয় বলে একে অনেক সময় দশা ধ্রুবকও (Phase constant) বলা হয়। ধ্রুবক δ গতির অবস্থা বোঝায়। যেমন—

$\delta = 0°$ হলে,

$x = A \sin(\omega t + \delta) = A \sin(\omega t + 0°) = A \sin \omega t$

কণা বা বস্তুটির গতি সাম্যাবস্থান হতে শুরু হয়েছে বুঝায়।

আবার, $\delta = \frac{\pi}{2}$ হলে,

$x = A \sin(\omega t + \delta) = A \sin(\omega t + \pi/2) = A \cos \omega t$

এক্ষেত্রে কণাটির গতি শুরু হয় সরণের সর্বোচ্চ অবস্থান থেকে [চিত্র ৮·৫(খ)]। δ-এর বিভিন্ন মান ভিন্ন ভিন্ন আদি সরণ নির্দেশ করে।

সুতরাং $t = 0$ সময়ে $x = A$ অর্থাৎ সরণ x হচ্ছে সর্বাধিক। এক্ষেত্রে কণাটির গতি শুরু হয় এক প্রান্ত হতে। আবার কণাটির আদি অবস্থান এবং দ্রুতি দ্বারা সরল দোলন গতির বিস্তার এবং দশা পার্থক্য δ নির্ণীত হয়।

আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা (Epoch) : যাত্রা শুরু করার মুহূর্তে যে দশা থাকে তাকে প্রারম্ভিক বা আদি দশা বলে। সময়ের সঙ্গে দশার পরিবর্তন হয়; কিন্তু প্রারম্ভিক দশা একই থাকে।

৮. পূর্ণ স্পন্দন (Complete vibration) : সরল দোলন গতির ক্ষেত্রে একটি সম্পূর্ণ অগ্র-পশ্চাৎ গতিকে **পূর্ণ স্পন্দন বা দোলন** বলে।

৯. পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের সম্পর্ক : কৌণিক কম্পাঙ্ক ω, পর্যায়কাল T এবং বল ধ্রুবক K হলে $\omega^2 = \frac{K}{m}$ হয়। এখানে m = স্পন্দনশীল কণার ভর।

আবার পর্যায়কাল $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

বা, $T \propto \frac{1}{\sqrt{K}}$; অর্থাৎ পর্যায়কাল বল ধ্রুবকের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

১০. বল ধ্রুবক (Force Constant) : কোনো স্প্রিং-এর মুক্তপ্রান্তে একক সরণ ঘটালে স্প্রিংটি সরণের বিপরীত দিকে যে প্রত্যয়নক বল প্রয়োগ করে তাকে বল ধ্রুবক বলে।

১১. বিস্তার (Amplitude) : সরল দোলনে গতিশীল কোনো কণা এর সাম্যাবস্থান বা মধ্যাবস্থান থেকে যেকোনো একদিকে যে সর্বোচ্চ দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তার বিস্তার বলে। বিস্তারকে A বা a দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর একক মিটার (m)।

৮.৫ দশা ও দশা পার্থক্য
Phase and phase difference

দশা

সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $x = A \sin(\omega t + \delta)$ লক্ষ করলে দেখা যায় যে, সমীকরণটিতে দুটি অংশ রয়েছে। যথা—(১) সময় নিরপেক্ষ অংশ (time independent part), A। এটি **বিস্তার অংশ** এবং (২) সময় নির্ভর অংশ (time dependent part) $(\omega t + \delta)$ বা **দশা অংশ**। এই সময় নির্ভর অংশই একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির মান বিভিন্ন সময়ে কত তা নির্ধারণ করে। যখন $t = 0$, ওই সময়ে দশা δ হয়। **δ-কে আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা বা দশা ধ্রুবক বলে।**

দশা পার্থক্য

দুটি সরল ছন্দিত গতি একই ছন্দে না চললে তাদের মধ্যে দশা পার্থক্য (Phase difference) আছে ধরা হয়। দশা পার্থক্য বলতে একটি কণা অন্য আরেকটি কণা থেকে কত দশা কোণে এগিয়ে (lead) বা পিছিয়ে (lag) তা বোঝানো হয়।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক দুটি ছন্দিত গতি স্পন্দন $x_1 = A \sin \omega t$ এবং $x_2 = A \sin(\omega t + \delta)$। এদের মধ্যে দ্বিতীয়টি প্রথমটির সাপেক্ষে δ কোণে এগিয়ে রয়েছে। সুতরাং এদের মধ্যে দশা পার্থক্য δ। এখন যদি ওই

(i) ছন্দিত গতির শর্ত দশা পার্থক্য $\delta = 0$, বা 2π কিংবা $\delta = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$) হয়, তবে এদের গতির অবস্থা সবসময় একই থাকবে। এ ধরনের গতি সমদশায় (same phase) রয়েছে ধরা হয়। আবার

(ii) $\delta = \pi$ অথবা $\delta = (2n+1)\pi$, ($n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$) হলে বিপরীত দশায় (opposite phase) রয়েছে ধরা হয়। আবার যদি,

(iii) $\delta = \frac{\pi}{2}$ অর্থাৎ 90° হয়, তবে এদের কণার স্পন্দনগতি পরস্পর লম্ব বরাবর ঘটে।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.১

১। একটি বস্তুকণা তার দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হতে দোলন শুরু করে 0·1 m বিস্তার ও 1 Hz কম্পাঙ্কযুক্ত সরল ছন্দিত গতি সম্পন্ন করে। 4·5 s পর কণাটির সরণ কত হবে ?

মনে করি, সরণ $= x$

আমরা পাই, $x = A \sin\omega t$

$= A \sin \frac{2\pi}{T} \times t \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$

এখানে, $n = 1$ Hz
$A = 0·1$ m
$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{1\ s^{-1}} = 1$ s

দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হতে মধ্য অবস্থানে যেতে $\frac{1}{4}$ s = 0·25 s সময় লাগে সেহেতু 4·25 s-এ কণাটি 4টি পূর্ণ কম্পন দিয়ে মধ্য অবস্থানে আসবে। কাজেই মধ্য অবস্থান অতিক্রম করার 0·25 s পরের সরণই হবে নির্ণেয় 4·5 s পর কণাটির সরণ।

∴ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$x = 0·1\ m \times \sin\frac{2\pi}{1} \times 0·25 = 0·1\ m \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0·1\ m$$

২। একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ বেগ $0.03\ ms^{-1}$। কণাটির বিস্তার 0.006 m হলে পর্যায়কাল কত হবে ? [কু. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি সর্বোচ্চ বেগ,

$$v_{max} = \omega A$$

$$\therefore \quad \omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{0.03}{0.006} = 5\ rad\ s^{-1}$$

আবার, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.14}{5} = 1.256$ sec

এখানে,
$v_{max} = 0.03\ ms^{-1}$
$A = 0.006$ m

৩। একটি সরল ছন্দিত গতিতে চলমান বস্তুর বিস্তার 0.01 m ও কম্পাঙ্ক 12 Hz। বস্তুটির 0.005 m সরণে বেগ কত হবে ? বস্তুটির সর্বোচ্চ বেগ কত হবে ?
[য. বো. ২০২৩; য. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০১; JU Admission Test, 2020-21 (মান ভিন্ন)]

মনে করি, বেগ $= v$

আমরা পাই, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ... ... (i)

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$v = 2 \times 3.14 \times 12\ rad\ s^{-1}\sqrt{(0.01\ m)^2 - (0.005\ m)^2}$$
$$= 0.653\ ms^{-1}$$

পুনরায় সর্বোচ্চ বেগ v_{max}-এর ক্ষেত্রে, $x = 0$

$\therefore$ সমীকরণ (i) অনুযায়ী,

$$v_{max} = \omega A = 2 \times 3.14 \times 12\ rad\ s^{-1} \times 0.01\ m$$
$$= 0.7536\ ms^{-1}$$

এখানে,
$n = 12$ Hz
$\omega = 2\pi n = 2 \times 3.14 \times 12\ rad\ s^{-1}$
$A = 0.01$ m
$x = 0.005$ m

৪। 1 kg ভরের একটি বস্তু 10 Hz কম্পাঙ্কে সরল ছন্দিত গতিতে স্পন্দিত হচ্ছে। যখন বস্তুটির সরণ 3 cm তখন এর ত্বরণ এবং প্রত্যায়নক বল কত নির্ণয় কর।

আমরা জানি, ত্বরণ,

$$a = \omega^2 x = (2\pi n)^2 \times x$$
$$= (2 \times 3.14 \times 10)^2 \times 0.03$$
$$= 118\ ms^{-2}$$

এবং প্রত্যায়নক বল, $F = ma = 1 \times 118 = 118$ N

এখানে,
$m = 1$ kg
$n = 10$ Hz
$x = 3$ cm $= 0.03$ m

৫। সরল ছন্দিত গতিতে গতিশীল একটি বস্তুকণার বিস্তার 0.6 m। গতিপথের মধ্যবিন্দু হতে 0.3 m দূরে ত্বরণ হচ্ছে $2\ ms^{-2}$। গতিপথের মধ্য অবস্থান থেকে 0.3 m দূরে বস্তুটির বেগ কত?

ধরা যাক, বস্তুটির বেগ $= v$

এখন, ত্বরণ $a = \omega^2 x$ (মান বিবেচনা)

বা, $\omega = \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{\frac{0.6}{0.3}} = \sqrt{2}$

$= 1.414\ rads^{-1}$

আবার বেগ,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 1.414\sqrt{(0.6)^2 - (0.3)^2}$$
$$= 1.414 \times \sqrt{0.36 - 0.09}$$
$$= 1.414 \times \sqrt{0.27} = 0.735\ ms^{-1}$$

এখানে,
$A = 0.6$ m
$x = 0.3$ m
$a = 2\ ms^{-2}$

৬। সাম্যাবস্থা থেকে কী পরিমাণ সরণ হলে সরল দোল গতিসম্পন্ন বস্তুকণার বেগ সর্বোচ্চ বেগের অর্ধেক হবে? [Admission Test : CKRUET 2021-22, 2020-21; DU-A 2021-22; BUET 2021-22 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি সরল দোল গতিসম্পন্ন বস্তুকণার বেগ,

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ এবং সর্বোচ্চ বেগ,

$v_{max} = \omega A$

প্রশ্নানুসারে,

$v = \frac{v_{max}}{2}$ বা, $\omega\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{\omega A}{2}$

বা, $\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{A}{2}$ বা, $A^2 - x^2 = \frac{A^2}{4}$

বা, $x^2 = A^2 - \frac{A^2}{4} = \frac{3A^2}{4}$

$\therefore x = \frac{\sqrt{3}A}{2}$

$\therefore$ সাম্যাবস্থা থেকে $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ দূরত্বে বেগ সর্বোচ্চ বেগের অর্ধেক হবে।

৭। প্রমাণ কর যে, একটি প্লাটফর্ম 4·9 m বিস্তারে কাঁপতে শুরু করলে এর ওপর একজন মানুষ দাঁড়িয়ে থাকলে, তার পা প্লাটফর্ম হতে আলাদা হবার জন্য প্লাটফর্মের কৌণিক কম্পাঙ্ক $\sqrt{2}$ হবে। [BUET Admission Test, 2015-16]

যদি প্লাটফর্মের ত্বরণ g-এর চেয়ে বেশি হয় তবে পা প্লাটফর্ম থেকে আলাদা হবে।

আমরা জানি,

$a_{max} = \omega^2 A_{max}$

বা, $g = \omega^2 A$

বা, $9{\cdot}8 = \omega^2 \times 4{\cdot}9$

বা, $\omega^2 = 2$

$\therefore \omega = \sqrt{2}$

৮। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণা যখন সাম্যাবস্থান থেকে 6 cm ও 8 cm দূরত্বে থাকে তখন তার বেগ যথাক্রমে 20 cms^{-1} ও 15 cms^{-1}। কণাটির বিস্তার ও পর্যায়কাল কত?

[CKRUET Admission Test, 2020-21 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার বেগ,

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

প্রথম ক্ষেত্রে, $20 = \omega\sqrt{A^2 - 6^2}$ ... ... (i)

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $15 = \omega\sqrt{A^2 - 8^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i)-কে সমীকরণ (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{20}{15} = \frac{\omega\sqrt{A^2 - 6^2}}{\omega\sqrt{A^2 - 8^2}}$

বা, $\frac{4}{3} = \frac{\sqrt{A^2 - 36}}{\sqrt{A^2 - 64}}$

বা, $\frac{A^2 - 36}{A^2 - 64} = \frac{16}{9}$

বা, $9A^2 - 36 \times 9 = 16A^2 - 16 \times 64$

বা, $16A^2 - 9A^2 = 16 \times 64 - 36 \times 9 = 1024 - 324 = 700$

বা, $7A^2 = 700$

$\therefore A = \sqrt{\frac{700}{7}} = 10\,\text{cm}$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$20 = \omega\sqrt{10^2 - 6^2}$

বা, $20 = \omega\sqrt{100 - 36} = 8\omega$

$\therefore \omega = \frac{20}{8} = 2{\cdot}5\,\text{rads}^{-1}$

$\therefore T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2{\cdot}5} = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{2{\cdot}5} = 2{\cdot}51\text{s}$

৯। দুটি সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ $x_1 = 0{\cdot}2 \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ এবং $x_2 = 0{\cdot}2 \cos 50\pi t$। দ্বিতীয় কণাটির বেগের সাপেক্ষে প্রথম কণাটির দশা পার্থক্য নির্ণয় কর। [SUST Admission Test, 2019-20 (মান ভিন্ন)]

সরল ছন্দিত গতির প্রথম কণাটির সমীকরণ, $x_1 = 0{\cdot}2 \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ এবং দ্বিতীয়টির সমীকরণ, $x_2 = 0{\cdot}2 \cos 50\pi t$।

$\therefore$ প্রথমটির বেগ, $v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 0{\cdot}2 \times 50\pi \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

এবং দ্বিতীয়টির বেগ, $v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -0{\cdot}2 \times 50\pi \sin 50\pi t = 0{\cdot}2 \times 50\pi \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

অতএব, এদের দশা পার্থক্য $= \left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi - 3\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

১০। 50 g ভরবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের দোলনকাল 2 s এবং বিস্তার 10 cm। দোলনরত অবস্থায় যখন এর বব মধ্যস্থানে আসে তখন ববটি ভূমি হতে 45 cm ওপরে অবস্থান করে। (ক) দোলনরত ববের সর্বোচ্চ বেগ কত ? (খ) দোলনরত বব যখন মধ্যস্থানে আসে তখন সুতাটি ছিঁড়ে গেলে এর গতি প্রকৃতি বিশ্লেষণ থেকে কত দূরে ভূমিতে পতিত হবে গাণিতিকভাবে পরিমাপ কর। [কু. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি ববের সর্বোচ্চ বেগ,

$$v_{max} = \omega A$$

আবার, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\therefore \quad v_{max} = \frac{2\pi}{T} A = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 0{\cdot}1}{2} = 0{\cdot}314\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,
বিস্তার, $A = 10\ \text{cm} = 0{\cdot}1\ \text{m}$
দোলন কাল, $T = 2\ \text{s}$

(খ) ববটি মধ্য অবস্থানে এসে যদি সুতাটি ছিঁড়ে যায় তা হলে ববটি অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ন্যায় পরাবৃত্তাকার পথে ভূমিতে পতিত হবে।

আমরা জানি,

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{max}}\right)^2$$

বা, $-0{\cdot}45 = -\frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times \frac{x^2}{(0{\cdot}314)^2}$

$$\therefore \quad x = \sqrt{\frac{2 \times 0{\cdot}45 \times (0{\cdot}314)^2}{9{\cdot}8}} = 0{\cdot}095\ \text{m} = 9{\cdot}5\ \text{cm}$$

এখানে,
$v_{max} = 0{\cdot}314\ \text{ms}^{-1}$
$y = -45\ \text{cm} = -0{\cdot}45\ \text{m}$ (নিম্নমুখী)
$x = ?$

অর্থাৎ ববটি পরাবৃত্তাকার পথে $9{\cdot}5$ cm দূরে ভূমিতে পতিত হবে।

৮·৬ সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর অন্তরকলন বা অবকলনীয় সমীকরণ
Differential equation of simple harmonic motion

মনে করি m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা সরল দোলন গতিতে আছে। t সময়ে এর সরণ x হলে

বেগ, $v = \frac{dx}{dt}$ এবং ত্বরণ, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\therefore$ কণাটির ওপর ক্রিয়াশীল বলের মান,

$$F = \text{ভর} \times \text{ত্বরণ} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

যেহেতু বল বা ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী, অতএব

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

বা, $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.13)$$

বা, $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-K}{m}x$$

এখানে K একটি ধ্রুব সংখ্যা। একে বল ধ্রুবক বলে। **এই ধ্রুবকের মান স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য, জ্যামিতিক গঠন এবং পদার্থের স্থিতিস্থাপক ধর্মের ওপর নির্ভর করে।** $K = \frac{F}{x}$ **-এর একক Nm^{-1} এবং মাত্রা MT^{-2}**

পুনরায় কণাটির কৌণিক বেগ ω হলে, আমরা পাই,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -\omega^2 x \quad \text{[সমীকরণ (8.12) হতে]} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.14)$$

এখন সমীকরণ (8.13) এবং (8.14) হতে পাই, $-\frac{K}{m}x = -\omega^2 x$ বা, $\frac{K}{m} = \omega^2$

সমীকরণ (8.13)-এ $\frac{K}{m}$-এর মান বসিয়ে পাই,

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.15)$$

সমীকরণ (8.15) হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার অবকলনীয় সমীকরণ।

৮-৬.১ অন্তরকলন বা অবকলনীয় সমীকরণের সমাধান

(8.15) নং সমীকরণকে $2\frac{dx}{dt}$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 . 2x\frac{dx}{dt} = 0$$

বা, $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2\frac{d}{dt}(x^2) = 0$$

t-এর সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই,

$$\int\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \int\frac{\omega^2 d}{dt}(x^2) = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = c = \text{ধ্রুবক} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [8.15(a)]$$

কিন্তু যখন $x = \pm a$, অর্থাৎ বিস্তারের সর্বোচ্চ অবস্থানে, তখন বেগ $\frac{dx}{dt} = 0 \;\therefore\; c = \omega^2 x^2$

সমীকরণ [8.15(a)]-তে $c = \omega^2 a^2$ বসিয়ে পাই

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$$

এই সমীকরণকে বর্গমূল করে পাই,

বা, $$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

বা, $$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt$$

এখানে,

x = ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণ

a = বস্তুর সর্বোচ্চ সরণ

δ = আদি দশা

$\omega t + \delta$ = বস্তুর দশা

সমাকলন করে পাই,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int\omega dt$$

$\sin^{-1}\frac{x}{a} = \omega t + \delta$ এখানে δ = সমাকলন ধ্রুবক।

বা, $$\boxed{x = a\sin(\omega t + \delta)} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.16)$$

এই সমীকরণ সরল দোলন গতির অবকলন সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

কাজ : $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলগতির সমীকরণ। কীভাবে দেখাবে ? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [দি. বো. ২০২১]

এক্ষেত্রে বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$; এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$

ত্বরণের সমীকরণ থেকে দেখা যায় ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী। অতএব $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলগতি নির্দেশ করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.২

১। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $y = 10 \sin (\omega t + \delta)$, পর্যায়কাল 30s এবং আদি সরণ 0·05m হলে কণাটির (ক) কৌণিক কম্পাঙ্ক; (খ) আদি দশা নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২০০২; RU-C Admission Test, 2020-21 (মান ভিন্ন)]

এখানে,
পর্যায়কাল, T = 30s
কৌণিক কম্পাঙ্ক, ω = ?
আদি সময়, $t = 0$
আদি সরণ, $y = 0·05$ m
আদি দশা, δ = ?

(ক) আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2 \times 3·14}{30} = 0·209 \text{ rads}^{-1}$$

(খ) আবার, $y = 10 \sin (\omega t + \delta)$

বা, $0·05 = 10 \sin (\omega t + \delta)$
$= 10 \sin (\omega \times 0 + \delta) = 10 \sin \delta$

$$\therefore \quad \sin \delta = \frac{0·05}{10} = 0·005$$

$$\therefore \quad \delta = \sin^{-1} (0·005) = 0·286°$$

২।একটি সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কণার বেগ 4 ms–1 যখন সরণ 5। আবার বেগ যখন 5 ms–1 তখন সরণ 4m। দোলনের বিস্তার ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

এখানে,
$v_1 = 4 \text{ ms}^{-1}$
$x_1 = 5\text{m}$
$v_2 = 5 \text{ ms}^{-1}$
$x_2 = 4\text{m}$

আমরা জানি, বেগ,

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$\therefore \quad v_1 = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$ এবং $v^2 = \omega\sqrt{A^2 - x_2^2}$

বা, $4 = \omega\sqrt{A^2 - (5)^2}$ ... ... (i)

এবং $5 = \omega\sqrt{A^2 - (4)^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i)-কে (ii) ভাগ করে পাই,

$$\frac{4}{5} = \frac{\sqrt{A^2 - (5)^2}}{\sqrt{A^2 - (4)^2}} \text{ বা, } \frac{16}{25} = \frac{A^2 - 25}{A^2 - 16}$$

বা, $16A^2 - 16 \times 16 = 25A^2 - 25 \times 25$

বা, $25A^2 - 16A^2 = 25 \times 25 - 16 \times 16$

বা, $9A^2 = 625 - 256 = 369$

$$\therefore \quad A = \sqrt{\frac{369}{9}} = 6·4 \text{ m}$$

৩। একটি বস্তুকণা সরল ছন্দিত স্পন্দনে দুলছে যার গতির সমীকরণ $x = 10 \cos (6\pi t + \pi/3)$ মিটার। $t = 3$ সেকেন্ড সময় পরে বস্তুটির সরণ, বেগ ও ত্বরণ কত হবে ? [রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); KUET Admission Test, 2006-07 (মান ভিন্ন)]

এখানে,
সরণ, $x = 10 \cos (6\pi t + \pi/3)$
3 সেকেন্ড পরে, $x = 10 \cos (6\pi \times 3 + \pi/3) = 10 \cos (18\pi + \pi/3)$
$= 10 \cos \pi/3 = 10 \times \frac{1}{2} = 5\text{m}$

বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{10\cos(6\pi t + \pi/3)\} = -60\pi\sin(6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $v = -60\pi\sin(6\pi \times 3 + \pi/3)$

$= -60\pi\sin(18\pi + \pi/3)$

$= -60\pi\sin\pi/3 = -60 \times 3.14 \times 0.866$

$= -163.15\ ms^{-1}$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\{-60\pi\sin(6\pi t + \pi/3) = -360\pi^2\cos(6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $a = -360\pi^2\cos(6\pi \times 3 + \pi/3)$

$= -360\pi^2\cos(18\pi + \pi/3)$

$= -360\pi^2\cos\pi/3 = -360 \times 9.87 \times \frac{1}{2}$

$= -1776.6\ ms^{-2}$

৪। কোনো স্প্রিং-এর এক প্রান্তে 50 g ভরের একটি বস্তু সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হয়। বস্তুর গতিপথের বিস্তার 10 cm এবং পর্যায়কাল 1 s। কৌণিক কম্পাঙ্ক, কম্পাঙ্ক এবং স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

কৌণিক কম্পাঙ্ক,

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3.14}{1} = 6.28\ rad\ s^{-1}$

কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1\ Hz$

স্প্রিং ধ্রুবক, $k = \omega^2 m \quad \left(\because \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

$= (6.28)^2 \times 0.05 = 1.972\ Nm^{-1}$

এখানে,
ভর, $m = 50\ g = 0.05\ kg$
বিস্তার, $A = 10\ cm = 0.10\ m$
পর্যায়কাল, $T = 1\ s$
কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = ?$
কম্পাঙ্ক, $n = ?$
স্প্রিং ধ্রুবক, $k = ?$

৫। একটি স্প্রিং-এর এক প্রান্তে 40 gm ভরের একটি বস্তু সরল ছন্দিত স্পন্দনে আন্দোলিত হবার সময় বস্তুটি তার সাম্যাবস্থা থেকে সর্বাধিক 12 cm দূরে সরে যাচ্ছে এবং বস্তুটির পর্যায়কাল 1.5 sec। স্প্রিং ধ্রুবক এবং সাম্যাবস্থা থেকে 6 cm দূরের অবস্থানে বস্তুটির দ্রুতি কত ?

আমরা জানি,

$K = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{0.04 \times 9.8}{0.12}$

$= 3.27\ Nm^{-1}$

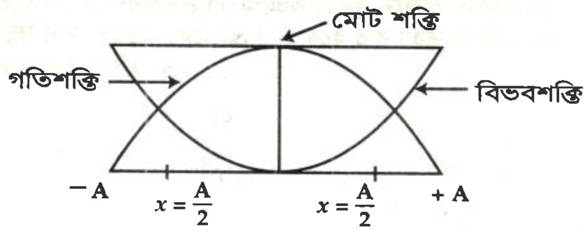
আবার, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.5}\ rad\ s^{-1}$

$\therefore\ v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{2\pi}{1.5}\sqrt{(0.12)^2 - (0.06)^2}$

$= 0.435\ ms^{-1}$

এখানে,
$m = 40\ g = 0.04\ kg$
$A = 12\ cm = 0.12\ m$
$x = 6\ cm = 0.06\ m$
$T = 1.5\ s$
$v = ?$
$K = ?$

৬। চিত্রে সরল ছন্দিত গতিতে স্পন্দনরত 1 kg ভরের বস্তুর শক্তি বনাম সরণ লেখচিত্র দেখান হয়েছে। বস্তুর বিস্তার 0.01 m এবং কম্পাঙ্ক 12 Hz। $x = \frac{A}{2}$ অবস্থানে বস্তুর বেগ নির্ণয় কর।



আমরা জানি, বস্তুর বেগ,

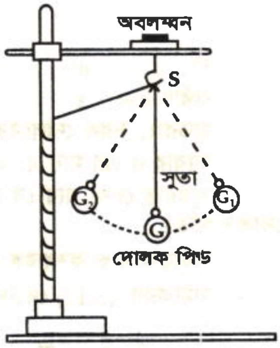
$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$= 2\pi n\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$= 2 \times 3{\cdot}14 \times 12\sqrt{(0{\cdot}01)^2 - (0{\cdot}005)^2}$$
$$= 0{\cdot}65\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,
$A = 0{\cdot}01$ m
$n = 12$ Hz
$x = \frac{A}{2} = \frac{0{\cdot}01}{2} = 0{\cdot}005$ m
$v = ?$

৮·৭ সরল দোলন গতি
Simple harmonic motion

সরল দোলন গতির আলোচনা পদার্থবিজ্ঞানে একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় বিপরীত দিকে চলে তবে ওই বস্তুর গতিকে দোলন গতি বা স্পন্দন বলে। এই গতির একটি বিশেষ রূপ হলো সরল দোলন গতি। যেকোনো জটিল দোলন গতিকে অনেকগুলো সরল দোলন গতির সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

তোমরা সরল দোলক দেখেছ, এটিকে দুলতে দিলে এদিক ওদিক দোলে [চিত্র ৮·৭]। লক্ষ করলে দেখবে যে, ববকে ধরে যেকোনো একদিকে টেনে ছেড়ে দিলে তা আবার বিপরীত দিকে অর্থাৎ স্থির অবস্থায় বা যে অবস্থানে ছিল সেই দিকে চলে আসে। এ ধরনের গতিসম্পন্ন দোলকের গতি সরল দোলন গতি। সরল দোলকের কৌণিক বিস্তার 4°-এর মধ্যে রাখতে হয়। কৌণিক বিস্তার 4°-এর বেশি হলে সরল দোলকের গতি সরলরৈখিক না হয়ে বৃত্তাকার হয়। ফলে সরল দোলক সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্য মেনে চলে না। সেক্ষেত্রে $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ সমীকরণ প্রযোজ্য হয় না।



চিত্র ৮.৭

MAT(20-21)

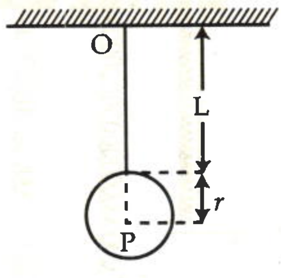
সংজ্ঞা : কোনো পর্যায়গতিসম্পন্ন বস্তুর ওপর কার্যরত ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে, তার মান ওই বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল দোলন গতি বলে।

উদাহরণ : খুব কম বিস্তারের সরল দোলকের গতি, স্প্রিং-এর উল্লম্ব ও অনুভূমিক কম্পন, U-নলে রাখা তরলের দোলন, গাড়ির ইঞ্জিনের পিস্টনের গতি ইত্যাদি। নিম্নে সরল দোল গতির কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা হলো।

৮·৮ সরল দোল গতির কয়েকটি উদাহরণ
A few examples of simple harmonic motion

(i) সরল দোলকের গতি (Motion of a simple pendulum)

একটি হাল্কা অপ্রসারণশীল (inextensible) সুতার সাহায্যে কোনো ভারি বিন্দু বস্তুকে (point mass) ঝুলালে একটি সরল দোলক পাওয়া যায়। কিন্তু বাস্তবে বিন্দু বস্তুর কোনো অস্তিত্ব নেই। কেননা আয়তন শূন্য কিন্তু ভর আছে এমন বস্তু পাওয়া যায় না, তবে সকল বস্তুর ভর ওর ভরকেন্দ্রে আছে ধরে নিলে ভরকেন্দ্রটিকে বিন্দু বস্তু হিসেবে কল্পনা করা যায়। সুতরাং একটি ভারি ধাতব গোলককে হাল্কা অপ্রসারণশীল সুতার সাহায্যে ঝুলালে একটি সরল দোলক তৈরি হতে পারে। সেক্ষেত্রে গোলকটি ওর কেন্দ্রবিন্দু থেকে ঝুলানো আছে ধরতে হবে [চিত্র ৮·৮]।



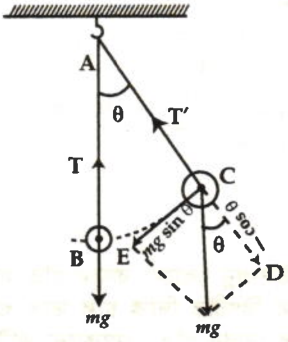
চিত্র ৮.৮ : সরল দোলক

গোলকটিকে সরল দোলকের **পিন্ড বা বব** (bob) বলে। O বিন্দু হলো **ঝুলন বিন্দু** (point of suspension), OP দৈর্ঘ্যকে সরল দোলকের **কার্যকর দৈর্ঘ্য** (effective length) বলে। সুতার জ্যামিতিক দৈর্ঘ্য L এবং ববের ব্যাসার্ধ r হলে কার্যকর দৈর্ঘ্য $l = (L + r)$। অবস্থান OP-কে সরল দোলকের স্থির অবস্থান বা সাম্যাবস্থান (equilibrium position) বলে।

এবার পিন্ড বা ববটিকে সাম্যাবস্থান P থেকে কিছুটা সরিয়ে B বিন্দু থেকে ছেড়ে দিলে সেটি BPC এবং CPB বৃত্তচাপ (arc) বরাবর দুলতে থাকে [চিত্র ৮·৯]। অর্থাৎ দোলকটির অবস্থান OB থেকে OC পর্যন্ত পর্যায়ক্রমে পরিবর্তিত হয়। দোলকের এই এদিক-ওদিক (to and fro) দোলায়মান গতিই হলো পর্যাবৃত্ত গতি। এই গতি সরল দোল গতি—তা নিম্নে প্রমাণ করা যায়।

(i) সরল দোলকের গতি সরল দোল গতি (Motion of a simple pendulum is simple harmonic motion):

সরল দোলকের পিন্ড বা ববকে সামান্য টেনে (এই কৌণিক বিস্তার 4°-এর মধ্যে হতে হবে) ছেড়ে দিলে দোলকটি B থেকে C এবং পুনরায় C থেকে B পর্যন্ত একইভাবে যাতায়াত করতে থাকবে। ববটির ভর m হলে B বিন্দুতে



চিত্র ৮.৯

এর ওজন mg খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ৮˙৯]। mg–এর একটি উপাংশ $mg\cos\theta$ সুতার দৈর্ঘ্য বরাবর ক্রিয়াশীল হয়ে সুতার টান সৃষ্টি করে এবং অভিলম্ব উপাংশ $mg\sin\theta$ প্রত্যায়নক বল হিসেবে ক্রিয়া করে ববটিকে পূর্বের অবস্থানে ফিরিয়ে নিতে সচেষ্ট হয়। সুতরাং, এক্ষেত্রে প্রত্যায়ক বল $F = -mg\sin\theta = mg\,\theta$ [θ-এর মান কম হলে $\sin\theta \simeq \theta$ রেডিয়ান ধরা যায়]। এখানে ঋণাত্মক চিহ্ন নির্দেশ করে প্রত্যায়নক বল সরণের বিপরীতমুখী।

আবার, কার্যকরী বলের জন্য ত্বরণ a হলে, $F = ma$

$$\therefore \quad ma = -mg\sin\theta = -g \times \frac{BC}{AC}$$

$$a = -g\sin\theta = ma = \frac{-mg\,x}{l}$$

এখানে, x ববের রৈখিক সরণ এবং l দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য।

বা, $a = -\frac{gx}{l}$ । কিন্তু নির্দিষ্ট স্থানে নির্দিষ্ট দোলকের জন্য $\frac{g}{l}$ একটি ধ্রুবক। একে ω^2 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বা, $a = -\omega^2 x$, এখানে, $\omega^2 = \frac{g}{l}$ ... ... (8.17)

অর্থাৎ $a \propto -x$

সুতরাং, সরল দোলকের **গতি সরল দোল গতি।**

আবার θ এর মান 4°-এর কম হলে $\sin\theta \simeq \theta$ ধরা হয়। সেক্ষেত্রে সরল দোলকের গতিপথ **সরল রৈখিক** হয়। সুতরাঙ দেখা যায় যে সরল দোলক সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্য মেনে চলে। কাজেই সরল দোলকের **গতি সরল দোলন গতি।**

পর্যায়কাল ও কম্পাঙ্ক (Time period and frequency) :

সমীকরণ (8.17) থেকে পাই,

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad \text{বা, } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

বা, $2\pi n = \sqrt{\frac{g}{l}}$ বা, $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$; এটি কম্পাঙ্কের রাশিমালা।

আবার, পর্যায়কাল, $T = \frac{1}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

(ii) উল্লম্ব স্প্রিং–এর দোলন (Oscillation of a vertical spring)

স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনে আটকিয়ে অপর প্রান্তে একটি ভর ঝুলিয়ে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে তা ওপর-নিচে সরল দোলন গতিতে স্পন্দিত হতে থাকে। ৮˙১০ (ক) চিত্রে ভর ঝুলানোর পূর্বে স্প্রিংটির অবস্থা দেখানো হয়েছে। এ অবস্থায় স্প্রিংটির মুক্ত প্রান্ত P অবস্থানে ছিল। স্প্রিংটির মুক্ত প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু ঝুলানোর ফলে এর দৈর্ঘ্য e পরিমাণ প্রসারিত হয়ে Q বিন্দুতে এসে স্থির হয় চিত্র ৮˙১০(খ)। এমতাবস্থায় স্প্রিং দ্বারা ঊর্ধ্বমুখী বল F বস্তুর ওজনের সমান হয় এবং বস্তুর ওজন স্প্রিং-এর প্রত্যায়নক বল F_0 দ্বারা প্রশমিত হয়।

সুতরাং $F_0 = -mg$

স্প্রিংটি স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে টানা হলে,

$$F_0 = -Ke$$

$$\therefore \quad mg = Ke$$

এখন m ভরটিকে টেনে ছেড়ে দিলে ভরটি Q-কে সাম্যাবস্থানে রেখে A বিস্তারে স্পন্দিত হতে থাকবে। ধরা যাক t সময়ে স্থির অবস্থান হতে x সরণ প্রাপ্ত হবে। এই অবস্থায় স্প্রিংটির প্রত্যায়নক বল, $F_1 = -K(x+e)$ [চিত্র ৮˙১০(গ)]।

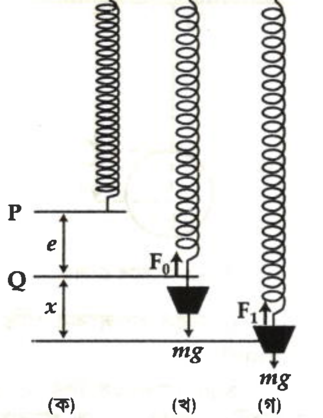
সুতরাং ভরটির ওপর নিট বল,
$$\begin{aligned} F &= F_1 + mg \\ &= -Kx - Ke + mg \\ &= -Kx - Ke + Ke \\ &= -Kx \end{aligned}$$

এই বলের ক্রিয়ায় m ভরের বস্তুটি a ত্বরণ প্রাপ্ত হলে,

$$ma = -Kx$$

বা, $a = \frac{-K}{m}x$ [∵ K, m ধ্রুবক]

$$\therefore \quad a \propto -x$$



চিত্র ৮˙১০

অর্থাৎ **ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী।** এটি সরল ছন্দিত গতির একটি শর্ত। সুতরাং স্প্রিং-এর গতি সরল ছন্দিত গতি।

ঝুলন্ত ভর m-এর গতির জন্য নিম্নলিখিত শর্ত সাপেক্ষে সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি হবে—

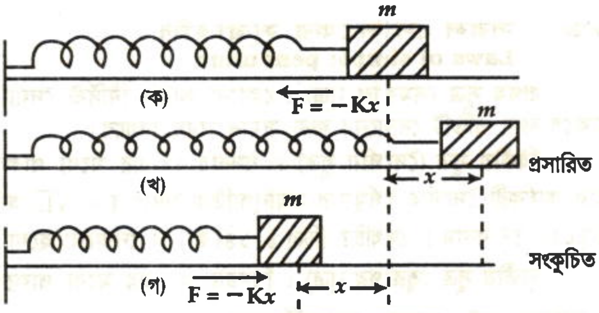
(১) স্প্রিং-এর ভর উপেক্ষণীয় হতে হবে।

(২) স্প্রিংটিকে তার স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে রেখে দোল দিতে হবে।

(৩) স্প্রিং-এর বিস্তার x_0 কণাটির সাম্যাবস্থায় প্রসারণ e এর চেয়ে কম হতে হবে। অর্থাৎ $x_0 < e$ হতে হবে।

(iii) অনুভূমিক স্প্রিং-এর দোলন (Oscillation of a horizontal spring) :

ধরা যাক, নগণ্য ভরের একটি স্থিতিস্থাপক স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দৃঢ় খাড়া অবলম্বনের সাথে যুক্ত এবং অপর প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু যুক্ত করা হয়েছে [চিত্র ৮·১১(ক)]। এটি একটি মসৃণ অনুভূমিক তলের ওপর রয়েছে। এবার বস্তুটিকে ডানদিকে সরালে স্প্রিংটি প্রসারিত হয় এবং বস্তুর ওপর বামদিকে প্রত্যায়নক বল $\vec{F}$ ক্রিয়াশীল হয় [চিত্র ৮·১১(খ)] কিন্তু বস্তুটিকে বামদিকে সরালে স্প্রিংটি সংকুচিত হয় এবং বস্তুর ওপর ডানদিকে প্রত্যায়নক বল $\vec{F}$ কাজ করে [চিত্র ৮·১১(গ)]।



চিত্র ৮·১১ : অনুভূমিক স্প্রিং-এর সংশ্লিষ্ট দোলন।

এখন স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক K এবং বস্তুর সরণ x হলে, $F = -Kx$

এবং বস্তুর ত্বরণ, $a = \frac{F}{m} = -\frac{Kx}{m} = -\omega^2 x$

অতএব, $a \propto x$ অর্থাৎ **ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী** যা সরল দোলকের শর্ত। সুতরাং স্প্রিং-এ যুক্ত বস্তুর গতি সরল দোলগতি। এই স্পন্দনের দোলনকাল,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.18)$$

[বি. দ্র. স্প্রিং-এর উল্লম্ব এবং অনুভূমিক স্পন্দনের দোলনকাল সমান হবে।]

আলোচনা : ওপরে বর্ণিত স্প্রিং-এর উল্লম্ব বা অনুভূমিকভাবে দোলনের ক্ষেত্রে স্প্রিং-এর ভর নগণ্য বিবেচনা করা হয়েছে।

(i) এখন যদি স্প্রিং-এর ভর M এবং স্প্রিং-এর প্রান্তে সংযুক্ত ভর m হয়, তবে স্প্রিং দোলকের দোলনকাল হবে, $T' = 2\pi\sqrt{m + (M/3)}$

(ii) m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তুকে K বল ধ্রুবক বা স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট একটি স্প্রিং দ্বারা যুক্ত করে ওদেরকে অনুভূমিক মসৃণ তলে টেনে ছেড়ে দিলে যে দোলন সৃষ্টি হবে তার দোলনকাল হবে,

চিত্র ৮·১২

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{K_s}},$$

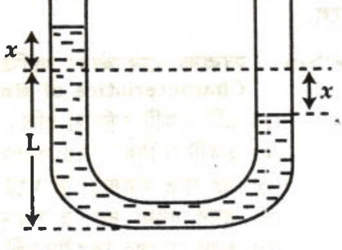
এখানে $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, μ হলো পরিমিত ভর (reduced mass)

(iv) U-নলে রাখা তরলের দোলন (Oscillation of a liquid in a U-tube) :

ধরা যাক, U–নলের প্রতি বাহুতে তরলস্তম্ভের উচ্চতা = L। সুতরাং তরলস্তম্ভের মোট দৈর্ঘ্য = 2L। এখন, নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A এবং তরলের ঘনত্ব ρ হলে তরলের ভর পাই,

$$m = 2LA\rho$$

U-নলে ফুঁ দিয়ে বা অন্য কোনো উপায়ে একটি বাহুর তরলকে x উচ্চতা নামানো হলে এবং অন্য বাহুতে তরল x উচ্চতা ওঠানো হলে দুই বাহুতে উচ্চতার পার্থক্য হবে $2x$। সুতরাং চাপের পার্থক্য হবে $2x\rho g$। অতএব ঘাতের পার্থক্য হবে $= 2x\rho gA$ ($\because$ ঘাত = চাপ × ক্ষেত্রফল)



চিত্র ৮·১৩

দুই বাহুতে তরলের ঘাতের এই পার্থক্য তরলস্তম্ভকে সাম্যাবস্থানে ফিরিয়ে আনতে চেষ্টা করবে অর্থাৎ প্রত্যায়নক বল হিসেবে কাজ করবে। এই প্রত্যায়নক বল x–সরণের বিপরীতে ক্রিয়া করে। অতএব, প্রত্যায়নক বল $= -2x\rho gA$।

এই বলের জন্য তরল তলের ত্বরণ a হলে আমরা পাই,

$$ma = -2x\rho gA$$

বা, $2L\rho Aa = -2x\rho gA$

বা, $a = -\frac{g}{L}x = -\omega^2 x$ $\left[\because \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\right]$

যেহেতু তরল তলের গতি, $a = -\omega^2 x$ সমীকরণ মেনে চলে। সুতরাং U-নলে তরল তলের গতি সরল দোল গতি।

এই গতির পর্যায়কাল,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

৮·৯ সরল দোলকের সূত্রাবলি
Laws of simple pendulum

RMDAC

প্রথম সূত্র (সমকাল সূত্র) : কোনো স্থানে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের বিস্তার 4° এর মধ্যে থাকলে তার প্রতিটি দোলনের জন্য সমান সময় লাগবে।

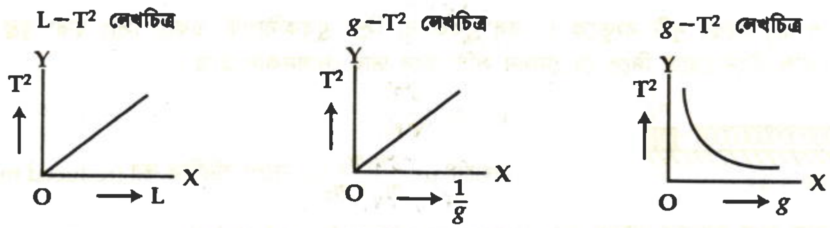
দ্বিতীয় সূত্র (দৈর্ঘ্যের সূত্র) : বিস্তার 4°-এর মধ্যে থাকলে কোনো নির্দিষ্ট স্থানে সরল দোলকের দোলনকাল তার কার্যকরী দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সমানুপাতিক অর্থাৎ $T \propto \sqrt{L}$ অর্থাৎ কার্যকরী দৈর্ঘ্য 4 গুণ বাড়ালে দোলনকাল 2 গুণ বাড়বে। T^2 বনাম L লেখচিত্র [চিত্র ৮·১৪(ক)]-এ দেখানো হলো। MAT(15-16,21-22) DAT(18-19)

তৃতীয় সূত্র (ত্বরণের সূত্র) : বিস্তার 4°-এর মধ্যে থাকলে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোনো একটি সরল দোলকের দোলনকাল ওই স্থানের অভিকর্ষীয় ত্বরণের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। এই সূত্র অনুযায়ী $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ বা $T^2 \propto \frac{1}{g}$ বা $T^2 =$ ধ্রুবক $\times \frac{1}{g}$। এই সম্পর্ক g—T^2 লেখচিত্র [চিত্র ৮·১৪(খ) ও ৮·১৪(গ)]-এ দেখান হলো।

চতুর্থ সূত্র (ভরের সূত্র) : বিস্তার 4°-এর মধ্যে এবং কার্যকরী দৈর্ঘ্য স্থির থাকলে কোনো স্থানে সরল দোলকের দোলনকাল দোলক পিণ্ডের ভর, আকৃতি, উপাদানের ওপর নির্ভর করে না।

সরল দোলকের সূত্রগুলোকে একত্রে $\cancel{T \propto \frac{L}{\sqrt{g}}}$ বা, $\cancel{T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}}$ আকারে লেখা যায়। **ইহাই সরল দোলকের সূত্র।**

এই সূত্র অনুযায়ী $T \propto \sqrt{L}$ বা $T^2 \propto L$ বা $T^2 =$ ধ্রুবক $\times L$, L—T^2 লেখচিত্রটি দেখান হলো [চিত্র ৮·১৪(ক)]।



(ক) (খ) (গ)

চিত্র ৮·১৪

স্বল্প বিস্তারে দোলায়মান সরল দোলকের গতি সরল দোলন বা দোল গতি। এটি নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলো মেনে চলে।

৮·১০ সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্য
Characteristics of simple harmonic motion

(১) এটি একটি পর্যাবৃত্ত গতি।
(২) একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর এই গতি বিপরীতমুখী হয়।
(৩) এর গতি সরলরেখায় ঘটে।
(৪) ত্বরণ সর্বদা সরণের সমানুপাতিক।
(৫) ত্বরণ সরণের বিপরীতমুখী।
(৬) ত্বরণ বস্তু কণাটির মধ্য বা সাম্য অবস্থান অভিমুখী।

(৭) সরল গতিসম্পন্ন কণা বা বস্তু যেই মুহূর্তে সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে সেই মুহূর্তে গতিবেগ সর্বোচ্চ হয়। সরণের শেষ প্রান্তে বেগ মুহূর্তের জন্য শূন্য হয়। MAT(24-25)

(৮) সরল দোলনগতির পর্যায়কাল তার বিস্তারের ওপর নির্ভরশীল নয়।

(৯) গতিপথের মধ্য অবস্থানে বেগ সর্বাধিক, সরণ সর্বনিম্ন।

নিজে কর : দোলনরত দোলক কোনো শব্দ উৎপন্ন করে না কেন ? কী ধরনের তরঙ্গ তা উৎপন্ন করে?

কোনো শব্দ শ্রুতিগোচর হতে গেলে শব্দ তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 20 থেকে 20,000/sec (Hz) হতে হয়। সাধারণত দোলকের কম্পাঙ্ক অনেক কম হয়। যেমন সেকেন্ড দোলকের কম্পাঙ্ক 0·5/sec যা শ্রুতিগোচর শব্দের কম্পাঙ্কের চেয়ে খুব সামান্য, যে কারণে দোলকের কম্পনের শব্দ শোনা যায় না।

হিসাব কর : কোনো একটি দৃঢ় স্থান হতে একটি স্প্রিং খাড়াভাবে দোলানো হচ্ছে। এর নিচের প্রান্তে 200 g ভরের একটি বস্তু আটকানো আছে। নিচের দিকে 50 g-wt বল প্রয়োগ করায় বস্তুটি 5 cm নিচে নেমে গেল। এবার ছেড়ে দিলে বস্তুটি ওপর-নিচে সরল দোলন গতি লাভ করবে। দোলনের পর্যায়কাল এবং স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক নির্ণয় কর।

৮·১১ সরল দোলন গতির ব্যবহার
Application of simple harmonic motion

সরল দোলন গতি ব্যবহার করে সরল দোলকের সাহায্যে পর্যায়কাল এবং স্প্রিং স্পন্দনের পর্যায়কাল নির্ণয় করা যায়। এই পর্যায়ে কালের মান থেকে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সরল দোলন গতি ব্যবহার করা যায়। DAT(16-17)

(১) অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান নির্ণয় করা যায়।

(২) পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা যায়।

(৩) সময় নির্ণয় করা যায়।

১. সরল দোলকের সাহায্যে g-এর মান নির্ণয়

মূলতত্ত্ব (Theory) : সরল দোলকের সাহায্যে কোনো স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় করা যায়। এর জন্য ব্যবহৃত সমীকরণটি হলো, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

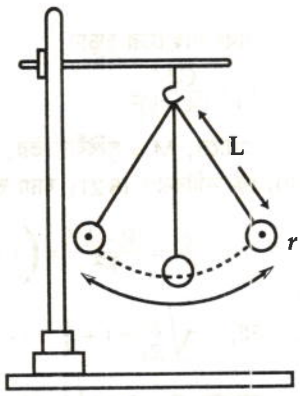
এখানে, T = দোলনকাল, L = কার্যকর দৈর্ঘ্য এবং g = অভিকর্ষজ ত্বরণ।

এখন ওপরের সমীকরণের উভয় পার্শ্বকে বর্গ করে পাই, $T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$

$$\text{বা, } g = 4\pi^2\frac{L}{T^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.19)$$

π একটি ধ্রুব রাশি ও একটি নির্দিষ্ট স্থানে g ধ্রুব। কাজেই ওই স্থানে L/T^2-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে এবং গড় L/T^2-এর মান (8.19) সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যাবে।

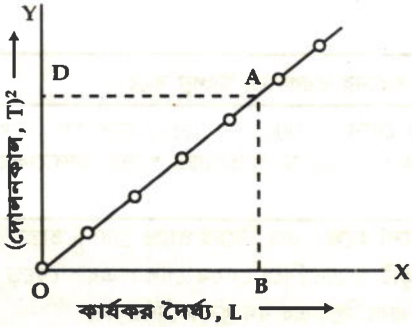
পরীক্ষা : প্রথমে একটি স্ট্যান্ড হতে হুকের সাহায্যে সুতা ঝুলিয়ে সুতার প্রান্তে ববকে আটকে সরল দোলক তৈরি করা হয় [চিত্র ৮·১৫]। এরপর মিটার স্কেলের সাহায্যে একটি সরল দোলকের সুতার দৈর্ঘ্য l এবং স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে দোলকের গোলাকার পিণ্ডের ব্যাস হতে ব্যাসার্ধ r জেনে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L = l + r$ নির্ণয় করা হয়। এরপর পর্যবেক্ষণ স্থানে দোলকটিকে 4° অপেক্ষা কম কৌণিক বিস্তারে দুলতে দিয়ে একটি স্টপ-ওয়াচের সাহায্যে তার 20টি পূর্ণ দোলনের সময় t নির্ণয় করে 20 দ্বারা ভাগ করে দোলন কাল, $T = \frac{t}{20}$ বের করা হয় এবং দোলনকালের বর্গ T^2 নির্ণয় করা হয়। সুতরাং দৈর্ঘ্য l পরিবর্তন করে অনুরূপভাবে বিভিন্ন কার্যকর দৈর্ঘ্যে দোলকের দোলনকাল নির্ণয় করা হয় এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে দোলনকালের বর্গ বের করা হয়।



চিত্র ৮·১৫

হিসাব : প্রাপ্ত ফলাফল হতে প্রত্যেক ক্ষেত্রে $\frac{L}{T^2}$ নির্ণয় করে গড় $\frac{L}{T^2}$-এর মান সমীকরণ (8.19)-এ বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যায়, কেননা $4\pi^2$ একটি ধ্রুব রাশি যার মান জানা আছে।

বিকল্প পদ্ধতি : একটি ছক কাগজের অনুভূমিক, X অক্ষে কার্যকর দৈর্ঘ্য L এবং উল্লম্ব, Y অক্ষে দোলন কালের বর্গ, T^2 নির্দেশ করে L—T^2 লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। অঙ্কনে L—T^2 লেখচিত্রটি মূলবিন্দু O-গামী একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ৮·১৬]। এই সরলরেখার যে কোনো বিন্দু A হতে X-অক্ষের ওপর AB এবং Y-অক্ষের ওপর AD লম্ব টেনে অঙ্কন অনুসারে AB ও AD-এর অর্থাৎ T^2 ও L-এর মান বের করা হয়। এখন L ও T^2-এর মান ওপরের সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যায়।



চিত্র ৮·১৬

$$\text{এখানে, } g = 4\pi^2 \frac{AD}{AB} = 4\pi^2 \frac{OB}{AB} = 4\pi^2 \cot \angle BOA$$

সতর্কতা :

(১) বিস্তার অবশ্যই 4°-এর মধ্যে হওয়া উচিত।

(২) পিণ্ডের ব্যাস বেশ কয়েকবার নির্ধারণ করে তাদের গড় নেয়া উচিত।

(৩) T-এর মান নির্ভুল হওয়া উচিত এবং এর জন্য অধিক সংখ্যক পূর্ণ দোলনে ব্যয় হওয়া সময় নির্ণয় করা উচিত।

(৪) পিণ্ডটির উল্লম্ব তলে পাক খেতে না দিয়ে মুক্তভাবে দুলবার ব্যবস্থা করা উচিত।

২. পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয়

সরল দোলকের সাহায্যে কোনো পাহাড়ের উচ্চতা অর্থাৎ ভূপৃষ্ঠ হতে পাহাড়ের চূড়া বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করা যায় [চিত্র ৮·১৭]। প্রথমে পাহাড়ের পাদদেশে অর্থাৎ ভূপৃষ্ঠে সরল দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পূর্বের নিয়মে নির্ণয় করা হয়। মনে করি এই মান g

এরপর পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান অনুরূপভাবে নির্ণয় করা যায়।

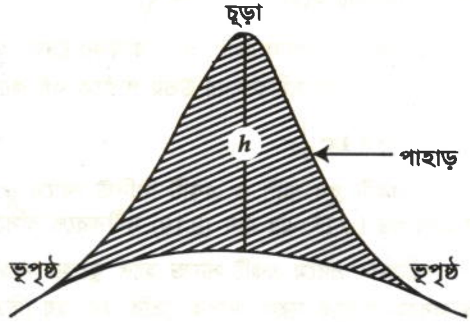
ধরি এই মান = g_1

হিসাব ও গণনা : নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রানুসারে পাহাড়ের পাদদেশে,

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.20)$$

এবং পাহাড়ের চূড়ায়,

$$g_1 = \frac{GM}{(R+h)^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.21)$$



চিত্র ৮·১৭

এখানে, M = পৃথিবীর ভর, G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং h = পাহাড়ের উচ্চতা। সমীকরণ (8.20)-কে সমীকরণ (8.21) দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{g}{g_1} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$$

$$\text{বা, } \sqrt{\frac{g}{g_1}} = 1 + \frac{h}{R} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.22)$$

আবার, $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ এবং $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}$; এখানে T এবং T_1 হলো যথাক্রমে পাহাড়ের পাদদেশ এবং চূড়ায় সরল দোলকের পর্যায়কাল।

$$\therefore \quad \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.23)$$

সমীকরণ (8.22) ও (8.23) থেকে পাই,

$$1 + \frac{h}{R} = \frac{T_1}{T}$$

বা, $\frac{h}{R} = \frac{T_1}{T} - 1$

বা, $$h = \left[\frac{T_1}{T} - 1\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.24)$$

R-এর মান জানা থাকলে T ও T_1 এর মান নির্ণয় করে সমীকরণ (8.24) থেকে h এর মান নির্ণয় করা যায়।

৩. সময় নির্ণয়

দোলক ঘড়িতে দোলকের সাহায্যে সময় মাপা হয়। এসব দোলক সাধারণত ধাতুর দ্বারা নির্মিত। শীতকালে তারের দৈর্ঘ্য কমে যায় এবং গ্রীষ্মকালে দৈর্ঘ্য বেড়ে যায়। সুতরাং শীতকালে ঘড়ির দোলনকাল কমে যায় এবং ঘড়ি দ্রুত
DAT(16-17)
চলে। গ্রীষ্মকালে ঘড়ির দোলনকাল বেড়ে যায় এবং ঘড়ি ধীরে চলে। সাধারণ দোলক ঘড়ির পিন্ডের নিচের একটি স্ক্রুকে প্রয়োজনমতো ঘুরিয়ে পিন্ডকে উঠা-নামা করিয়ে দোলনকাল নিয়ন্ত্রণ করা হয়। আবার গ্রীষ্মকালে দোলক ঘড়ি ধীরে চলে এর কারণ হলো, গ্রীষ্মকালে দোলক ঘড়ির কার্যকর দৈর্ঘ্য বেড়ে যায় বলে দোলনকাল বৃদ্ধি পায় এবং দোলনকাল বৃদ্ধির কারণেই গ্রীষ্মকালে দোলন ঘড়ি ধীরে চলে। সরল দোলকের দোলনকালের সমীকরণ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ অনুসারে L-এর মান বৃদ্ধি পেলে T-এর মান বৃদ্ধি পায় কারণ কোনো নির্দিষ্ট স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ (g) নির্দিষ্ট। তাই গ্রীষ্মকালে দোলনকাল বেড়ে যায় বলে দোলক ঘড়ি ধীরে চলে।

মাটির নিচে বা উঁচু পাহাড়ের ওপর g-এর মান কম। কাজেই উঁচু পাহাড়ে বা মাটির নিচে দোলকের দোলনকাল বেশি হয়। এর অর্থ ঘড়ি ধীরে চলে। বিষুব অঞ্চলে g-এর মান কম এবং মেরু অঞ্চলে g-এর মান বেশি। অতএব একটি দোলক ঘড়িকে বিষুব অঞ্চল হতে মেরু অঞ্চলে নিলে ঘড়িটি দ্রুত চলে।

দোলনকালের হিসাব :

আমরা জানি, 1 দিন = 86400 সেকেন্ড

সুতরাং সঠিক সময় নির্দেশকারী একটি দোলক ঘড়ি দিনে 86400টি অর্ধ দোলন দেয়। দোলক ঘড়ি ধীরে বা দ্রুত চললে দোলনকালের হিসাব নিম্নরূপ হবে—

(i) ধীরে চলার ক্ষেত্রে : মনে করি একটি দোলক ঘড়ি দিনে n সেকেন্ড ধীরে চলে।

∴ দোলকটি $(86400 - n)$ টি অর্ধ দোলন দেয় = 86400 সেকেন্ডে

" 1 টি " " $= \frac{86400}{86400 - n}$ সেকেন্ডে

" 2 টি " " $= \frac{2 \times 86400}{86400 - n}$ সেকেন্ডে

∴ দিনে n সেকেন্ড ধীরে চললে দোলনকাল হবে $\frac{2 \times 86400}{86400 - n}$ সেকেন্ড।

(ii) দ্রুত চলার ক্ষেত্রে : দোলক ঘড়ি দিনে n সেকেন্ড দ্রুত চললে,

∴ দোলকটি $(86400 + n)$ টি অর্ধ দোলন দেয় = 86400 সেকেন্ডে

" 1 টি " " $= \frac{86400}{86400 + n}$ সেকেন্ডে

" 2 টি " " $= \frac{2 \times 86400}{86400 + n}$ সেকেন্ডে

∴ দিনে n সেকেন্ড দ্রুত চললে দোলনকাল হবে $\frac{2 \times 86400}{86400 + n}$ সেকেন্ড।

RMDAC

৮·১২ দোলক ঘড়ি দ্রুত (Fast) বা ধীরে (slow) যাওয়া
Fast or slow motion of pendulum clock

দোলক ঘড়ি এক ধরনের সরল দোলক যার দোলনকাল 2 সেকেন্ড এবং অর্ধ দোলনকাল 1 সেকেন্ড। অর্থাৎ এটি একটি সেকেন্ড দোলক।

একটি দোলক ঘড়ি এর দোলনকাল দ্বারা সময় নির্দেশ করে। দোলনকালের সমীকরণ, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$। এখানে L দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য এবং g অভিকর্ষজ ত্বরণ। ওই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে (ক) L-এর পরিবর্তন হলে বা (খ) g-এর মান পরিবর্তিত হলে সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল, $T = 2$ s না হয়ে কম বা বেশি হয়। দোলনকাল বেশি হওয়ার অর্থ হলো যে দোলকটি ধীর গতিতে দোলে। অর্থাৎ ঘড়ি স্লো বা ধীরে যায়। আবার, দোলনকাল কমে গেলে ঘড়ি ফাস্ট বা দ্রুত হয়।

জানার বিষয় : একটি সরল দোলককে লিফটের মধ্যে ঝুলালে—

(ক) লিফট যদি 'a' ত্বরণসহ নিচের দিকে নামে তবে দোলনকাল হবে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$

(খ) লিফট যদি 'a' ত্বরণসহ ওপরের দিকে ওঠে তাহলে দোলনকাল হবে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$

(গ) লিফটটি সুষমবেগে ওপরে উঠে বা নিচে নামে তবে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

(ঘ) লিফট অবাধে পড়লে দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-g}} = \infty$; অর্থাৎ দোলকটির গতি অপর্যাবৃত্ত হবে।

৮·১৩ সেকেন্ড দোলক
Second pendulum

DAT(17-18,21-22)
MAT(17-18)

যে সরল দোলকের দোলনকাল 2 সেকেন্ড তাকে সেকেন্ড দোলক বলে। অর্থাৎ সেকেন্ড দোলকের T = 2 সে.।

কোনো একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য L হলে,

$$T = 2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1}{n}$$

অর্থাৎ $2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

বা, $1 = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

বা, $1 = \pi^2\frac{L}{g}$

$$\boxed{\therefore\ L = \frac{g}{\pi^2}} \quad = 0.993 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (8.34)$$

সুতরাং, দেখা যায়, সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণের ওপর নির্ভর করে। সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণের সমানুপাতিক। $\therefore L \propto g$

যাচাই কর : একটি সরল দোলকের ধাতব ফাঁপা পিণ্ডটি পানি দ্বারা পূর্ণ আছে। পিণ্ডের নিচে একটি ছোট ছিদ্র দিয়ে পানি ফোঁটায় ফোঁটায় পড়ে যায়। দেখা গেল দোলকের দোলনকাল প্রথমে বৃদ্ধি পাচ্ছে এবং পরে কমে যাচ্ছে।—ঘটনাটি ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৩

১। 100 cm কার্যকরী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি দোলক প্রতি মিনিটে 30টি দোলন সম্পন্ন করে। পরীক্ষণীয় স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g-এর মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$

$$\therefore g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4 \times 9.87 \times 1}{(2)^2} = 9.87\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, L = 100 cm = 1 m

30টি দোল দিতে সময় লাগে = 1 min = 60 sec

1টি " " " " $= \frac{60}{30} = 2$ sec

$\therefore T = 2$ sec

$g = ?$

২। 1 m কার্যকরী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের ববের ভর 300 g, দোলকটিকে সাম্যাবস্থা থেকে 60° কোণে নিয়ে গিয়ে ছেড়ে দেওয়া হলো। ববটির গতিশক্তি বের কর যখন এটি সাম্যাবস্থা দিয়ে অতিক্রম করে এবং যখন সুতা সাম্যাবস্থার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। [RUET Admission Test, 2015-16]

A অবস্থানে ববটির গতিশক্তি শূন্য $(\because v = 0)$

$\therefore$ A অবস্থানে ববটির মোট শক্তি = বিভব শক্তি $= mgh$

$= 300 \times 10^{-3} \times 9.8 \times \frac{1}{2}$

$= 1.47$ J

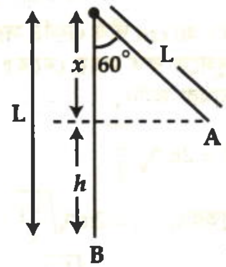
এখানে,

$m = 300 \text{ g} = 300 \times 10^{-3}$ kg

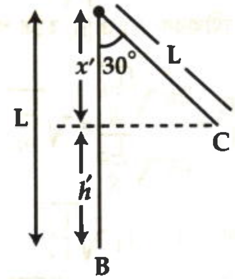
$x = \text{L} \cos 60°$

$h = \text{L} - x = \text{L}(1 - \cos 60°)$

$= 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$



সাম্যাবস্থায়



B অবস্থানে ববের বিভবশক্তি শূন্য

$\therefore$ B অবস্থানে মোট শক্তি = A অবস্থানে মোট শক্তি

$= 1.47$ জুল

এখানে, $h' = \text{L} - x' = \text{L} - \text{L}\cos 30°$

$= \text{L}(1 - \cos 30°) = 0.134$

$\therefore$ C অবস্থানে বিভবশক্তি $= mgh'$

$= 300 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 0.134$

$= 0.4$ J

$\therefore$ C অবস্থানে গতিশক্তি $\text{E}_k = 1.47 - 0.4 = 1.07$ J

৩। একটি সরল দোলকের দোলনকাল 50% বৃদ্ধি করতে এর কার্যকর দৈর্ঘ্য কত গুণ বাড়াতে হবে?

[কু. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৩; মাদরাসা বোর্ড, ২০১৫; CUET Admission Test, 2003-04]

আমরা জানি,

$$\text{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{L}}{g}}$$

বা, $\text{T}^2 = 4\pi^2 \frac{\text{L}}{g}$ ... ... (i)

আবার, $\text{T}_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\text{L}_1}{g}}$

বা, $\text{T}_1^2 = 4\pi^2 \frac{\text{L}_1}{g}$

বা, $\left(\text{T} + \frac{\text{T}}{2}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{\text{L}_1}{g}$

বা, $\left(\frac{3\text{T}}{2}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{\text{L}_1}{g}$

বা, $\text{T}^2 = 4\pi^2 \frac{\text{L}_1}{g} \times \frac{4}{9}$ ... (ii)

এখানে,

আদি দোলনকাল = Ts

শেষ দোলনকাল, $\text{T}_1 = \left(\text{T} + \frac{50}{100}\text{T}\right)$ s

$= \left(\text{T} + \frac{\text{T}}{2}\right)$ s

আদি দৈর্ঘ্য = L

শেষ দৈর্ঘ্য = L_1

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{4\pi^2 L}{g} = \frac{4\pi^2 L_1}{g} \times \frac{4}{9}$$

বা, $\frac{L}{L_1} = \frac{4}{9}$

বা, $L_1 = \frac{9}{4} L = 2.25L$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= 2.25L - L = 1.25L$

$\therefore$ কার্যকর দৈর্ঘ্য 1.25 গুণ বাড়াতে হবে।

৪। 40 cm দীর্ঘ একটি সরল দোলক প্রতি মিনিটে 40 বার দোল দেয়। যদি এর দৈর্ঘ্য 160 cm করা হয় তবে 60 বার দুলতে কত সময় নেবে? [ঢা. বো. ২০০৮]

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

সুতরাং, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$ ... ... (i)

এবং $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

বা, $T_2 = T_1\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

$\therefore$ $T_2 = 1.5 \times \sqrt{\frac{160}{40}} = 1.5 \times 2 = 3$ s

$\therefore$ 60 বার দুলতে সময় লাগে $= T_2 \times 60 = 3 \times 60 = 180$ s $= 3$ min

এখানে,
দৈর্ঘ্য, $L_1 = 40$ cm
দোলন সংখ্যা = 40
$t = 1$ min $= 60$ s
$\therefore$ দোলনকাল, $T_1 = \frac{60}{40} = 1.5$ s
দৈর্ঘ্য, $L_2 = 160$ cm
দোলন সংখ্যা = 60
সময়, $T_2 = ?$

৫। একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য ঢাকায় 100 cm এবং কাঠমুন্ডতে 95 cm। কোনো বস্তুকে কাঠমুন্ড হতে ঢাকায় আনলে এর ওজনের কী পরিবর্তন হবে ? [CUET Admission Test, 2013-14, 2004-05 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

বা, $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

বা, $mg = \frac{4\pi^2 n L}{T^2}$

$\therefore$ $W_D = \frac{4\pi^2 n L_D}{T^2}$ এবং $W_K = \frac{4\pi^2 n L_K}{T^2}$

$\therefore$ $\frac{W_D}{W_K} = \frac{L_D}{L_K} = \frac{1}{0.95} = 1.05$

$\therefore$ $W_D = 1.05\, W_K$

ওজনের পরিবর্তন,

$$\Delta W_z = W_D - W_K = 1.05\, W_K - W_K = 0.05\, W_K$$
$$= 0.05 \times 100\%\, W_K = 5\%\, W_K$$

অর্থাৎ ওজন 5% বাড়বে।

৬। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য অপরটির 4 গুণ। দ্বিতীয় সরল দোলকের দোলনকাল 4 sec হলে প্রথম দোলকটির দোলনকাল কত ? [Admission Test : KUET 2006-07 (মান ভিন্ন); DU (HEC) 2020-21 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি প্রথম দোলকের জন্য,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

২য় দোলকের জন্য,

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

বা, $T_1 = T_2\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = 4\times\sqrt{\frac{4L_2}{L_2}} = 8\text{ sec}$

এখানে,
$L_1 = 4\,L_2$
$T_2 = 4\text{ sec}$
$T_1 = ?$

৭। যদি কোনো স্থানে একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 1 m হয়, তবে যে দোলক সেই স্থানে প্রতি মিনিটে 20 বার দোল দেয়, তার দৈর্ঘ্য বের কর। [RUET Admission Test, 2010-11]

আমরা জানি,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$$

এবং $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$

$$\therefore \quad \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$\therefore \quad L_2 = L_1\times\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 1\times\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\text{m}$$

এখানে,
$t = 1\text{ min} = 60\text{ s}$
$T_2 = \frac{60}{20} = 3\text{ s}$
$T_1 = 2\text{ s}$

৮। একটি উপগ্রহের ভর ও ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। পৃথিবীর একটি সেকেন্ড দোলকের ওই উপগ্রহে পর্যায়কাল কত হবে? [BUET Admission Test, 1997-98(মান ভিন্ন)]

ধরা যাক, পৃথিবী পৃষ্ঠে এবং ওই উপগ্রহের পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g এবং g'

এখন পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হলে, আমরা পাই,

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার প্রশ্নানুযায়ী, উপগ্রহটির ভর $M' = 2\,M$ এবং ব্যাসার্ধ $R' = 2R$

$$\therefore \quad g' = G\frac{M'}{R'^2} = G\frac{2M}{(2R)^2} = \frac{GM}{2R^2} = \frac{g}{2}$$

সুতরাং, l দৈর্ঘ্যসম্পন্ন দোলকটির পৃথিবী পৃষ্ঠে এবং ওই উপগ্রহের পৃষ্ঠে দোলনকাল ধরি T এবং T'। সুতরাং,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ এবং } T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

$$\therefore \quad \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{g}{2}}} = \sqrt{2}$$

সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল, T = 2s

$$\therefore \quad T' = \sqrt{2}\times T = \sqrt{2}\times 2 = 2.828\text{ s}$$

৯। রাশেদ একদিন একটি সেকেন্ড দোলককে পাহাড়ের পাদদেশে নিয়ে গেলে সঠিক সময় পায়। কিন্তু পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গিয়ে সে লক্ষ করল যে দোলকটি ঘণ্টায় 30 সেকেন্ড সময় হারায়। পাহাড়ের চূড়ায় সরল দোলকের দোলনকাল নির্ণয় কর। উক্ত পাহাড়ের উচ্চতা কত হবে ? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R = 6400 km, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$]
[রা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); দি. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন);
Admission Test : BUET 2017-18 (মান ভিন্ন); KUET 2004-05 (মান ভিন্ন)]

মনে করি, পাহাড়ের চূড়ায় দোলনকাল = T_2
এখানে,
পাহাড়ের চূড়ায় প্রতি ঘণ্টায় অর্থাৎ 3600 সেকেন্ডে প্রাপ্ত অর্ধ দোলন সংখ্যা = 3600 — 30 = 3570
যেহেতু 3570টি অর্ধ-দোলন দেয় 3600 সেকেন্ডে

$\therefore$ 2টি অর্ধ-দোলন দেয় $\frac{3600 \times 2}{3570} = 2{\cdot}0168$ সেকেন্ডে

$\therefore$ দোলন কাল, $T_2 = 2{\cdot}0168$ sec

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400\ km = 6{\cdot}4 \times 10^6\ m$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
পাহাড়ের উচ্চতা, $h = ?$

ভূপৃষ্ঠে ও পাহাড়ের চূড়ায় দোলনকাল যথাক্রমে T_1 ও T_2 হলে,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} = \sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}} = \frac{R}{R+h}$$

$\therefore$ $\frac{T_2}{T_1} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$

বা, $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{h}{R}$

বা, $\frac{2{\cdot}0168}{2} = 1 + \frac{h}{R}$

বা, $\frac{h}{R} = \frac{2{\cdot}0168}{2} - 1$

$= \frac{0{\cdot}0168}{2} = 0{\cdot}0084$

$\therefore$ $h = 0{\cdot}0084 \times R = 0{\cdot}0084 \times 6{\cdot}4 \times 10^6 = 53760\ m = 53{\cdot}76\ km$

১০। একটি দোলক ঘড়ি প্রতিদিন 3 মিনিট স্লো (slow) যায়। সঠিক সময় পেতে হলে দোলকটির দৈর্ঘ্যের কী পরিবর্তন করতে হবে ? (ধরে নাও, দোলকটি একটি সরল দোলক, $g = 9{\cdot}80\ ms^{-2}$)

আমরা জানি একটি সরল দোলকের দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\therefore$ সরল দোলকের অর্ধ দোলনকাল, $t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

একটি ত্রুটিহীন সেকেন্ড দোলকের ক্ষেত্রে, $t = 1$ s

$\therefore$ $1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

বা, $l = \frac{g}{\pi^2}$ ... ... (i)

আবার, 1 দিন (d) = $1 \times 24 \times 60 \times 60$ s = 86400 s
দোলক ঘড়িটি দিনে 3 min অর্থাৎ $3 \times 60 = 180$ s স্লো যায়
1 d-এ ঘড়িটির অর্ধ দোলনের সংখ্যা = 86400 – 180 = 86220

$\therefore$ এর অর্ধ দোলনকাল, $t_1 = \frac{86400}{86220}$ s

এই সরল দোলকটির দৈর্ঘ্য, l_1 হলে,

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

বা, $l_1 = \frac{g{t_1}^2}{\pi^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করে পাই,

$$l_1 - l = \frac{g t_1^2}{\pi^2} - \frac{g}{\pi^2} = \frac{g}{\pi^2}(t_1^2 - 1)$$

$$= \frac{9{\cdot}80}{9{\cdot}87}\left[\left(\frac{86400}{86220}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{9{\cdot}80}{9{\cdot}87} \times 4{\cdot}1799 \times 10^{-3}$$

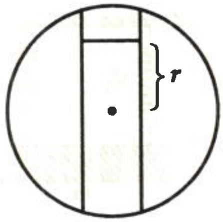
$$= 4{\cdot}15 \times 10^{-3}\ \text{m} = 4{\cdot}15\ \text{mm}$$

সুতরাং, সঠিক সময় পেতে হলে দোলকটির দৈর্ঘ্য $4{\cdot}15$ mm কমাতে হবে।

১১। কল্পনা কর যে, পৃথিবীর ব্যাস বরাবর একটি সুড়ঙ্গ খনন করা হলো। একটি বস্তুকে সুড়ঙ্গের এক প্রান্ত থেকে ছেড়ে দেওয়া হলো এবং বস্তুটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হতে লাগলো। পৃথিবীকে একটি সুষম গোলক মনে করে এবং বাধাদানকারী সকল বল উপেক্ষা করে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে 5×10^5 m দূরত্বে বস্তুটির ত্বরণ ও দোলনের পর্যায়কাল নির্ণয় কর। $R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m, $g = 9{\cdot}8$ m/s² [BUET Admission Test, 2016-17]

আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$



r বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g_r = \dfrac{GM(r)}{r^2}$

$M(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho$ কিন্তু $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$g_r = \frac{GMr^3}{r^2 R^3} = \frac{g \,.\, r}{R}$$

$$= 9{\cdot}8 \times \frac{5 \times 10^5}{6{\cdot}4 \times 10^6} = 0{\cdot}766\ \text{ms}^{-2}$$

আবার, $F = -Kr = -m \times g\dfrac{r}{R}$ বা, $\dfrac{m}{K} = \dfrac{R}{g}$

এবং $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$

এবং $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{6{\cdot}4 \times 10^6}{9{\cdot}8}}$$

$$= 5075\ \text{sec} = 84{\cdot}58\ \text{min}$$

$$= 1\ \text{hr}\ 24\ \text{min}\ 35\ \text{s}$$

১২। একটি স্থির লিফ্‌টে কোনো সরল দোলকের দোলনকাল T, লিফ্‌টটি $\frac{g}{5}$ ত্বরণে নিচে নামলে দোলনকাল কত হবে ? [BUET Admission Test, 2003-04 মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$T \propto \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এবং $$T' \propto \sqrt{\frac{L}{g - \frac{g}{5}}} = \sqrt{\frac{5L}{4g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{5L}{4g} \times \frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore T' = \frac{\sqrt{5}}{2} \times T = 1{\cdot}118\ T$$

১৩। শীতের ফলে একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য হ্রাস পেল। এর ফলে দোলকটি দিনে 200 sec ফাস্ট হয়। পরিবর্তিত দোলনকাল কত হবে ?

আমরা জানি,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{86400}{86400 + x} \quad \text{[ফাস্ট চলার ক্ষেত্রে]}$$

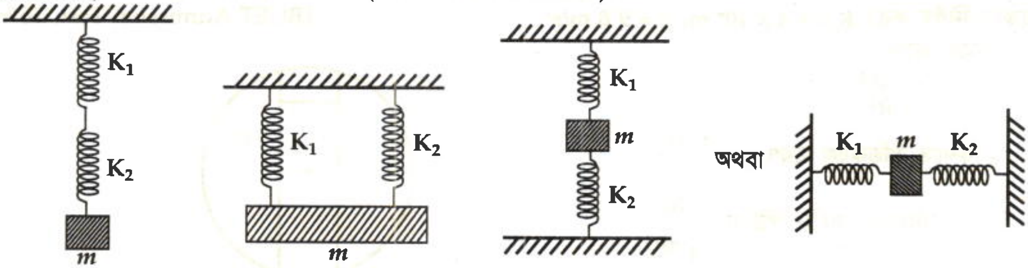
$$T_2 = \frac{86400}{86400 + x} \times T_1$$

$$= \frac{86400}{86400 + 200} \times 2$$

$$= 1{\cdot}99 \text{ sec}$$

৮·১৪ সমন্বিত স্প্রিং-এর দোলন
Oscillation of a composite spring

K_1 ও K_2 বল ধ্রুবকবিশিষ্ট দুটি স্প্রিং-কে দুইভাবে সমন্বয় করা যায়। যথা—(ক) শ্রেণি সমবায় (Series combination) এবং (খ) সমান্তরাল সমবায় (Parallel combination)।



(ক) (খ) (গ)

চিত্র ৮·১৮ : (ক) শ্রেণি সমবায়। চিত্র ৮·১৮(খ) চিত্র ৮·১৮(গ) : সমান্তরাল সমবায়।

(ক) স্প্রিং দুটি শ্রেণি সমবায়ে যুক্ত থাকলে এবং কার্যকর বল ধ্রুবকের মান K_s হলে,

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

বা, $$K_s = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

দোলনকাল হবে, $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_s}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (8.25)$$

বিশেষ ক্ষেত্র : যদি $K_1 = K_2 = K$ হয় তবে $K_s = \frac{K^2}{2K} = \frac{K}{2}$। অর্থাৎ **সমান মানের স্প্রিং ধ্রুবকের দুটি স্প্রিংকে শ্রেণিতে যুক্ত করলে সমবায়ের স্প্রিং ধ্রুবকের মান অর্ধেক হয়।** এবং $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$ হয়।

(খ) স্প্রিং দুটি সমান্তরালে সমবায়ে যুক্ত থাকলে এবং কার্যকর বল ধ্রুবকের মান K_p হলে, $K_p = K_1 + K_2$ হবে এবং এদের দোলনকাল হবে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_p}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1 + K_2}}$ … … (8.26)

বিশেষ ক্ষেত্র : যদি $K_1 = K_2 = K$ হয় তবে $K_p = K_1 + K_1 = 2K$ এবং $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}}$ হয়।

(গ) স্প্রিং দুটির মাঝে m ভর যুক্ত থাকলে সমবায়টি সমান্তরাল হয় এবং কার্যকর বল ধ্রুবকের মান K_p হলে;

যদি m ভরের বস্তটিকে y বা x-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে নিচের বা পাশের দিকে টানা হলে ওপরের স্প্রিংটি y পরিমাণ বৃদ্ধি পাবে এবং নিচের স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য y পরিমাণ হ্রাস পাবে। অনুরূপভাবে পাশাপাশির ক্ষেত্রে বাম প্রান্তের স্প্রিংটি x পরিমাণ বৃদ্ধি পাবে এবং ডান প্রান্তের স্প্রিংটি x পরিমাণ হ্রাস পাবে।

সেক্ষেত্রে স্প্রিং দুটিতে সৃষ্ট প্রত্যায়নক বল F_1 ও F_2 হলে এবং এরা একই দিকে ক্রিয়া করবে।

$\therefore \quad F_1 = -K_1 y \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$

এবং $F_2 = -K_2 y \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

মোট প্রত্যায়নক বল, $F = F_1 + F_2 = -(K_1 + K_2)\, y \quad \cdots \quad \cdots \quad (iii)$

সমবায়টির স্প্রিং ধ্রুবকের মান K হলে,

$F = -Ky$ হবে ... ... (iv)

$\therefore$ (iii) ও (iv)নং সমীকরণ থেকে পাই,

$K = K_1 + K_2$ ... ... (v)

এবং দোলনকাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1+K_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

অনুরূপভাবে x-এর ক্ষেত্রেও K ও T-এর একই মান হবে।

বিশেষ ক্ষেত্র : $K_1 = K_2 = K$ হলে, $K = 2K$ এবং

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}}$ হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি শিশু দোলনায় দুলছে। ওই অবস্থায় দোলনায় আরও একট শিশু বসলে দোলনার পর্যায়কালের পরিবর্তন হবে কী ? —ব্যাখ্যা কর।

সরল দোলগতিসম্পন্ন দোলনার পর্যায়কাল তার ওজনের ওপর নির্ভর করে না। অতএব, দোলনায় একটি শিশুর জায়গায় দুটি শিশু বসলেও দোলনার পর্যায়কালের কোনো পরিবর্তন হবে না। পর্যায়কাল একই থাকবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৪

১। একটি স্প্রিং-এর সাথে যুক্ত m ভরের বস্তুর দোলনকাল 2 s। বস্তুর ভর 1·5 kg বাড়ালে দোলনকাল 1s বাড়ে। স্প্রিং-এর সাথে যুক্ত m ভরের মান বের কর। (ধরে নাও, হুকের সূত্র প্রযোজ্য)

আমরা জানি K বল ধ্রুবকবিশিষ্ট স্প্রিং-এর সাথে m ভরের সরল দোলগতির দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

এখন প্রথম ক্ষেত্রে, $2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ... ... (i)

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $2 + 1 = 2\pi\sqrt{\frac{m+1.5}{K}}$

বা, $3 = 2\pi\sqrt{\frac{m+1.5}{K}}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{m+1.5}{m}}$$

বা, $\frac{9}{4} = \frac{m+1.5}{m} = 1 + \frac{1.5}{m}$

বা, $\frac{1.5}{m} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

$\therefore$ $m = \frac{4 \times 1.5}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$ kg

২। 80 g ভরের প্রভাবে একটি স্প্রিং–এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হয় 2 cm। ওই স্প্রিং–এর মুক্ত প্রান্তে 500 g ভরের একটি বস্তুকে সংযুক্ত করা হলো এবং বস্তুটিকে 10 cm বিচ্যুত করা হলো।

(ক) ওই অবস্থানে বস্তুটির শক্তি নির্ণয় কর।

(খ) শক্তি–সংক্রান্ত বিবেচনা থেকে বস্তুটি সাম্যাবস্থান থেকে 5 cm দূরে থাকলে এর বেগ কত হবে নির্ণয় কর।

(ক) আমরা জানি স্প্রিং ধ্রুবক,

$$K = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x}$$

$$\therefore K = \frac{0.08 \times 9.8}{0.02} = 39.2 \text{ N/m}$$

এখানে,

$m = 80$ g $= 0.08$ kg

$g = 9.8$ ms^{-2}

$M = 500$ g $= 0.5$ kg

$A = 10$ cm $= 0.1$ m

$x = 2$ cm $= 0.02$ m

আবার, মোট শক্তি = সর্বোচ্চ গতিশক্তি = বিস্তারের প্রান্তবিন্দুতে স্থিতিশক্তি।

$$E = \frac{1}{2}KA^2$$

$$\therefore \quad E = \frac{1}{2} \times 39{\cdot}2 \times (0{\cdot}1)^2 = 0{\cdot}196\ J$$

(খ) $x = 5\ cm$ বা $0{\cdot}05\ m$ হলেও মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। সেই অবস্থায় বেগ v হলে আমরা পাই,

গতিশক্তি + স্থিতিশক্তি = 0·196

বা, $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0{\cdot}196$

বা, $\frac{1}{2}mv^2 = 0{\cdot}196 - \frac{1}{2} \times 39{\cdot}2 \times (0{\cdot}05)^2 = 0{\cdot}196 - 0{\cdot}049 = 0{\cdot}147$

বা, $v^2 = \frac{2 \times 0{\cdot}147}{0{\cdot}08} = 3{\cdot}675$

বা, $v = \sqrt{3{\cdot}675} = 1{\cdot}917 ms^{-1}$

৩। একটি স্প্রিংকে কেটে দুই অংশে এমনভাবে ভাগ করা হলো যে, একটির দৈর্ঘ্য অপরটির দ্বিগুণ। অধিকতর লম্বা স্প্রিংটির স্প্রিং ধ্রুবক এবং প্রযুক্ত বল কত ? [ঢা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন)]

মনে করি, স্প্রিংটির ধ্রুবক বল = K, বড় অংশটির দৈর্ঘ্য = l_1, এবং ছোট অংশটির দৈর্ঘ্য = l_2

প্রশ্নমতে, $l_1 = 2l_2$

$$\therefore \quad K_1 = 2K_2$$

এখানে K_1, K_2 যথাক্রমে বড় ও ছোট স্প্রিং-এর স্প্রিং ধ্রুবক।

স্প্রিং-এর শ্রেণি সমবায়ের ক্ষেত্রে,

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{1}{2K_2} + \frac{1}{K_2} = \frac{3}{2K_2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{K} = \frac{3}{2 \times K_2}$$

বা, $K_2 = \frac{3}{2}K$

$$\therefore \quad K_1 = 2K_2 = 2 \times \frac{3}{2}K = 3K$$

আবার, $\frac{F_1}{F_2} = \frac{K_1 l_1}{K_2 l_2} = \frac{3K \times 2l_2}{\frac{3}{2}K \times l_2} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$

$$\therefore \quad F_1 = 4 \times F_2$$

∴ বড় স্প্রিং-এ প্রযুক্ত বল ছোট স্প্রিং-এ প্রযুক্ত বলের 4 গুণ।

৪। একটি স্প্রিংকে 5 N বল দ্বারা টানলে দৈর্ঘ্য 0·1 m প্রসারিত হয়। স্প্রিংটির নিচে কত ভর যুক্ত করে নিচের দিকে টেনে ছেড়ে দিলে প্রতি সেকেন্ডে 4 বার পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করবে? দোলনের বিস্তার 2 cm হলে বস্তুর ভর ও দোলকের সর্বোচ্চ বেগ নির্ণয় কর।

এখানে,
$F = 5N$
$x = 0{\cdot}1\ m$
$n = 4$
$A = 2\ cm = 0{\cdot}02\ m$
$m = ?$
$v_{max} = ?$

আমরা জানি,

$$K = \frac{F}{x}$$

$$\therefore \quad K = \frac{5}{0{\cdot}1} = 50\ Nm^{-1}$$

আবার,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

এখানে, $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25s$

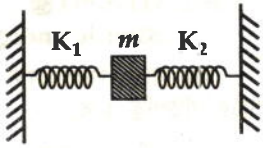
$$\therefore \quad 0{\cdot}25 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{50}}$$

বা, $m = \frac{(0\cdot25)^2 \times 50}{4\pi^2}$

$= \frac{(0\cdot25)^2 \times 50}{4 \times 9\cdot87} = 0\cdot079$ kg

এখন সর্বোচ্চ বেগ, $v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} \times A = \frac{2 \times 3\cdot14}{0\cdot25} \times 0\cdot02 = 0\cdot50$ ms^{-1}

৫। দুটি স্প্রিংয়ের বল ধ্রুবক K_1 এবং K_2 [চিত্র দ্রষ্টব্য]। এদের m ভরের একটি বস্তু এবং দুটি দৃঢ় অবলম্বনের মধ্যে চিত্রানুযায়ী যুক্ত করা হলো। m ভরের অনুভূমিক পর্যায়কাল কত?



m ভরের বস্তুটিকে ডানদিকে x পরিমাণ সরানো হলে K_2 স্প্রিংটি x দৈর্ঘ্যে সংকুচিত এবং K_1 স্প্রিংটি সমপরিমাণ প্রসারিত হয়।

এখন, K_1 স্প্রিংটিতে প্রত্যায়নক বল, $F_1 = -K_1 x$ (বামদিকে) এবং

K_2 স্প্রিংটিতে প্রত্যায়নক বল, $F_2 = -K_2 x$ (বামদিকে)

$\therefore$ মোট প্রত্যয়নক বল, $F = F_1 + F_2 = -K_1 x + (-K_2 x) = -x(K_1 + K_2)$

$\therefore$ সমবায়টির মোট বল ধ্রুবক, $K = K_1 + K_2$

অতএব, m ভরটির দোলনের দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1 + K_2}}$$

৬। চন্দ্রপৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য কত হবে, যদি ওর পর্যায়কাল পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের পর্যায়কালের সমান হয়? (পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 80 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ বেশি)।

ধরা যাক, পৃথিবী পৃষ্ঠে ও চন্দ্র পৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্য এবং অভিকর্ষ ত্বরণ যথাক্রমে l_1 ও l_2 এবং g_1 ও g_2

প্রশ্নানুসারে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g_2}}$

$\therefore \frac{l_1}{g_1} = \frac{l_2}{g_2}$ $\qquad \therefore \frac{l_2}{l_1} = \frac{g_2}{g_1}$

আবার, $g_1 = \frac{GM_1}{R_1^2}$ এবং $g_2 = \frac{GM_2}{R_2^2}$। এখানে M_1 ও M_2 এবং R_1 ও R_2 যথাক্রমে পৃথিবী ও চন্দ্রের ভর ও ব্যাসার্ধ।

$\therefore \frac{g_2}{g_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{M_2}{M_1} = \frac{l_2}{l_1}$

$\therefore \frac{l_2}{l_1} = (4)^2 \times \frac{1}{80} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$ $\qquad \left[\because \frac{M_1}{M_2} = 80, \frac{R_1}{R_2} = 4\right]$

বা, $l_2 = \frac{l_1}{5}$

সুতরাং, চন্দ্রপৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্য পৃথিবী পৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{5}$ অংশ হতে হবে।

৭। যখন 70 kg ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি একটি গাড়িতে ওঠে তখন গাড়ির ভারকেন্দ্র 0·4 cm নেমে যায়। গাড়ির ভর 1000 kg হলে শূন্য অবস্থায় গাড়ির স্পন্দনের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে,
$m = 70$ kg
$g = 9\cdot8$ ms^{-2}
$x = 0\cdot4$ cm $= 0\cdot4 \times 10^{-2}$ m
$M = 1000$ kg

আমরা জানি গাড়ির স্পন্দনের কম্পাঙ্ক,

$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$; এখানে K স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক

গাড়ির স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক,

$$K = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{70 \times 9\cdot8}{0\cdot4 \times 10^{-2}}$$

$$= 1\cdot715 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$\therefore n = \frac{1}{2 \times 3\cdot14} \times \sqrt{\frac{1\cdot715 \times 10^5}{1000}} = 2\cdot085 \text{ s}^{-1}$$

৮·১৫ সরল দোল গতির শক্তি
Energy of simple harmonic motion

সরল দোল গতি সম্পন্ন কোনো বস্তুকণার গতিপথের প্রান্ত বিন্দু ছাড়া সবত্রই কিছু গতি থাকে। ফলে তার গতিশক্তি থাকে। আবার আমরা জানি কণার সরণের বিপরীতে একটি প্রত্যায়নক বল ক্রিয়া করে যা কণাটিকে সাম্যাবস্থানে ফিরিয়ে আনতে সচেষ্ট হয়। ফলে সরণের সময় কাজ করা হয় যা বস্তুকণাতে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত থাকে। ঘর্ষণ বা অন্য কোনোভাবে শক্তির অপচয় না হলে বস্তুকণাটির মোট যান্ত্রিক শক্তি (mechanical energy) সর্বদা স্থির থাকে।

৮·১৫·১ গতিশক্তি
Kinetic energy

ধরা যাক, সরল দোল গতিসম্পন্ন বস্তু কণাটির ভর m, সরণ x, গতির বিস্তার A এবং বেগ v। সুতরাং ওই কণাটির গতিশক্তি হবে,

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (8.27)$$

$$[\because v = \pm\sqrt{A^2 - x^2}]$$

(i) কণাটি যে মুহূর্তে সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে, তখন $x = 0$

$\therefore$ ওই মুহূর্তে কণাটির গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$। এটিই গতিশক্তির সর্বোচ্চ মান। অর্থাৎ সাম্যাবস্থানে কণাটির গতিশক্তি সর্বোচ্চ হয়।

(ii) আবার, যখন কণাটি গতিপথের যেকোনো প্রান্ত বিন্দুতে পৌঁছায় তখন $x = \pm A$; ওই মুহূর্তে কণাটির গতিশক্তি, $E_k = 0$। এটিই গতিশক্তির সর্বনিম্ন মান।

সুতরাং, **সরল দোল গতির সাম্যাবস্থানে গতিশক্তি সর্বোচ্চ হয় এবং বিস্তারের উভয় প্রান্ত বিন্দুতে গতিশক্তি শূন্য হয়।**

আবার কণার সরণ $x = A \sin(\omega t + \delta)$

এবং বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} A \sin(\omega\tau + \delta) = A\omega \cos(\omega t + \delta)$

$\therefore$ গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \delta)$

আমরা জানি, $\omega = \frac{K}{m}$ $\therefore E_k = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega t + \delta) \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (8.27(a))$

কাজেই $E_k \propto A^2$ অর্থাৎ গতিশক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

৮·১৫·২ স্থিতিশক্তি
Potential energy

আমরা জানি, সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার গতিপথের মধ্য বিন্দুতে অর্থাৎ সাম্য বিন্দুতে কণার ওপর কোনো বল ক্রিয়া করে না। আবার কণাটির সরণ যখন x, তখন এর ওপর ক্রিয়াশীল ত্বরণ হয়, $a = \omega^2 x$ (—ve চিহ্ন উপেক্ষা করে) এবং তার ওপর প্রত্যায়নক বলের মান হয়, $m\omega^2 x$। সুতরাং, বলা যায় যে $x = 0$ থেকে x দূরত্বের মধ্যে কণাটির ওপর একটি গড় বল ক্রিয়া করে, যার মান $\frac{0 + m\omega^2 x}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 x$।

তাই, কণাটির স্থিতিশক্তি হলো,

$$E_P = \text{গড় বলের বিরুদ্ধে কণাটিকে } x \text{ দূরত্বে সরাতে কৃত কাজ}$$
$$= \text{গড় বল} \times \text{সরণ} = \frac{1}{2} m\omega^2 x \times x = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad \cdots \quad \cdots \quad (8.28)$$

(i) কণাটি যখন সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে, তখন $x = 0$

সুতরাং ওই মুহূর্তে কণাটির স্থিতিশক্তি, $E_p = 0$। এটিই স্থিতিশক্তির সর্বনিম্ন মান।

(ii) যখন কণাটি গতিপথের যেকোনো প্রান্ত বিন্দুতে পৌঁছায়, তখন $x = \pm A$।

$\therefore$ ওই মুহূর্তে কণাটির স্থিতিশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$। এটিই কণাটির স্থিতিশক্তির সর্বোচ্চ মান।

আমরা জানি, সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার ওপর সাম্যাবস্থানের দিকে ক্রিয়াশীল বল $F = Kx$। বস্তুটিকে $x = 0$ হতে $x = x$ অবস্থানে সরাতে কৃত কাজই হবে স্থিতিশক্তি E_P এবং ক্রিয়াশীল প্রযুক্ত বল হবে $F' = Kx$

$$\therefore \quad E_P = \int_0^x F'dx = \int_0^x Kx\,dx = K\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\therefore \quad E_P = \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega t + \delta) = 0 \text{ কাজেই } E_P \propto A^2$$

অর্থাৎ স্থিতিশক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

মোট যান্ত্রিক শক্তি (Total mechanical energy) :

সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার মোট যান্ত্রিক শক্তি,

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}KA^2[\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta)]$$

$$= \frac{1}{2}KA^2 \therefore E \propto A^2$$

কাজেই মোট শক্তি বা যান্ত্রিক শক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

সমীকরণ (8.25) ও (8.26) ব্যবহার করে পাই,

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.29)$$

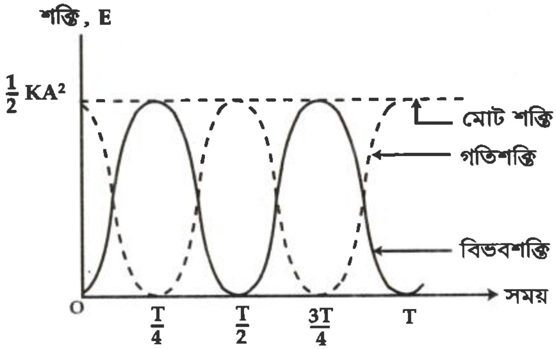
এখন, যেহেতু m ও ω ধ্রুবক, সুতরাং বিস্তার অপরিবর্তিত থাকলে $E =$ ধ্রুবক। অর্থাৎ **কণার মোট শক্তি সরণের ওপর নির্ভর করে না।**

সুতরাং, সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার গতির সঙ্গে সঙ্গে তার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি, উভয়ই পরিবর্তিত হলেও মোট শক্তি অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ, **সরল দোলগতি শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে।**

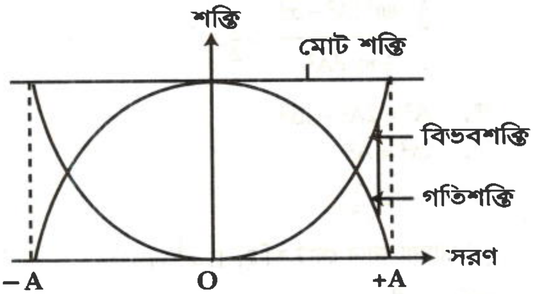
সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার সরণের সঙ্গে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা নিম্নের সারণিতে দেখানো হলো। এই সারণির মানগুলোকে ব্যবহার করে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির পরিবর্তনকে ৮.১৯ লেখচিত্রের মাধ্যমে দেখানো হলো।

সরল দোলগতিসম্পন্ন কোনো বস্তুকণার সরণের সঙ্গে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা নিচের সারণি দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

সরণ	$+A$	$+\frac{A}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	$-A$
গতিশক্তি, E_k	0	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	0
স্থিতিশক্তি, E_p	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	0	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$



চিত্র ৮.১৯(ক)



চিত্র ৮.১৯(খ)

সরণ, বেগ, স্থিতিশক্তি, গতিশক্তি ও মোট শক্তির লেখচিত্র (Graphs of displacement, velocity, potential energy, kinetic energy and total energy) : চিত্র ৮.২০-এ সরণ, বেগ, স্থিতিশক্তি, গতিশক্তি ও মোট শক্তির লেখচিত্র দেখানো হলো।

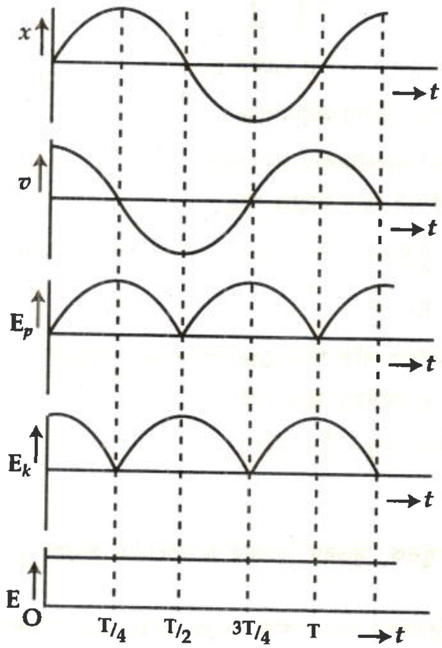
সরণ
$x = A \sin \omega t$

বেগ
$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

স্থিতিশক্তি
$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

গতিশক্তি
$E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$

মোট শক্তি
$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$



$E_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

$E_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

$E_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

চিত্র ৮.২০ : সময় বনাম সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ, স্থিতিশক্তি, গতিশক্তি এবং মোট শক্তির লেখচিত্র।

জানার বিষয় :

I. সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর বিভব শক্তি সাম্যাবস্থায় শূন্য এবং গতিশক্তি সর্বাধিক, $E_k = \frac{1}{2} KA^2$

II. সর্বাধিক উচ্চতায় গতিশক্তি শূন্য এবং বিভব শক্তি সর্বাধিক, $E_p = mgh$

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৫

১। একটি সরল দোলগতির (i) কোন অবস্থানে গতিশক্তির মান সর্বোচ্চ গতিশক্তির অর্ধেক হবে ? [DU-A Admission Test, 2021-22] **(ii) সরণ যখন বিস্তারের অর্ধেক তখন শক্তি কত ?**

(i) আমরা জানি, একটি সরল দোলগতির গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$ এবং সর্বোচ্চ গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

ধরি, সাম্যাবস্থান থেকে x দূরত্বে গতিশক্তি সর্বোচ্চ গতিশক্তির অর্ধেক।

এখন প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{\frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)}{\frac{1}{2} m\omega^2 A^2} = \frac{1}{2}$$

বা, $A^2 = 2A^2 - 2x^2$

বা, $2x^2 = A^2$

$\therefore \quad x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$

(ii) আমরা জানি মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

যখন $x = \frac{A}{2}$, তখন

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2\left\{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - \frac{A^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{3}{4}\cdot E_{k(max)}$$

$$= \frac{3}{4}E \qquad \left[\because \text{সর্বোচ্চ গতিশক্তি} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \text{মোট শক্তি} = E\right]$$

২। সরল দোলগতিসম্পন্ন একটি কণা যখন তার মধ্য অবস্থান থেকে 3 cm দূরে তখন গতিশক্তি স্থিতিশক্তির চারগুণ। কণাটির বিস্তার কত?

আমরা জানি গতিশক্তি, $K.E. = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$

এবং স্থিতিশক্তি, $P.E = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

প্রশ্নানুসারে,

$K.E = 4 \times P.E$

$\therefore \quad \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = 4 \times \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

বা, $A^2 - x^2 = 4x^2$ বা, $5x^2 = A^2$

বা, $A^2 = 5x^2$

$\therefore \quad A = \pm\sqrt{5}x = +\sqrt{5}\times 3 = 6{\cdot}70$ cm

৩। একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল 4 s। মধ্য অবস্থান পার হওয়ার কতক্ষণ পরে কণাটির মোট শক্তির অর্ধেক স্থিতিশক্তি ও অর্ধেক গতিশক্তি হবে ?

আমরা জানি,

স্থিতিশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

এবং গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$

এখানে,

$T = 4$ s

$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad s^{-1}

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$

বা, $x^2 = A^2 - x^2$

বা, $2x^2 = A^2$

$\therefore \quad x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$

সরল দোল গতির সমীকরণ, $x = A\sin\omega t$ থেকে পাই,

$\pm\frac{A}{\sqrt{2}} = A\sin\omega t$

বা, $\sin\omega t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(i) $\sin\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad \omega t = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4\times\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\text{ s} = 0{\cdot}5\text{ s}$

(ii) $\sin\omega t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \omega t = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

অথবা, $t = \frac{5\pi}{4\omega} = \frac{5\pi}{4\times\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}\text{ s} = 2{\cdot}50\text{ s}$

সুতরাং, 0·5 s বা 2·5 s পরে কণাটির মোট শক্তির অর্ধেক স্থিতিশক্তি এবং অর্ধেক গতিশক্তি হবে।

৪। একটি সরল দোলন গতির বিস্তার 6 cm। আদি দশা 0° এবং 1 মিনিটে 150 বার কম্পন হয়। ওই সরল দোল গতির সমীকরণ লেখ। [JU Admission Test, 2021-22 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণ,

$$x = A \sin(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এখানে আদি দশা, $\delta = 0$, বিস্তার, $A = 6$ cm

$\therefore$ কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T} = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}$ Hz

অতএব, $\omega = 2\pi n = 2\pi \times \frac{5}{2} = 5\pi$

এখানে,
$A = 6$ cm
$n = 150$ min
$t = 1$ min $= 60$ s
$\delta = 0$

সমীকরণ (i)-এ মানগুলো বসিয়ে পাই,

$$x = 6 \sin(5\pi t + 0°) = 6 \sin 5\pi t$$

উল্লেখ্য, সমীকরণটিকে $x = 6 \cos 5\pi t$ রূপেও লেখা যায়।

৫। একটি গতিশীল কণার সরণের সমীকরণ $y = 4 \sin \omega t + 3 \cos \omega t$। দেখাও যে কণার গতি সরল দোলগতি।

$$y = 4 \sin \omega t + 3 \cos \omega t = 5 \sin(\omega t + \theta)$$

এখানে, $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$ এবং $\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\therefore$ কণার বেগ, $v = \frac{dy}{dt} = 5\omega \cos(\omega t + \theta)$

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt} = -5\,\omega^2 \sin(\omega t + \theta) = -\,\omega^2 y$

অতএব, কণার ত্বরণ সরণের সমানুপতিক এবং সাম্যাবস্থানের দিকে ক্রিয়া করে। সুতরাং কণার গতি সরল দোলগতি।

৬। একটি সরল গতিসম্পন্ন কণার কম্পাঙ্ক ω হলে প্রমাণ কর যে এর স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের কম্পাঙ্ক 2ω।

আমরা জানি দোলগতির সমীকরণ,

$$x = A \cos \omega t$$

এবং স্থিতিশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

$$= \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 (1 + \cos 2\omega t)$$

এখানে,
ω = কম্পাঙ্ক
A = বিস্তার

সুতরাং, স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের কম্পাঙ্ক $= 2\omega$ (প্রমাণিত)

৭। 0·2 kg ভরের একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুর বিস্তার 0·1 m। মধ্য অবস্থান অতিক্রম করার সময় কণার গতিশক্তি 1×10^{-2} J হলে বস্তুটির পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

মধ্য অবস্থানে বস্তুটির স্থিতিশক্তি $= 0$

সুতরাং, মধ্য অবস্থানে বস্তুটির গতিশক্তি = যেকোনো অবস্থানে বস্তুটির মোট শক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

এখানে,
$m = 0·2$ kg
$A = 0·1$ m
$E_K = 1 \times 10^{-2}$ J

$\therefore$ $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = E_K$ বা, $\omega^2 = \frac{2E_K}{mA^2}$

বা, $\omega = \sqrt{\frac{2E_K}{mA^2}}$

$\therefore$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mA^2}{2E_K}}$

$$= 2 \times 3·14 \times \sqrt{\frac{0·2 \times (0·1)^2}{2 \times 1 \times 10^{-2}}}$$

$$= 6·28 \times \sqrt{\frac{0·2}{2}} = 1·99 \text{ s}$$

৮। সরল দোল গতিসম্পন্ন একটি কণার মোটশক্তি 3×10^{-7} Joule। তার ওপর সর্বাধিক যে বল ক্রিয়া করে তার মান 1.5×10^{-5} N। দোল গতির পর্যায়কাল 2 s এবং আদি দশা 60° হলে ওই সরল গতির সমীকরণ বের কর।

আমরা জানি দোলকের মোট শক্তি,

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 3 \times 10^{-7} \text{ J} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

এর ওপর ক্রিয়ারত সর্বোচ্চ বল,

$$F_{max} = ma_{max} = m\omega^2 A \quad [\because a_{max} = \omega^2 A]$$

$$= 1.5 \times 10^{-5} \text{ N} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i)-কে সমীকরণ (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$A = 4 \times 10^{-2} \text{ m} = 0.04 \text{ m}$$

পর্যায়কাল, T = 2 s $\therefore$ কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad s}^{-1}$

আদি দশা, $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

আবার, আমরা জানি সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণ, $x = A \sin(\omega t + \theta)$

$\therefore$ কণাটির সরল দোল গতির সমীকরণ $x = 0.04 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ m

এখানে,
$E = 3 \times 10^{-7}$ J
$F_{max} = 1.5 \times 10^{-5}$ N
T = 2 s
$\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

৯। একটি লাউড স্পিকারের শঙ্কু (Cone) 262 Hz কম্পাঙ্কে সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হয়। শঙ্কুর কেন্দ্রের বিস্তার $A = 1.5 \times 10^{-4}$ m এবং $t = 0$ সময়ে সরণ $x = A$ হয়। শঙ্কুর কেন্দ্রের গতি বর্ণনাকারী সমীকরণটি নির্ণয় কর। শঙ্কুর বেগ ও ত্বরণকে সময়ের ফাংশন হিসেবে প্রকাশ কর। [BUET Admission Test, 2014-15]

আমরা জানি,

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \times 262 = 524\,\pi \text{ rad s}^{-1}$$

গতির সমীকরণ, $x = A \cos \omega t$

$\therefore \quad x = 1.5 \times 10^{-4} \cos 524\,\pi t$

বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = -1.5 \times 10^{-4} \times 524\,\pi \sin 524\,\pi t$

$= -1.5 \times 10^{-4} \times 524 \times 3.14 \sin 524\,\pi t$

$v = -0.2468 \sin 524\,\pi t$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = -0.2468 \times 524\,\pi \cos 524\,\pi t$

$= -0.2468 \times 524 \times 3.14 \cos 524\,\pi t$

$a = -406 \cos 524\,\pi t$

এখানে,
$n = 262$ Hz
$A = 1.5 \times 10^{-4}$ m

১০। 10 g ভরের একটি বস্তুকণা সরলরেখা বরাবর সরল দোলন গতি অর্জন করে। এর দোলনকাল 2 sec এবং বিস্তার 10 cm হলে (i) সাম্যাবস্থান থেকে 2 cm দূরে এর গতিশক্তি কত ? (ii) সাম্যাবস্থান থেকে 5 cm দূরে গতিশক্তি নির্ণয় কর।

(i) মনে করি সরল দোলন গতির সমীকরণ,

$x = A \sin \omega t$

$\therefore$ বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$

$\therefore$ গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$

$= \frac{1}{2} mA^2\omega^2 (1 - \sin^2 \omega t)$

$= \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \left[1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right] = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$

এখানে,
$m = 10 \text{ g} = 0.01$ kg
T = 2 sec
A = 10 cm = 0.1 m
$n = 2 \text{ cm} = 0.02$ m
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

তখন $E_k = \frac{1}{2} \times 0{\cdot}01 \times \{(0{\cdot}1)^2 - (0{\cdot}02)^2\}$

$= 0{\cdot}005\, \pi^2 \times 0{\cdot}0096 = 0{\cdot}005 \times 9{\cdot}87 \times 9{\cdot}6 \times 10^{-3}$

$= 4{\cdot}738 \times 10^{-4}\, J$

(ii) যখন $x = 5$ cm

তখন, $E_k = \frac{1}{2} \times 0{\cdot}01 \times 9{\cdot}87 \times \{(0{\cdot}1)^2 - (0{\cdot}05)^2\}$

$= 0{\cdot}005 \times 9{\cdot}87 \times 7{\cdot}5 \times 10^{-3} = 3{\cdot}7 \times 10^{-4}\, J$

১১। একটি স্প্রিং-এর অগ্রভাগে 0·03 kg ভর ঝুলানো হলে স্প্রিংটি 0·1 m লম্বা হয়। স্প্রিংটিকে এই সাম্যাবস্থা হতে আরও 8×10^{-2}m লম্বা করে ছেড়ে দেওয়া হলো। মোট শক্তি কত এবং বেগ কত হবে ?

আমরা জানি,

$F = kx$

বা, $k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{0{\cdot}03\ \text{kg} \times 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}}{0{\cdot}10\ \text{m}}$

$= 2{\cdot}94\ \text{Nm}^{-1}$

মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 2{\cdot}94\ \text{Nm}^{-1} \times (0{\cdot}08\ \text{m})^2$

$= 9{\cdot}41 \times 10^{-3}\ J$

আবার, $v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{\cdot}08\ \text{m}\sqrt{\frac{2{\cdot}94\ \text{Nm}^{-1}}{0{\cdot}03\ \text{kg}}}$

$= 0{\cdot}792\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

$m = 0{\cdot}03$ kg

$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

$x = 0{\cdot}10$ m

$A = 8 \times 10^{-2}\text{m} = 0{\cdot}08$ m

১২। সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন একটি বস্তুর বেগ $4\ \text{ms}^{-1}$ যখন সরণ 3 m এবং বেগ $5\ \text{ms}^{-1}$ যখন সরণ 2 m। (i) দোলনের বিস্তার এবং পর্যায়কাল নির্ণয় কর। (ii) বস্তুটির ভর 40 kg হলে, দোলনের মোট শক্তি নির্ণয় কর।

(i) আমরা জানি, বেগ, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\therefore \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{A^2 - x_1^2}{A^2 - x_2^2}}$

বা, $\frac{4}{3} = \sqrt{\frac{A^2 - 3^2}{A^2 - 5^2}}$

বা, $\frac{16}{9} = \frac{A^2 - 9}{A^2 - 25}$

বা, $16A^2 - 16 \times 25 = 9A^2 - 81$

বা, $16A^2 - 9A^2 = 400 - 81$

বা, $7A^2 = 319$

$A^2 = \frac{319}{7}$ বা, $A = \sqrt{\frac{319}{7}} = 6{\cdot}75$ m

আবার, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x^2}$

বা, $T = \frac{2\pi}{v}\sqrt{A^2 - x^2}$

$= \frac{2 \times 3{\cdot}14}{4}\sqrt{(6{\cdot}75)^2 - 9}$

$= \frac{6{\cdot}28}{4} \times 6 = 9{\cdot}42$ s

এখানে,

$v_1 = 4\ \text{ms}^{-1}$

$x_1 = 3$m

$v_2 = 5\ \text{ms}^{-1}$

$x_2 = 2$m

$m = 40$ kg

(ii) আমরা জানি,

মোট শক্তি $= \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

$= \frac{1}{2} \times 40 \times \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times A^2$

$= \frac{1}{2} \times 40 \left(\frac{2 \times 3{\cdot}14}{9{\cdot}42}\right)^2 \times (6{\cdot}75)^2$

$= 20 \times 0{\cdot}44 \times 45{\cdot}56 = 400{\cdot}95$ J

১৩। $t = 0$ সময়ে কোনো একটি সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার সরণ সর্বোচ্চ হলে কণাটির সমীকরণ বের কর।

সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণ,

$x = A \sin(\omega t + \alpha)$

এখন সর্বোচ্চ সরণ অর্থ সরণের মান বিস্তার A-এর সমান।

সুতরাং, $A = A\sin(\omega \times 0 + \alpha) = A \sin\alpha$

বা, $\sin\alpha = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$

কাজেই সরল দোলগতির সমীকরণ,

$x = A\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A\cos\omega t$

১৪। একটি সরল দোলকের ববের ভর 100 g এবং কার্যকর দৈর্ঘ্য 1 মিটার। উল্লম্ব রেখা হতে ববটিকে 10 cm দূরে টেনে ছেড়ে দিলে গতিপথের সর্বনিম্ন বিন্দু অতিক্রমকালে ববের বেগ কত হবে ? [ম. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg(L - \sqrt{L - x^2})$

বা, $\frac{1}{2}v^2 = g(1 - \sqrt{1 - (0{\cdot}1)^2})$

$\therefore v^2 = 2 \times 9{\cdot}8(1 - \sqrt{1 - (0{\cdot}1)^2}) = 0{\cdot}098$

$\therefore v = 0{\cdot}31\ ms^{-1}$

এখানে,

$m = 100\ g = 0{\cdot}1\ kg$

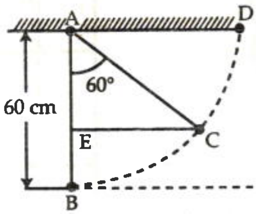
$L = 1\ m$

$x = 10\ cm = 0{\cdot}1\ m$

$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

$v = ?$

১৫। একটি দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য 60 cm এবং ববের ভর 5g। ববটিকে কোনো একদিকে টেনে সুতোকে অনুভূমিক করা হলো এবং তারপর ছেড়ে দেওয়া হলো। সুতাটি যখন উল্লম্ব রেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে, তখন ববটির গতিশক্তি কত?



D বিন্দুতে ববটির স্থিতিশক্তি $= mgh$

$= 5 \times 10^{-3} \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}6$

$= 29{\cdot}4 \times 10^{-3}$

ΔAEC থেকে পাই,

এখানে,

ববের ভর, $M = 5\ g = 5 \times 10^{-3}$ kg

দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $h = 60\ cm = 0{\cdot}6\ m$

$\theta = 60°$

$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

$\frac{AE}{AC} = \cos 60°$ বা, $AE = AC \cos 60° = 0{\cdot}60 \times \frac{1}{2} = 0{\cdot}3\, m$

এখন, E বিন্দুতে স্থিতিশক্তি $mgh = 5 \times 10^{-3} \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}3 = 14{\cdot}7 \times 10^{-3}$ J

$\therefore$ E বিন্দুতে গতিশক্তি $= (29{\cdot}4 \times 10^{-3} - 14{\cdot}7 \times 10^{-3}) = 14{\cdot}7 \times 10^{-3}$ J = স্থিতিশক্তির হ্রাস

নিজে কর : ১। গতিপথের মধ্য অবস্থানে অর্থাৎ $x = 0$ অবস্থানে মোট শক্তি নির্ণয় করে শক্তির নিত্যতা যাচাই কর।
২। গতিপথের কোন অবস্থানে গতিশক্তি শূন্য হবে ?

১। $x = 0$ অবস্থানে স্থিতিশক্তি $= 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

বা, $E = 0 + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \therefore E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

২। আবার গতিপথের সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ $x = A$ অবস্থানে শক্তির নিত্যতা যাচাই কর। সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ $x = A$ অবস্থানে গতিশক্তি,

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - A^2) = 0$$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি,

E = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

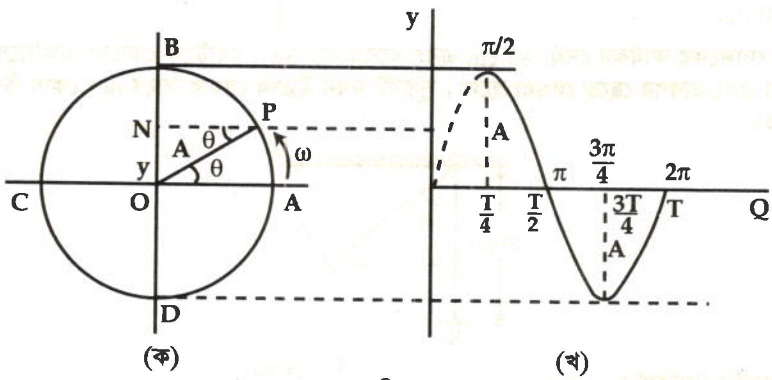
$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 + 0$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

সুতরাং উপরিউক্ত দুই অবস্থানে মোট শক্তি একই থাকে। অর্থাৎ মোট শক্তি তার সরণের ওপর নির্ভর করে না, গতিপথের সর্বত্র তার মান স্থির থাকে। এটা শক্তির নিত্যতার সূত্র বা মোট শক্তির সংরক্ষণশীলতার সূত্র।

৮·১৬ সরল দোলন গতি এবং বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক
Relation between simple harmonic motion and circular motion

বৃত্তাকার গতি এক ধরনের সরল দোলন গতি। অর্থাৎ বৃত্তাকার গতি সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্যগুলো মেনে চলে। এখন সরল দোলন গতি এবং বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে গিয়ে চিত্র ৮·২১ লক্ষ কর।



চিত্র ৮·২১

মনে করি একটি বস্তুকণা A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে ABCD বৃত্তাকার পথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সমকৌণিক বেগ ω-এ ঘুরছে [চিত্র ৮·২১(ক)]। ধরি O বৃত্তের কেন্দ্র এবং A বৃত্তের ব্যাসার্ধ। মনে করি t সময় পর বস্তুকণাটি P অবস্থানে আসল। এখন P বিন্দু হতে বৃত্তের BOD ব্যাসের ওপর PN লম্ব অঙ্কন করি। N হবে লম্বটির পাদবিন্দু।

মনে করি ON = y। চিত্রে OPN ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়,

$y = OP \sin\theta = A \sin\theta$

যেহেতু কণাটি সমকৌণিক বেগে ঘুরছে, সুতরাং $\angle POA = \theta = \omega t$ ... ... (8.31)

θ-কে কণাটির দশা কোণ (phase angle) বা সংক্ষেপে দশা বলে।

এখন $y = A \sin\theta = A \sin\omega t$ ... ... (8.32)

P কণাটি যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন ব্যাস BOD-এর ওপর কণার পাদবিন্দু N ব্যাস BOD বরাবর স্পন্দিত হতে থাকে।

সুতরাং কণাটির বেগ,

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A \sin\omega t) = A\,\omega \cos\omega t$$

এবং ত্বরণ, $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin\omega t$$

$$= -\omega^2 y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.33)$$

অর্থাৎ কণাটির ত্বরণ এর সরণের সমানুপাতিক। সুতরাং N বিন্দুর গতি সরল ছন্দিত গতি। O হচ্ছে এই ছন্দিত গতির মধ্যবিন্দু বা সাম্যাবস্থান, B ও D ছন্দিত গতির প্রান্তীয় অবস্থান এবং P উৎপাদনকারী বিন্দু (generating point)। বৃত্তটির নাম নির্দেশক বৃত্ত (reference circle) এবং কণাটির নাম নির্দেশক কণা (reference particle) [চিত্র ৮·২১(ক)]। লক্ষ করলে দেখা যাবে যে কণাটি বৃত্তাকার পথে যখন ABCDA পথে একবার ঘুরে আসে সেই সময় পাদবিন্দুটি OBODO ব্যাস বরাবর যাত্রা বিন্দু বা আদি বিন্দু থেকে শুরু করে একবার পথ অতিক্রম শেষ করে আদি বিন্দুতে ফিরে আসে। কণাটির বৃত্তাকার পথে একবার ঘুরতে যে সময় লাগে তাই দোলন বা পর্যায়কাল T। ওই সময় একই পাদবিন্দুও একবার পথ পরিক্রমা শেষ করে। সুতরাং

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ [$\because$ $\theta = \omega t$ এবং যখন $\theta = 2\pi, t = T$ সুতরাং $2\pi = \omega T$]

উপরের বর্ণনা থেকে দেখা যাচ্ছে যে পাদবিন্দু N-এর গতি—

(ক) পর্যাবৃত্ত গতি

(খ) সরল রৈখিক গতি

(গ) ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী।

সুতরাং পাদবিন্দুর গতি সরল দোলনগতি।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : সকল সরল ছন্দিত গতিই পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু সকল পর্যাবৃত্ত গতি সরল দোলন গতি নয়—ব্যাখ্যা কর।

সকল সরল ছন্দিত গতি পর্যাবৃত্ত গতির বিশেষ রূপ মাত্র। পর্যাবৃত্ত গতি (ক) যদি রৈখিক হয়, (খ) কণার ত্বরণ যদি সাম্যাবস্থান অভিমুখী ও (গ) সাম্যাবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক হয় তা হলেই কেবল তাকে সরল ছন্দিত গতি বলা হয়। ঘড়ির কাঁটার গতি ও গ্রহ–উপগ্রহের গতি পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু ওপরের শর্ত (ক) ও (খ) পূরণ না করায় ওই ধরনের গতি সরল ছন্দিত গতি নয়। সুতরাং, বলা যায় যে, **সকল সরল ছন্দিত গতিই পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু সকল পর্যাবৃত্ত গতি সরল দোলন গতি নয়।**

অনুধাবনমূলক কাজ : প্রত্যায়নক বল কী ? স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে কী ধরনের বলের উদ্ভব ঘটে ?

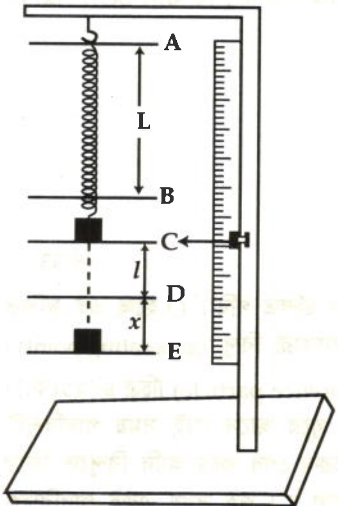
বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর বিকৃতি হলে স্থিতিস্থাপকতার কারণে পূর্বের অবস্থায় ফিরে যেতে বস্তুর মধ্যে যে বল উৎপন্ন হয় তাকে প্রত্যায়নক বল বলে। স্প্রিংকে বল প্রয়োগ করে প্রসারিত বা সংকুচিত করলে এটি পূর্বের অবস্থায় ফিরে যেতে প্রত্যায়নক বল সৃষ্টি হয়। এই প্রত্যায়নক বল মূলত স্থিতিস্থাপক বল।

৮·১৭ ব্যবহারিক

Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	(ক) স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয়ের পরীক্ষা **Experiment for the determination of spring constant**

তত্ত্ব : উল্লম্বভাবে ঝুলন্ত একটি পেঁচানো স্প্রিং থেকে m ভরের কোনো বস্তুকে ঝুলিয়ে দিলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। এ অবস্থায় বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে ধরা হয়। এবার বস্তুটিকে নিচের দিকে x দূরত্ব টেনে ছেড়ে দিলে সেটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হতে থাকবে [চিত্র ৮·২২]। বস্তুটিকে নিচের দিকে টানলে স্প্রিংটি এর ওপর প্রাথমিক অবস্থান অভিমুখে একটি প্রত্যায়নক বল (restoring force) প্রয়োগ করে। হুকের সূত্র অনুসারে প্রত্যায়নক বল বস্তুর সরণ x-এর সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী। সুতরাং



চিত্র ৮·২২

$$F = -Kx$$

এখানে K স্প্রিংটির বল ধ্রুবক। বস্তুকে ছেড়ে দিলে F বলের দরুন সেটি a ত্বরণ নিয়ে চলে। বস্তুটির ভর m হলে এর ত্বরণ হবে,

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{K'}{m}x$$

$$\therefore \quad a = -Kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু $K = \frac{K'}{m}$ = ধ্রুবক = স্প্রিং ধ্রুবক। অতএব বস্তুর গতি সরল দোলন গতি হবে।

যেহেতু একক সরণে বস্তুর ত্বরণ $= \frac{K'}{m}$। সুতরাং দোলনরত বস্তুর

পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ $\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

বস্তুর ওজন mg-এর ক্রিয়ায় স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বেড়েছিল।

অতএব হুকের সূত্র অনুযায়ী $mg = Kl$

বা, $K = \frac{m}{l} \times g$ $\quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iii)

বা, $\frac{m}{K} = \frac{l}{g}$

$\therefore$ দোলনরত বস্তুর পর্যায়কাল $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iv)

যন্ত্রপাতি : (১) পরীক্ষণীয় স্প্রিং। (২) সুবিধাজনক কয়েকটি ভার। (৩) স্প্রিংটি ঝুলাবার জন্য হুক। (৪) মিটার স্কেল।

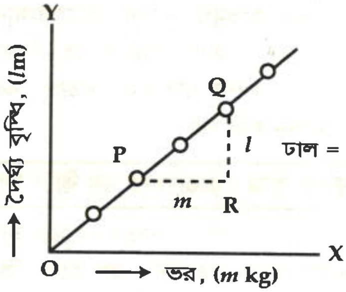
কার্যপদ্ধতি : (i) পরীক্ষণীয় স্থানের টেবিলের প্রান্ত থেকে অথবা কোনো দৃঢ় অবলম্বন হতে একটি হুক হতে স্প্রিংটিকে ঝুলিয়ে দেয়া হয়।

(ii) এর পর স্প্রিংটির AB-এর দৈর্ঘ্য (L), স্কেলের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

(iii) এবার স্প্রিং-এর নিচের প্রান্তের হুকে একটি ভার চাপানো হয় ফলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় এবং ভার এর অবস্থান C থেকে D তে এসে পৌছায়। মিটার স্কেলের সাহায্যে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি (l) নির্ণয় করা হয়। D বিন্দু বরাবর একটি নির্দেশক চিহ্ন দিয়ে রাখতে হবে।

(iv) উপরিউক্ত পদ্ধতিটি বিভিন্ন ভারের বস্তুর জন্য কয়েকবার করা হয় এবং বিভিন্ন ভারের জন্য দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পরিমাপ করা হয়।

(v) ভর হ্রাসের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য সংকোচন পরিমাপ করা হয়।



চিত্র ৮·২৩

লেখচিত্র অঙ্কন : গ্রাফ কাগজে X-অক্ষ বরাবর ভার এবং Y-অক্ষ বরাবর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। লেখচিত্রটি একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হয় [চিত্র ৮·২৩]। এই সরলরেখার ঢাল $\frac{l}{m}$ নির্ণয় করা হয়।

ডাটা ছক-১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	স্প্রিং এর আদি দৈর্ঘ্য, L (m)	প্রযুক্ত ভর m (kg)	স্প্রিং এর সম্প্রসারণ, l (m)	দৈর্ঘ্য প্রসারণের ক্ষেত্রে m/l (kgm^{-1})	দৈর্ঘ্য সংকোচনের ক্ষেত্রে m/l (kgm^{-1})	গড় m/l (kgm^{-1})	K (Nm^{-1})

হিসাব : পরীক্ষালব্ধ $\frac{l}{m}$ -এর মান থেকে $\frac{m}{l}$ নির্ণয় করে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g'-এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে স্প্রিং ধ্রুবক K নির্ণয় করা হয়।

ফলাফল : নির্ণেয় স্প্রিং ধ্রুবকের মান .... Nm^{-1}.

আলোচনা ও সতর্কতা : (১) স্প্রিংটিকে এমনভাবে ঝুলাতে হবে যাতে এর প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর এটি ওপরের হুক থেকে খুলে না যায়।

(২) ভার ক্রমান্বয়ে বর্ধিত করে স্প্রিং-এর সম্প্রসারণ নির্ণয় করা হয়।

(৩) স্প্রিংটির প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সময় যাতে বাধা প্রাপ্ত না হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

(৪) দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণ সঠিকভাবে পরিমাপ করতে হবে।

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	(খ) স্প্রিং-এর সাহায্যে ভরের তুলনা **Comparing the masses with the help of a spring**

তত্ত্ব : উল্লম্বভাবে ঝুলানো একটি পেঁচানো স্প্রিং থেকে m ভরের কোনো বস্তুকে ঝুলিয়ে দিলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। এ অবস্থায় বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে ধরা হয়। এবার বস্তুটিকে নিচের দিকে x দূরত্ব টেনে ছেড়ে দিলে সেটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে দুলতে থাকে [চিত্র ৮·২৪]। বস্তুটিকে নিচের দিকে টানলে স্প্রিং-এর ওপর প্রাথমিক অবস্থান অভিমুখে একটি প্রত্যায়নক বল প্রয়োগ করে। হুকের সূত্র অনুসারে প্রত্যায়নক বল বস্তুর সরণ x-এর সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী। সুতরাং $F = -K'x$

এখানে K′ স্প্রিংটির বল ধ্রুবক।

বস্তুটিকে টেনে ছেড়ে দিলে F বলের দরুন সেটি a ত্বরণ নিয়ে চলে। বস্তুটির ভর m হলে এর ত্বরণ হবে

$$a = \frac{F}{m} \quad \therefore \; a = \frac{-K'}{m}x$$

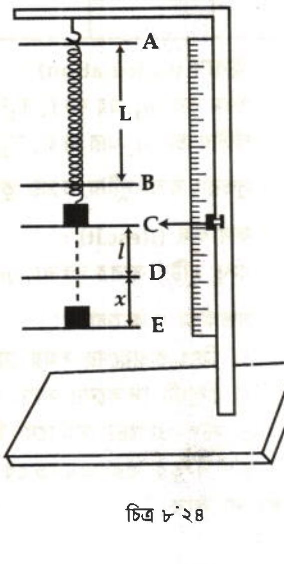
$$\therefore \quad a = -Kx, \text{ এখানে } K = \frac{K'}{m} = \text{স্প্রিং ধ্রুবক}$$

যেহেতু একক সরণে বস্তুর ত্বরণ $\frac{K'}{m}$, সুতরাং দোলনরত বস্তুর পর্যায়কাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$$

$$\therefore \; m = \frac{T^2K}{4\pi^2} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$



চিত্র ৮·২৪

দুটি বস্তুর ভর m_1 ও m_2 এবং এই দুই ভরের জন্য পর্যায়কাল T_1 ও T_2 হলে, সমীকরণ (ii) থেকে লেখা যায়,

$$m_1 = \frac{T_1^2K}{4\pi^2} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(iii)}$$

এবং $m_2 = \frac{T_2^2 K}{4\pi^2}$ ... ... (iv)

$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{T_1^2 K}{4\pi^2} \times \frac{4\pi^2}{T_2^2 K} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$ ... ... (v)

$m_1 : m_2 = T_1^2 : T_2^2$ ... ... (vi)

যন্ত্রপাতি : (১) জানা স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট একটি স্প্রিং।

(২) স্প্রিংটি ঝুলাবার জন্য হুক।

(৩) পরীক্ষণীয় বিভিন্ন ভারের বস্তু।

(৪) স্টপ-ওয়াচ।

(৫) একটি কাঠের মিটার স্কেল।

কার্যপদ্ধতি : (১) স্প্রিংটিকে হুকের সাহায্যে কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলিয়ে দিতে হবে। স্প্রিং-এর প্রান্তে পরীক্ষণীয় প্রথম ভারের বস্তু (m_1) স্প্রিং-এর নিচের প্রান্তে বেঁধে দিলে প্রথমে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে এবং একটি অবস্থানে স্থির থাকবে। এটাই সাম্য বিন্দু।

(২) সাম্যবিন্দু ঠিক রাখার জন্য পাশে একটি লম্বা স্কেলে বা দেওয়ালের গায়ে দাগ দিয়ে চিহ্নিত কর।

(৩) এরপর সাম্য বিন্দু হতে নিচের দিকে বস্তুটিকে অল্প টেনে ছেড়ে দিলে স্প্রিংটি উপরে-নিচে কম্পিত হবে। এই অবস্থায় 3 বার 20 দোলনের সময় নির্ণয় কর। প্রতিবারে সময়কে দোলন সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে দোলনকাল (T_1) নির্ণয় কর। তিনটি পাঠের মান থেকে গড় T_1 নির্ণয় কর।

(৪) একইভাগে দ্বিতীয় ভারের বস্তুর (m_2) জন্য (৩) নং পরীক্ষণ অনুযায়ী দোলনকাল T_2 নির্ণয় কর।

পর্যবেক্ষণ ছক-১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	প্রথম ভর m_1				দ্বিতীয় ভর m_2			
	10টি দোলনের জন্য		দোলন কাল	T_1^2	10টি দোলনের জন্য		দোলন কাল	T_2^2
	সময় sec	গড় sec	T_1 sec	sec^2	সময় sec	গড় sec	T_2 sec	sec^2
1								
2								
3								
4								

হিসাব (Calculation) :

প্রথম ভর m_1-এর জন্য, $T_1^2 = \ldots\ldots sec^2$

দ্বিতীয় ভর m_2-এর জন্য, $T_2^2 = \ldots\ldots sec^2$

সুতরাং বস্তু দুটির ভরের তুলনা, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$

ফলাফল (Result) :

বস্তু দুটির ভরের তুলনা, $m_1 : m_2 = \ldots\ldots$

সতর্কতা ও আলোচনা :

১. স্প্রিং প্রসারণের সময় যেন স্প্রিংটি খাড়াভাবে প্রসারিত হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

২. স্প্রিংটি দোলনের সময় ডানে বা বামে না দুলে যেন উল্লম্বভাবে দুলতে থাকে সেদিকে লক্ষ রাখা হয়।

৩. স্টপ-ওয়াচের সাহায্যে নিখুঁতভাবে সময় নির্ণয় করা হয়েছে।

৪। বস্তুর ভর এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে স্প্রি-এর প্রান্তে ঝুলিয়ে দিলে তা স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করে।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$F \propto -x$ ... ... (1)

$x = a \sin \omega t$ ... ... (2)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ... ... (3)

$T = 2\pi n, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ... ... (4)

$F = -Kx$ ... ... (5)

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ ... ... (6)

$x = A \sin(\omega t + \delta)$ ... ... (7)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ... ... (8)

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ... ... (9)

$\frac{g'}{g} = 1 + \frac{h}{R}$ ... ... (10)

$h = R\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$ ... ... (11)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_s}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(K_1 + K)}{K_1 K_2}}$ ... ... (12)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ... ... (13)

$h = \left(\sqrt{\frac{g}{g_1}} - 1\right) \times R$ ... ... (14)

$a = -\omega^2 x$ ... ... (15)

$v_{max} = \omega A$ ... ... (16)

$a_{max} = \omega^2 A$ ... ... (17)

$K = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2)$ ... ... (18)

$U = \frac{1}{2}Kx^2$ ... ... (19)

$T = \frac{1}{n}, \; n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$ ... ... (20)

$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$ ... ... (21)

$E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ... ... (22)

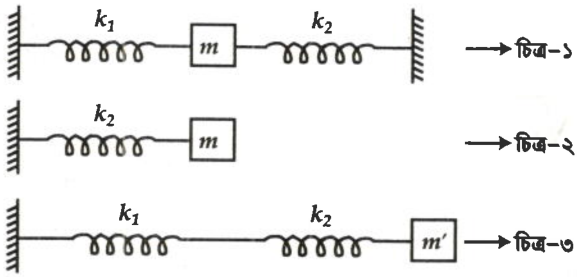
$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ ... ... (23)

$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} = \sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}} = \frac{R}{R+h}$ ... ... (24)

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$ ... ... (25)

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। দুটি স্প্রিং–এর স্প্রিং ধ্রুবক $K_1 = 1000\ Nm^{-1}$ এবং $K_2 = 2000\ Nm^{-1}$. $m = 4.5$ kg ও m' ভরের দুটি বস্তু চিত্র অনুসারে যুক্ত থেকে মসৃণ মেঝেতে দুলতে সক্ষম।



(ক) উদ্দীপকের ২নং চিত্রে স্প্রিং–এর কৌণিক কম্পাঙ্ক কত হবে?

(খ) $m' = 1$ kg হলে উদ্দীপকের ১নং ও ৩নং চিত্রের স্প্রিংগুলোর পর্যায়কাল সমান হবে—বক্তব্যটি যাচাই কর। [ঢা. বো. 2022]

(ক) আমরা জানি, স্প্রিংয়ের দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{4.5}{2000}}$$
$$= 6.28 \times \sqrt{22.5} \times 10^{-4}$$
$$= 29.8 \times 10^{-2}\ s$$

এখানে,
$k_1 = 1000\ Nm^{-1}$
$k_2 = 2000\ Nm^{-1}$
$m = 4.5$ kg
$m' = 1$ kg

আবার, $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{29.8 \times 10^{-2}} = 3.35$ Hz

অতএব ২নং স্প্রিং–এর কৌণিক কম্পাঙ্ক $= 3.35$ Hz

(খ) ১নং চিত্রে স্প্রিং দুটি সমান্তরালে যুক্ত। এদের দোলনকাল,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{4.5}{1000 + 2000}}$$
$$= 6.28\sqrt{\frac{4.5}{3 \times 10^3}} = 6.28\sqrt{\frac{4.5 \times 10^{-3}}{3}}$$
$$= 0.243\ s$$

৩নং চিত্রে স্প্রিং দুটি শ্রেণিতে যুক্ত। সুতরাং দোলনকাল,

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m'(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{1 \times 3000}{2 \times 10^6}} = 6.28 \times \sqrt{15} \times 10^{-4} = 0.243\ s$$

সুতরাং, $T_1 = T_2$; অর্থাৎ ১নং ও ৩নং চিত্রের স্প্রিংগুলোর পর্যায়কাল সমান।

২। সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দনশীল 0.5 kg ভরের কণা সাম্যাবস্থান থেকে 0.015m টেনে ছেড়ে দিলে এটি 0.12m বিস্তারে দুলে। এটির ব্যবকলনীয় সমীকরণ নিম্নরূপ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\pi^2 x = 0$$

(ক) কণার দশা ধ্রুবক বের কর।

(খ) $t = 1.125$ সেকেন্ডে ও $t = 1.625$ সেকেন্ডে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা যাচাই কর। [কু. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি সরল ছন্দিত স্পন্দনের সমীকরণ,

$x = A \sin(\omega t + \delta)$

$t = 0$ হলে, $x = A \sin \delta$

বা, $\sin \delta = \frac{x}{A}$

এখানে,
$x = 0.015$ m
$A = 0.12$ m

বা, $\delta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{0.015}{0.12}\right) = \sin^{-1}(0.125) = 7.2°$

(খ) যখন $t = 1{\cdot}125$ সেকেন্ড,

বিভব শক্তি, $E_P = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$\therefore \quad E_P = \frac{1}{2} \times 0{\cdot}5 \times 4 \times 9{\cdot}87 \times (0{\cdot}0948)^2$

$= 0{\cdot}0887$ J

এখানে,

$\omega^2 = 4\pi^2$

$\therefore \ \omega = 2\pi = 360°$

$x = A \sin (\omega t + \delta)$

$\therefore \ x = 0{\cdot}12 \sin (360° \times 1{\cdot}125 + 7{\cdot}2°)$

$= 0{\cdot}0948$

$m = 0{\cdot}5$ kg

এবং $E_K = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$

$= \frac{1}{2} \times 0{\cdot}5 \times 4 \times 9{\cdot}87 \times \{(0{\cdot}12)^2 - (0{\cdot}0948)^2\}$

$= \frac{1}{2} \times 0{\cdot}5 \times 4 \times 9{\cdot}87 \times 5{\cdot}4 \times 10^{-3} = 0{\cdot}0534$ J

$\therefore \quad E = E_P + E_K = 0{\cdot}0887 + 0{\cdot}0534 = 0{\cdot}142$ J

আবার যখন $t = 1{\cdot}625$ সেকেন্ড,

$x = A \sin (360° \times 1{\cdot}625 + 7{\cdot}2)$

$= 0{\cdot}12 \times (-0{\cdot}79) = -0{\cdot}0948$

$E_P = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$= \frac{1}{2} \times 0{\cdot}5 \times 4 \times 9{\cdot}87 \times (-0{\cdot}0948)^2$

$= 0{\cdot}0887$ J

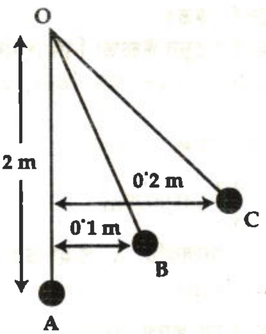
$E_K = \frac{1}{2} \times 0{\cdot}5 \times 4 \times 9{\cdot}87 \ \{(0{\cdot}12)^2 - (0{\cdot}09481^2)\}$

$= \frac{1}{2} \times 0{\cdot}5 \times 4 \times 9{\cdot}87 \ (0{\cdot}0144 - 0{\cdot}008987) = \frac{1}{2} \times 0{\cdot}5 \times 4 \times 9{\cdot}87 \times 0{\cdot}0054 = 0{\cdot}0533$ J

$\therefore \quad E = E_P + E_K = 0{\cdot}0887 + 0{\cdot}0533 = 0{\cdot}142$ J

সুতরাং, $t = 1{\cdot}125$ s এবং $t = 1{\cdot}625$ সেকেন্ডে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সমর্থন করে।

৩। চিত্রে C বিন্দু একটি সরল দোলকের সর্বাধিক সরণ নির্দেশ করছে। ববের ভর 20 gm।



(ক) দোলকটির দোলনকাল 2·8s হলে ওই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ কত?

(খ) উদ্দীপকে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র পালিত হয় কি না B ও C অবস্থানের ভিত্তিতে গাণিতিকভাবে মতামত দাও। [য. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি,

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

বা, $g = \frac{4\pi^2 \times l}{T^2}$

$= \frac{4 \times 9{\cdot}87 \times 2}{(2{\cdot}8)^2}$

$= 10{\cdot}07 \ ms^{-2}$

এখানে,

$T = 2{\cdot}8$ s

$l = 2$m

$m = 20$ gm $= 0{\cdot}02$ kg

(খ) C অবস্থানে, $A = 0{\cdot}2$ m, $m = 20$ gm $= 0{\cdot}02$ kg

এখানে বিভব শক্তি,

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\times 0{\cdot}02\times\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\times(0{\cdot}2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 0{\cdot}02\times\frac{4\times 9{\cdot}87}{(2{\cdot}8)^2}\times(0{\cdot}2)^2 = 2{\cdot}014\times10^{-3}\text{ J}$$

এবং গতিশক্তি, $E_K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - A^2) = 0$

মোট শক্তি $E = 2{\cdot}014\times10^{-3} + 0 = 2{\cdot}014\times10^{-3}$ J

B অবস্থানে, $x = 0{\cdot}1$ m, $A = 0{\cdot}2$ m

সুতরাং বিভব শক্তি,

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}\times 0{\cdot}02\times\left(\frac{2\times 3{\cdot}14}{2{\cdot}8}\right)^2\times(0{\cdot}1)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 0{\cdot}02\times 5{\cdot}035\times 0{\cdot}01 = 0{\cdot}50357\times10^{-3}\text{ J}$$

এবং গতিশক্তি,

$$E_K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}\times 0{\cdot}02\times 5{\cdot}03\{(0{\cdot}2)^2 - (0{\cdot}1)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}\times 0{\cdot}02\times 5{\cdot}0357\times 0{\cdot}03 = 1{\cdot}5107\times10^{-3}\text{ J}$$

মোট শক্তি = বিভব শক্তি + গতিশক্তি $= 0{\cdot}50357\times10^{-3} + 1{\cdot}5107\times10^{-3} = 2{\cdot}014\times10^{-3}$ J

সুতরাং, B ও C বিন্দুতে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা পালিত হয়।

৪। সাকিব একদিন একটি সেকেন্ড দোলককে A ও B নামক দুটি পাহাড়ের পাদদেশে নিয়ে গেলে সঠিক সময় পায়। কিন্তু সে লক্ষ করল A পাহাড়ের চূড়ায় গেলে দোলকটি ঘণ্টায় 30s সময় হারায় এবং B পাহাড়ের চূড়ায় দোলকটির দোলনকাল পাওয়া যায় 2·0198s।

[পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6{\cdot}4\times10^6$ m, পাহাড়দ্বয়ের পাদদেশে অর্থাৎ ভূপৃষ্ঠে $g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$]

(ক) উদ্দীপকের সেকেন্ড দোলকটির দৈর্ঘ্য কত?

(খ) উদ্দীপকের তথ্যের ভিত্তিতে উভয় পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয়পূর্বক মতামত দাও কোন পাহাড়টি বেশি উঁচু?

[ঢা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০১৭ (মান ভিন্ন); ম. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); দি. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ বা, } l = \frac{T^2g}{4\pi^2} = \frac{(2)^2\times 9{\cdot}8}{4\times 9{\cdot}87} = 0{\cdot}9929\text{m}$$

(খ) ঘণ্টায় অর্থাৎ $60\times60 = 3600$ s-এ দোলকটি A পাহাড়ের চূড়ায় 30 s সময় হারায়। দোলকটি 3600 সেকেন্ডে অর্ধদোলন দেয় $3600 - 30 = 3570$ সংখ্যক।

অতএব, 3570 সংখ্যক অর্ধদোলন দিতে সময় লাগে 3600s

1টি সংখ্যক অর্ধদোলন দিতে সময় লাগে $\frac{3600}{3570}$

2টি সংখ্যক অর্ধদোলন দিতে সময় লাগে $\frac{3600\times2}{3570} = 2{\cdot}0168$ s

অর্থাৎ দোলনকাল $T_2 = 2{\cdot}0168$s

আবার উচ্চতা, $h = \left(\sqrt{\frac{g}{g'}} - 1\right)\times R$ এবং $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$

সুতরাং A পাহাড়ের উচ্চতা,

$$h_1 = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\times R = \left(\frac{2{\cdot}0168}{2{\cdot}0000} - 1\right)\times 6{\cdot}4\times10^6 = \frac{0{\cdot}0168}{2}\times 6{\cdot}4\times10^6$$

$$= 53{\cdot}76\times10^3\text{ m} = 53{\cdot}76\text{ km}$$

এবং B পাহাড়ের উচ্চতা,

$$h_2 = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \times 6{\cdot}4 \times 10^6$$

$$= \left(\frac{2{\cdot}0198}{2{\cdot}000} - 1\right) \times 6{\cdot}4 \times 10^6$$; এখানে B পাহাড়ের চূড়ায় $T_2 = 2{\cdot}0198$

$$\therefore\ h_2 = \left(\frac{2{\cdot}0198}{2{\cdot}000} - 1\right) \times 6{\cdot}4 \times 10^6$$

$$= 63{\cdot}36 \text{ km}$$

অতএব, B পাহাড়ের উচ্চতা A পাহাড়ের উচ্চতার চেয়ে বেশি।

৫। তানজিনা 100 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের একটি সরল দোলক তৈরি করল। 4° কৌণিক বিস্তারে দোলকটি 2 sec দোলনকাল সহকারে দোল দেয়। তাকে দোলনকাল 50% বাড়াতে বলায় সে কার্যকরী দৈর্ঘ্য 150 cm নিয়ে দোলনকাল নির্ণয় করতে শুরু করল।

(ক) তানজিনার তৈরি সেকেন্ড দোলকের কৌণিক কম্পাঙ্ক কত?

(খ) 150 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের দোলকটি কী উদ্দীপকের শর্ত পূরণ করবে? গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

[ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি কৌণিক কম্পাঙ্ক,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{2}$$

$$= 3{\cdot}14 \text{ rads}^{-1}$$

এখানে,

দোলনকাল, $T = 2$ sec

প্রাথমিক কার্যকরি দৈর্ঘ্য, $l_1 = 100$ cm

(খ) প্রাথমিক অবস্থায় দোলকটির দোলনকাল $T_1 = 2$ sec

পরিবর্তিত দোলনকাল হবে $T_1 = 2 + 2 \times 50\% = 3$ sec

প্রাথমিক কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L_1 = 100$ cm

পরবর্তী কার্যকর দৈর্ঘ্য L_2 হলে,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

বা, $$\frac{L_1}{L_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

বা, $$L_2 = \frac{9}{4} L_1 = \frac{9}{4} \times 100 \text{ cm} = 225 \text{ cm}$$

সুতরাং উদ্দীপকের শর্তানুসারে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য হতে হবে 225 cm। কিন্তু কার্যকর দৈর্ঘ্য করা হয়েছে 150 cm। সুতরাং 150 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের দোলকটি উদ্দীপকের শর্ত পূরণ করেনি।

৬। একদল শিক্ষার্থী পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবরেটরিতে 500 g ভরের একটি বস্তুকে তারের প্রান্তে আংটায় ঝুলিয়ে দোল দিল। তারা দেখল যে, এটি প্রতি সেকেন্ডে 0·5 বার স্পন্দিত হচ্ছে। বস্তুটির সরণ 5 cm এবং বিস্তার 10 cm।

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত সরণ কালে বস্তুটির বেগ কত হবে ?

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত সরণের জন্য বস্তুটির ওপর ক্রিয়ারত বল বস্তুটির ওজনের 0·05 গুণ হবে— গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে মতামত দাও।

[কু. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= 2\pi n\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= 2 \times 3{\cdot}14 \times 0{\cdot}5 \times \sqrt{(0{\cdot}1)^2 - (0{\cdot}05)^2}$$

$$= 0{\cdot}272 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

কম্পাঙ্ক, $n = 0{\cdot}5$ Hz

বিস্তার, $A = 10$ cm $= 0{\cdot}1$ m

বস্তুর সরণ, $x = 5$ cm $= 0{\cdot}05$ m

$\therefore$ $x = 0{\cdot}05$ m সরণে বস্তুর বেগ, $v = ?$

(খ) আমরা জানি,

$W = mg$

$\therefore \dfrac{F}{W} = \dfrac{m4\pi^2n^2x}{mg} = \dfrac{4\pi^2n^2x}{g}$

$= \dfrac{4 \times (3.14)^2 \times (0.5)^2 \times 0.05}{9.8}$

$= 0.05$

$\therefore F = 0.05 \times W$

এখানে,

ববের ভর, $m = 500\text{ g} = 0.5\text{ kg}$

মনে করি, $x = 0.05\text{ m}$ সরণে বস্তুটির ওপর ক্রিয়ারত বল $= F$

$\therefore F = ma = m\omega^2x = m(2\pi n)^2x$

$= m \times 4\pi^2n^2x$

অতএব, উল্লিখিত সরণের জন্য বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বল বস্তুটির ওজনের 0.05 গুণ হবে, উক্তিটি যথার্থ।

৭। একটি সরল দোলকের ববের ভর 1.2×10^{-2} kg। এটি 51 mm বিস্তারে দুলছে। এটি 25টি দোলন সম্পন্ন করতে 49.75 সে. সময় নেয়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m।

(ক) দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) দোলকটিকে পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে 53760 m উচ্চতায় নিয়ে গেলে ববের সর্বোচ্চ সরণে ববের ওপর প্রত্যায়নক বলের কীরূপ পরিবর্তন হবে যাচাই কর। [য. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

বা, $T^2 = 4\pi^2\dfrac{L}{g}$

$\therefore L = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = \dfrac{9.8 \times (1.99)^2}{4 \times 9.87}$

$= \dfrac{9.8 \times 3.9601}{4 \times 9.87}$

$= 0.983\text{ m}$

এখানে,

$N = 25$ টি দোলন

$t = 49.75\text{ sec}$

দোলনকাল, $T = \dfrac{49.75}{25}\text{ sec} = 1.99\text{ sec}$

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L = ?$

(খ) আমরা জানি,

ভূপৃষ্ঠে সর্বোচ্চ সরণে ববের ওপর কার্যকর প্রত্যায়নক বল, $F = \dfrac{mg}{L}A$

এবং h উচ্চতায় ববের ওপর ওই সরণে কার্যকরী প্রত্যায়নক বল, $F_h = \dfrac{mg_h}{L}A$

এখানে,

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m

ভূপৃষ্ঠ থেকে উচ্চতা, $h = 53760$ m

ববের সর্বোচ্চ সরণ, $A = 51$ mm

$\therefore \dfrac{F_h}{F} = \dfrac{g_h}{g} = \left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$

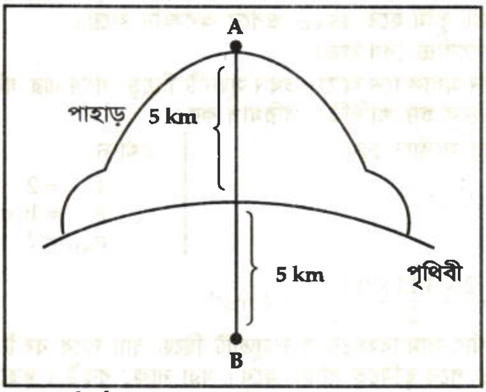
$= \left(\dfrac{6.4 \times 10^6}{6.4 \times 10^6 + 53760}\right)^2$

$= 0.9834$

বা, $\dfrac{F - F_h}{F} = \dfrac{1 - 0.9834}{1} = 0.0166 = 0.0166 \times 100\% = 1.66\%$

$\therefore$ দোলকটি উল্লিখিত উচ্চতায় নিয়ে গেলে ববের ওপর প্রত্যায়নক বল 1.66% কমে যাবে।

৮। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m; ভূপৃষ্ঠে $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$।



(ক) পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে A ও B স্থানের মধ্যে কোথায় একটি সরল দোলক ধীরে চলবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০১৬]

(ক) ধরি উদ্দীপকের A বিন্দুতে অর্থাৎ পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ g_A

আমরা জানি,

$$g_A = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$= \frac{(6{\cdot}4 \times 10^6)^2}{(6{\cdot}4 \times 10^6 + 5 \times 10^3)^2} \times 9{\cdot}8$$

$$\therefore \quad g_A = 9{\cdot}78\ ms^{-2}$$

এখানে,

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

A বিন্দুর উচ্চতা, $h = 5\ km = 5 \times 10^3$ m

ভূপৃষ্ঠে g-এর মান, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

সুতরাং, পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 9{\cdot}78\ ms^{-2}$

(খ) মনে করি B বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ, g_h

আমরা জানি,

$$g_h = \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$= 9{\cdot}8 \times \left(1 - \frac{5 \times 10^3}{6{\cdot}4 \times 10^6}\right) = 9{\cdot}79\ ms^{-2}$$

এখানে,

$R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

ভূপৃষ্ঠ হতে B বিন্দুর গভীরতা,

$h = 5\ km = 5 \times 10^3$ m

ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

এখন মনে করি A বিন্দুতে একটি সরল দোলকের দোলনকাল T_A এবং B বিন্দুতে ওই দোলকের দোলন-কাল T_B।

আমরা জানি,

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_A}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এবং $$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_B}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (ii) কে সমীরণ (i) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{g_B}{g_A}} = \sqrt{\frac{9{\cdot}79}{9{\cdot}78}} = 1{\cdot}0005$$

বা, $T_A = 1{\cdot}0005 \times T_B$

$\therefore$ $T_A > T_B$, অর্থাৎ B স্থানের তুলনায় A স্থানে দোলকটির দোলনকাল বেশি। সুতরাং, A স্থানে সরল দোলকটি ধীরে চলবে।

৯। 50 g ভরবিশিষ্ট একটা সরল দোলকের দোলনকাল 2s এবং বিস্তার 10 cm। দোলনরত অবস্থায় যখন এর বব মধ্যস্থানে আসে তখন ববটি ভূমি হতে 45 cm ওপরে অবস্থান করে।

(ক) দোলনরত ববের সর্বোচ্চ বেগ কত?

(খ) দোলনরত বব যখন মধ্যস্থানে আসে তখন সুতাটি ছিড়ে গেলে এর গতি–প্রকৃতি বিশ্লেষণ করে সাম্যাবস্থান থেকে কতদূরে ভূমিতে পতিত হবে তার গাণিতিক পরিমাপ কর। [কু. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি ববের সর্বোচ্চ বেগ,

$$v_{max} = \omega A$$

আবার, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

এখানে,
$T = 2s$
$A = 10\,cm = 0{\cdot}1\,m$
$v_{max} = ?$

$$\therefore \quad v_{max} = \frac{2\pi}{T} \times A = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 0{\cdot}1}{2} = 0{\cdot}314\ ms^{-1}$$

(খ) ববটি মধ্যস্থান অর্থাৎ সাম্যাবস্থানে যদি সুতাটি ছিড়ে যায় তবে ববটি অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ন্যায় গতিশীল হবে এবং পরাবৃত্তাকার পথে ভূমিতে পতিত হবে। ধরা যাক, ববটি x দূরত্বে ভূমিতে পড়ে।

আমরা জানি,

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

এখানে,
সাম্যাবস্থানে বেগ অর্থাৎ আদি বেগ, $v_0 = 0{\cdot}314\ ms^{-1}$
ভূমি হতে ববের উচ্চতা, $y = 45\,m = 0{\cdot}45\,m$

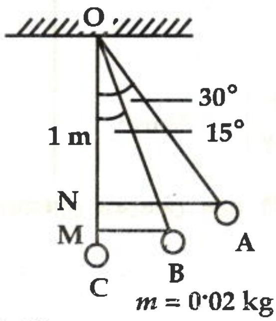
$$\therefore \quad 0{\cdot}45 = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times \left(\frac{x}{0{\cdot}314}\right)^2$$

$$\text{বা,} \quad x^2 = \frac{2 \times 0{\cdot}45 \times (0{\cdot}314)^2}{9{\cdot}8}$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{\frac{2 \times 0{\cdot}45 \times (0{\cdot}314)^2}{9{\cdot}8}}$$

$$= 0{\cdot}095\,m = 9{\cdot}5\,cm$$

১০। নিচের চিত্রে 0·02 kg ভরের একটি বস্তুকে O বিন্দু থেকে 1 m লম্বা সুতার সাহায্যে ঝুলানো হলো। A বিন্দু সর্বোচ্চ বিস্তার নির্দেশ করে যা O বিন্দুতে 30° কোণ উৎপন্ন করে। এটিকে A বিন্দু পর্যন্ত টেনে ছেড়ে দেওয়া হলে এটি দুলতে শুরু করে। ($g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$)



(ক) উদ্দীপকের B বিন্দুতে দোলকটির গতিশক্তি বের কর।

(খ) উদ্দীপকে ব্যবহৃত দোলকটি যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে কি না—গাণিতিক **বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।** [য. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); চ. বো. ২০১৭ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০১৫]

(ক) চিত্রানুসারে,

$$CN = 1 - \cos 30°$$
$$CM = 1 - \cos 15°$$

এখানে,
ববের ভর, $m = 0{\cdot}02\ kg$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
$l = 1\,m$

এখন B বিন্দুতে বেগ v হলে,

$$v^2 = v_0^2 + 2g\,(CN - CM)$$

$$\text{বা,} \quad v^2 = 2g\,(CN - CM) \qquad [\because v_0 = 0]$$

অতএব B বিন্দুতে গতিশক্তি,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0.02 \times 2g\,(CN - CM)$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.02 \times 2 \times 9.8 \times \{(1 - \cos 30°) - (1 - \cos 15°)\}$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.02 \times 2 \times 9.8\,(0.134 - 0.0341)$$
$$= 0.02 \times 9.8 \times 0.1 = 0.0196$$
$$= 1.96 \times 10^{-2}\ J$$

(খ) এখানে, A বিন্দুটি C বিন্দু অপেক্ষা h উচ্চতায় অবস্থিত হলে C বিন্দুর সাপেক্ষে A অবস্থানে ববের বিভবশক্তি $= mgh$। A বিন্দুতে ববের বেগ শূন্য। অতএব A বিন্দুতে ববের গতিশক্তি $= 0$

∴ A বিন্দুতে ববের মোট শক্তি $= mgh + 0 = mgh$

আবার, C বিন্দুতে ববের বিভবশক্তি $= 0$

A হতে C তে আসতে ববের উল্লম্ব সরণ h হলে, C বিন্দুতে ববের বেগ,

$$v^2 = u^2 + 2gh = 0 + 2gh = 2gh$$

∴ C বিন্দুতে ববের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times 2gh = mgh$

∴ C বিন্দুতে ববের মোট শক্তি $= 0 + mgh = mgh$

পুনরায় A বিন্দু হতে ববটি B বিন্দুতে আসতে উল্লম্ব সরণ x হলে, B বিন্দুতে ববের বিভবশক্তি $= mg\,(h - x)$

আবার, B বিন্দুতে বেগ v_1 হলে, $v_1^2 = u^2 + 2gx = 0 + 2gx = 2gx$

∴ B বিন্দুতে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m \times 2gx = mgx$

∴ B বিন্দুতে মোট শক্তি $= mg\,(h - x) + mgx = mgh$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে ববের চলার পথের প্রতিটি বিন্দুতে মোট শক্তি $= mgh$

অতএব, দোলকটি যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে।

১১। একটি সেকেন্ড দোলক 'ক' অঞ্চল থেকে 'খ' অঞ্চলে নেওয়া হলো।

$$g_{ক} = 9.78\ ms^{-2}$$
$$g_{খ} = 9.83\ ms^{-2}$$

(ক) 'ক' অঞ্চলে দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) 'খ' অঞ্চলে দোলকটির দোলনকালের পরিবর্তন ঘটবে কী ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ যুক্তি দাও।

[সি. বো. ২০১৬]

এখানে,
'ক' অঞ্চলে দোলকের দোলনকাল, T = 2 s
'ক' অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_{ক} = 9.78\ ms^{-2}$
'খ' অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_{খ} = 9.83\ ms^{-2}$
'ক' অঞ্চলে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L_{ক} = ?$
'খ' অঞ্চলে দোলকের দোলনকাল, $T_{খ} = ?$
দোলনকালের পরিবর্তন, $\Delta T = T_{খ} \sim T_{ক}$

(ক) আমরা জানি,

$$T_{ক} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{ক}}{g_{ক}}}$$

বা, $$L_{ক} = \frac{T_{ক}^2 \times g_{ক}}{4\pi^2} = \frac{(2)^2 \times 9.78}{4 \times 9.87}$$
$$= 0.9909\ m = 99.09\ cm$$

(খ) $$T_{খ} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{ক}}{g_{খ}}} = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{0.9909}{9.83}}$$
$$= 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.9909}{9.83}}$$
$$= 1.994\ s \simeq 1.99$$

∴ $\Delta T = T_{ক} - T_{খ} = 2 - 1.99 = 0.01\ s$

∴ $T_{খ} < T_{ক}$

অর্থাৎ 'খ' অঞ্চলে দোলনকাল হ্রাস পায়।

১২। রতন কলেজের গ্রীষ্মের ছুটি কাটাতে দাদার বাড়িতে বেড়াতে গিয়ে ধাতব পেন্ডুলামযুক্ত একটি দেয়াল ঘড়ি দেখতে পেল যার পেন্ডুলামটি 1 s সময়ে বাম দিক হতে ডান দিকে যায়। ঘড়িটিকে পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গেলে 120 s সময় হারাল। [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6450$ km, $g = 9.8\ ms^{-2}$]

(ক) উদ্দীপকের আলোকে পাহাড়ের উচ্চতা কত?

(খ) ঘড়িটিকে পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে যাওয়ার পরও দোলনকাল অপরিবর্তিত রাখতে কী ব্যবস্থা নিতে হবে—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [চ. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০২১ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০১৯; সি. বো. ২০১৯ (মান ভিন্ন); BUET Admission Test, 2017-18]

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় প্রতি ঘণ্টায় প্রাপ্ত অর্ধ দোলন সংখ্যা = 3600 — 120 = 3480

যেহেতু 3480 সংখ্যক দোলন দেয় 3600 সেকেন্ডে

∴ 1 " " " $\dfrac{3600}{3480}$ "

2 " " " $\dfrac{3600 \times 2}{3480} = 2.069$ s

∴ দোলনকাল, $T_2 = 2.069$ s

ঘড়িটির দোলনকাল, $T_1 = 2$ s

আমরা জানি পাহাড়ের উচ্চতা, $h = \left(\sqrt{\dfrac{g}{g'}} - 1\right)R$

যেহেতু $\dfrac{T_2}{T_1} = \sqrt{\dfrac{g}{g'}}$

$$\therefore \quad h = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)R = \left(\frac{2.069}{2} - 1\right) \times 6450 \times 10^3$$

$$= 222525 \text{ m} = 222.525 \text{ km}$$

(খ) পাহাড়ের চূড়ায় দোলনকাল অপরিবর্তিত রাখতে হলে পেন্ডুলামটির দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করতে হবে।

ধরা যাক পাহাড়ের চূড়ায়, অভিকর্ষজ ত্বরণ $= g'$

আমরা জানি, $g' = g\left(1 - \dfrac{2h}{R}\right)$

$$\therefore \quad g' = 9.8\left(1 - \frac{2 \times 222525}{6450000}\right)$$

$$= 9.8\left(\frac{6450000 - 445050}{6450000}\right)$$

$$= 9.124\ ms^{-2}$$

আবার,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}} \text{ এবং } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g_2}}$$

প্রশ্নানুসারে, $T_1 = T_2$

$$\therefore \quad 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g_2}}$$

বা, $\dfrac{L_1}{g_1} = \dfrac{L_2}{g_2} \quad \therefore \quad L_2 = L_1 \times \dfrac{g_2}{g_1}$

$\therefore \quad L_2 = 0.993 \times \dfrac{9.124}{9.8}$ [এখানে, $T_1 = 2$ s; এটি সেকেন্ড দোলক $\therefore L_1 = 0.993$ m]

$= 0.9245$ m

সুতরাং, পাহাড়ের ওপরে পেন্ডুলামটির দৈর্ঘ্য 0.9245 m করলে একই দোলনকাল পাওয়া যাবে। অতএব, পেন্ডুলামটির দৈর্ঘ্য $0.993 - 0.9245 = 0.0685$ m $= 6.85$ cm কমাতে হবে।

১৩। পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের সুতার দৈর্ঘ্য 99 cm এবং ববের ব্যাস 0·6 cm। দোলকটিকে মঙ্গল গ্রহে নিয়ে যাওয়া হলো। মঙ্গল গ্রহের ভর পৃথিবীর ভরের 0·11 গুণ এবং ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের 0·532 গুণ।

(ক) পৃথিবী পৃষ্ঠে দোলকটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে দোলকটির কম্পাঙ্কের শতকরা পরিবর্তন গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[ম. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

এখানে,

$l = 99 + \frac{0·6}{2} = 99·3 \text{ cm} = 0·993 \text{ m}$

$g = 9·8 \text{ ms}^{-2}$

$$\therefore \quad T = 2 \times 3·14\sqrt{\frac{0·993}{9·8}} = 1·999$$

$$\therefore \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1·999} = 0·5 \text{ Hz}$$

(খ) প্রশ্নানুসারে মঙ্গল গ্রহের ভর,

$$M' = 6 \times 10^{24} \times 0·11 = 6·6 \times 10^{23} \text{ kg}$$

এবং ব্যাসার্ধ, $R' = 6·4 \times 10^6 \times 0·532 = 3·4 \times 10^6$ m

$$\therefore \quad \text{মঙ্গল গ্রহে, } g' = \frac{GM'}{R'^2} = \frac{6·67 \times 10^{-11} \times 6·6 \times 10^{23}}{(3·4 \times 10^6)^2} = 3·8 \text{ ms}^{-2}$$

$$\therefore \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2 \times 3·14 \times \sqrt{\frac{0·993}{3·8}} = 3·21$$

$$\therefore \quad f' = \frac{1}{T} = \frac{1}{3·21} = 0·3 \text{ Hz}$$

সুতরাং, দোলকটির কম্পাঙ্কের শতকরা পরিবর্তন $= (0·5 - 0·3) \times 100\% = 20\%$

১৪। পৃথিবীর পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের সুতার দৈর্ঘ্য 80 cm এবং ববের ব্যাস 4 cm। সরল দোলকটি 100 cm বিস্তার নিয়ে স্পন্দিত হচ্ছে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6·4 \times 10^6$ m এবং $g = 9·8$ ms^{-2}।

(ক) পৃথিবীর পৃষ্ঠে সরল দোলকের সর্বোচ্চ বেগ নির্ণয় কর।

(খ) সরল দোলকটিকে 10 km উচ্চতার পাহাড়ের চূড়ায় নিলে দোলনকালের কী পরিবর্তন হবে তা গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [ম. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি সরল দোলকের সর্বোচ্চ বেগ,

$$v_{max} = \omega A$$

আবার,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

এখানে,

$A = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$

$l = 80 \text{ cm} + \frac{4}{2} \text{ cm} = 82 \text{ cm} = 0·82 \text{ m}$

$g = 9·8 \text{ ms}^{-2}$

$$\therefore \quad T = 2 \times 3·14\sqrt{\frac{0·82}{9·8}} = 1·816 \text{ s}$$

এখন, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3·14}{1·816} = \frac{6·28}{1·816} = 3·46 \text{ s}^{-1}$

$$\therefore \quad v_{max} = 3·46 \times 1 = 3·46 \text{ ms}^{-1}$$

(খ) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ এবং $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}$

এখানে, T ও T_1 যথাক্রমে পাহাড়ের পাদদেশে ও পাহাড়ের চূড়ায় সরল দোলকের দোলনকাল।

$$\sqrt{\frac{g}{g_1}} = 1 + \frac{h}{R} \quad \text{বা, } \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g}} \quad \text{বা, } \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_1}}$$

$\therefore \quad \frac{T_1}{T} = 1 + \frac{h}{R} \quad$ বা, $T_1 = T\left(1 + \frac{h}{R}\right)$

$\therefore \quad T_1 = 1.816 \times \left(1 + \frac{10 \times 10^3}{6.4 \times 10^6}\right) \quad [\because h = 10 \text{ km} = 10 \times 10^3 \text{ m}]$

$= 1.816 \times (1 + 1.56 \times 10^{-3})$

$= 1816\ (1 + 0.00156)$

$= 1.816 \times 1.00156 = 1.819 \text{ s}$

অর্থাৎ দোলনকাল $1.819 - 1.816 = 0.0283$ sec বৃদ্ধি পাবে।

১৫। ভূপৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দোলনকাল 2 sec এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 9.81 ms^{-2}। 8.85 km উঁচু A পাহাড়ের নিকটবর্তী অপর একটি পাহাড় B-তে নিয়ে সরল দোলককে দোলালে তা এক ঘণ্টায় 1780টি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে।

(ক) সরল দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য কত?

(খ) B পাহাড়টির উচ্চতা A পাহাড়ের তুলনায় বেশি উঁচু কি না—গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। [রা. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\therefore \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

$$\therefore \quad L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2)^2 \times 9.81}{4\pi^2} = 0.993 \text{ m}$$

এখানে,
দোলনকাল, $T = 2$ s
$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$
$h_A = 8.85$ km
$L = ?$

(খ) B পাহাড়ের দোলনকাল $T' = \frac{3600}{1780} = 2.0224719$ s

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{T'}{T} = \frac{R + h_B}{R}$$

$$\therefore \quad \text{উচ্চতা, } h_B = \left(\frac{T'}{T} - 1\right) R = \left(\frac{2.0224719}{2} - 1\right) \times 6.4 \times 10^6$$

$$= 71910 \text{ m} = 71.91 \text{ km}$$

A পাহাড়ের উচ্চতা, $h_A = 8.85$ km

$\therefore \quad h_B > h_A$, অর্থাৎ B পাহাড়টি A পাহাড়ের তুলনায় $(71.91 - 8.85)$ km $= 63.06$ km বেশি উঁচু।

১৬। একটি স্প্রিং–এ 80 gm ভর চাপালে 2 cm দৈর্ঘ্য প্রসারণ হয় এবং 600 gm ভর চাপালে 8 cm দৈর্ঘ্য প্রসারণ হয়। অরনী উক্ত স্প্রিং–এর সাম্যাবস্থান হতে 1 cm দৈর্ঘ্য প্রসারণ পর্যবেক্ষণ করলো।

(ক) স্প্রিং ধ্রুবকের মান বের কর।

(খ) অরনী উভয় ভরের ক্ষেত্রে স্প্রিংটির সঞ্চিত শক্তির কীরূপ পরিবর্তন পর্যবেক্ষণ করেছিল গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [দি. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি,

$$F_1 = K_1 x_1$$

বা, $m_1 g = K_1 x_1$

$$\therefore \quad K_1 = \frac{m_1 g}{x_1} = \frac{0.08 \times 9.81}{0.02}$$

$$= 39.24 \text{ Nm}^{-1}$$

এখানে,
১ম ক্ষেত্রে,
স্প্রিং-এ চাপানো ভর, $m_1 = 80$ gm $= 0.08$ kg
দৈর্ঘ্য প্রসারণ, $x_1 = 2$ cm $= 0.02$ m
স্প্রিং ধ্রুবক, $K_1 = ?$
$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$

আবার ২য় ক্ষেত্রে,

$F_2 = K_2x_2$

বা, $m_2g = K_2x_2$

$\therefore K_2 = \frac{m_2g}{x_2} = \frac{0^{\cdot}6 \times 9^{\cdot}81}{0^{\cdot}08}$

$= 73^{\cdot}6\ Nm^{-1}$

এখানে,
স্প্রিং-এ চাপানো ভর, $m_2 = 600\ gm = 0^{\cdot}6\ kg$
দৈর্ঘ্য প্রসারণ, $x_2 = 8\ cm = 0^{\cdot}08\ m$
$g = 9^{\cdot}81\ ms^{-2}$
স্প্রিং ধ্রুবক, $K_2 = ?$

উল্লেখ্য প্রদত্ত তথ্যের আলোকে একই স্প্রিংয়ের স্প্রিং ধ্রুবক K-এর মান ভিন্ন ভিন্ন।

(খ) অরনীর পর্যবেক্ষণ থেকে পাই,

প্রথম ভরের ক্ষেত্রে সঞ্চিত শক্তি,

$U_1 = \frac{1}{2}F_1l_1 = \frac{1}{2}m_1gl_1$

$= \frac{1}{2} \times 0^{\cdot}08 \times 9^{\cdot}81 \times 0^{\cdot}02$

$= 7^{\cdot}85 \times 10^{-3}\ J$

এখানে,
ভর, $m_1 = 80\ gm = 0^{\cdot}08\ kg$
$g = 9^{\cdot}81\ ms^{-2}$
দৈর্ঘ্য প্রসারণ, $l_1 = 2\ cm = 0^{\cdot}02\ m$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সঞ্চিত শক্তি,

$U_2 = \frac{1}{2}F_2l_2 = \frac{1}{2}m_2gl_2$

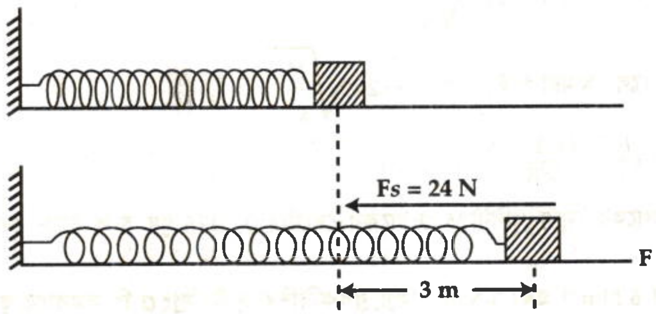
$= \frac{1}{2} \times 0^{\cdot}6 \times 9^{\cdot}8 \times 0^{\cdot}08$

$= 0^{\cdot}235\ J$

এখানে,
ভর, $m_2 = 600\ gm = 0^{\cdot}6\ kg$
$g = 9^{\cdot}81\ ms^{-2}$
দৈর্ঘ্য প্রসারণ, $l_2 = 8\ cm = 0^{\cdot}08\ m$

অতএব, অরনী উদ্দীপকের তথ্যের আলোকে প্রথম ভরের চেয়ে দ্বিতীয় ভরের ক্ষেত্রে বেশি সঞ্চিত শক্তি পর্যবেক্ষণ করে।

১৭। নিচের চিত্রে অতি নগণ্য ভরের একটি স্প্রিংকে অনুভূমিক মসৃণ টেবিলের উপর রেখে এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনে আটকিয়ে অপর প্রান্তে 3·5 kg ভর যুক্ত করা হয়েছে। বস্তুটিকে সাম্যাবস্থান হতে 3m সরণ ঘটালে স্প্রিংটিতে 24N প্রত্যায়নক বল ক্রিয়া করে।



(ক) প্রসারিত অবস্থা হতে ছেড়ে দিলে স্প্রিংটি কত কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হবে?

(খ) স্প্রিং–এ সংযুক্ত ভরের কীরূপ পরিবর্তন করলে স্প্রিংটি সেকেন্ড দোলকে পরিণত হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও। [ব. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি,

$F = -Kx$

$\therefore K = \frac{F}{x} = \frac{24}{3} = 8\ Nm^{-1}$ [ঋণাত্মক চিহ্ন বাদ দিয়ে]

এখানে,
$F = 24N$
$x = 3m$
$m = 3^{\cdot}5\ kg$

আবার, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ বা, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2 \times 3^{\cdot}14}\sqrt{\frac{8}{3^{\cdot}5}} = 0^{\cdot}24\ Hz$

(খ) আমরা জানি সেকেন্ড দোলকের, $T = 2s$

এখন, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ বা, $m = \frac{T^2K}{4\pi^2} = \frac{4 \times 8}{4 \times 9.87} = 0.81$ kg

অর্থাৎ স্প্রিং-এ সংযুক্ত ভর 0.81 kg হলে অর্থাৎ $(3.5 - 0.81) = 2.69$ kg ভর হ্রাস করলে দোলকটি সেকেন্ড দোলক হবে।

১৮। একটি সেকেন্ড দোলক ভূপৃষ্ঠে সঠিক সময় দেয়। একে চাঁদে নিয়ে গিয়ে দোলানো হলো। [পৃথিবীর ভর চাঁদের ভরের 81 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চাঁদের ব্যাসার্ধের 4 গুণ]

(ক) চাঁদে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

(খ) কী যান্ত্রিক ব্যবস্থা গ্রহণ করলে উদ্দীপকের দোলকটির দোলনকাল অপরিবর্তিত থাকবে—তার গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও। [সি. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি,

$g = \frac{Gm}{R^2}$; এখানে m = পৃথিবীর ভর এবং R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ

চাঁদে অভিকর্ষজ ত্বরণ g' হলে আমরা পাই,

$$g' = \frac{GM'}{R'^2}$$

$$\therefore g' = \frac{G \times \frac{M}{81}}{\left(\frac{R}{4}\right)^2} = \frac{16\,GM}{81\,R^2}$$

$$= \frac{16}{81}g = \frac{16}{81} \times 9.81$$

$$= 1.938\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,

m' = চাঁদের ভর $= \frac{M}{81}$

R' = চাঁদের ব্যাসার্ধ $= \frac{R}{4}$

(খ) আবার দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

চাঁদে দোলকটির দোলনকাল, $T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$

প্রশ্নানুসারে $T = T'$ হলে, আমরা পাই, $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$

বা, $\frac{l}{g} = \frac{l'}{g'}$ বা, $l' = \frac{lg'}{g} = \frac{l \times 1.938}{9.81} = 0.1975\,l$

অর্থাৎ, সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য পৃথিবীতে দোলকের দৈর্ঘ্যের 0.1975 গুণ হলে চাঁদে দোলকটি সেকেন্ড দোলক হিসেবে ক্রিয়া করবে।

১৯। কোনো স্থানে 6 Nm^{-1} এবং 3 Nm^{-1} স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট দুটি স্প্রিং শ্রেণি সমবায়ে যুক্ত আছে। এ অবস্থায় এদের উপর 0.6N বল প্রয়োগ করা হলো। উক্ত স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান, $g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$।

(ক) প্রথম স্প্রিং কতটুকু প্রসারিত হবে নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের স্প্রিং দুটিকে শ্রেণি সমবায়ের পরিবর্তে সমান্তরাল সমবায়ে যুক্ত করলে উভয় সমবায়ের মিলিত স্পন্দনের কম্পাঙ্ক এক না ভিন্ন হবে—গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [সি. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি শ্রেণি সমবায়ে কার্যকর বল ধ্রুবক,

$$K_S = \frac{K_1K_2}{K_1 + K_2} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = \frac{18}{9} = 2$$

আবার, $F = Kx \;\therefore x = \frac{F}{K_S} = \frac{0.6}{2} = 0.3$ m

এখানে,

$K_1 = 6\ \text{Nm}^{-1}$

$K_2 = 3\ \text{Nm}^{-1}$

$F = 0.6$ N

$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

(খ) শ্রেণি সমবায়ের ক্ষেত্রে দোলনকাল, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_S}}$

বা, $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_S}{m}}$; আবার $F = mg \therefore m = \frac{0.6}{9.8} = 0.0612$ kg

$\therefore f_1 = \frac{1}{2\times 3.14}\sqrt{\frac{2}{0.0612}} = 0.91$ Hz

এবং সমান্তরাল সমবায়ের জন্য, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_P}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1+K_2}}$ বা, $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}$

$\therefore f_2 = \frac{1}{2\times 3.14}\sqrt{\frac{9}{0.0612}} = 1.93$ Hz

সুতরাং, শ্রেণি সমবায় ও সমান্তরাল সমবায়ের ক্ষেত্রে স্পন্দনের কম্পাঙ্ক এক হবে না; ভিন্নতর হবে।

২০। একটি স্প্রিংকে (ভর উপকেন্দ্রীয়) উল্লম্বভাবে ঝুলিয়ে এর নিচ প্রান্তে 300 gm ভরের একটি বস্তুকে মুক্তভাবে ঝুলিয়ে দিলে এটি 4 cm প্রসারিত হয় এবং বস্তুটিকে একটু টেনে ছেড়ে দিলে 8 cm বিস্তারে এটি স্পন্দিত হয়। [$g = 9.8$ ms^{-2}]

(ক) বস্তুটির ত্বরণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের বস্তুটির ভর 500 gm হলে স্প্রিংটির কম্পাঙ্কের পরিবর্তন গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

[ম. বো. ২০২১]

(ক) আমরা জানি বস্তুটির সর্বোচ্চ ত্বরণ,

$a_{max} = \omega^2 A$

এখানে,
$l = 4$ cm $= 0.04$ m
$g = 9.8$ ms^{-2}

এখন, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\therefore T = 2\times 3.14\sqrt{\frac{0.04}{9.8}} = 0.4$s

সুতরাং $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{0.4} = 15.7$ rads^{-1}

$\therefore a_{max} = (15.7)^2 \times 0.08$
$= 19.7$ ms^{-2}

এখানে,
$A = 8$ cm $= 0.08$

(খ) আমরা জানি প্রথম দোলকের জন্য,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এবং দ্বিতীয় দোলকের জন্য,

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) কে সমীকরণ (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (iii)$$

বা, $T_2^2 = \frac{T_1^2 \times m_2}{m_1}$

$\therefore T_2 = \sqrt{\frac{(0.4)^2\times 0.5}{0.3}} = 0.516$

এখানে,
$T_1 = 0.4$s
$m_2 = 500$ gm $= 0.5$ kg
$m_1 = 300$ g $= 0.3$ kg

$\therefore f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0.516} = 1.94$ Hz

এখন, $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0.4} = 2.5$ Hz

স্প্রিংটির কম্পাঙ্কের পরিবর্তন $2.5 - 1.94 = 0.56$ Hz কম হবে।

২১। অত্যধিক ঠান্ডার কারণে 'P' স্থানে একটি সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল এমনভাবে পরিবর্তিত হলো যে, এটা দিনে 15 সেকেন্ড দ্রুত চলে। পরে এই দোলকটিকে একই তাপমাত্রার অপর একটি স্থান 'N' স্থানে নেয়া হলো। P স্থানের চেয়ে N স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ 5% কম। [$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$]

(ক) P স্থানে সেকেন্ড দোলকটির পরিবর্তিত দোলনকাল হিসাব কর।

(খ) দোলকটিকে 'N' স্থানে সেকেন্ড দোলক হিসেবে ব্যবহারের জন্য কী পরিবর্তন করতে হবে ? গাণিতিক ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০২১]

(ক) দোলকটি দিনে $(60 \times 60 \times 24) = 86400$ সংখ্যক অর্ধ দোলন দেয়

P স্থানে দোলকটি $86400 + 15 = 86415$ সংখ্যক অর্ধ দোলন দেয়

$\therefore$ 1টি অর্ধদোলকের জন্য দোলন কাল $= \dfrac{86400}{86415}$

$\therefore$ 2টি অর্ধদোলকের জন্য দোলন কাল $= \dfrac{86400 \times 2}{86415} = 1{\cdot}99965$ s

$\therefore$ $T_2 = 1{\cdot}99965$ s

(খ) N স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ $g' = g - \dfrac{5}{100} \times g = 9{\cdot}8 - 0{\cdot}05 \times 9{\cdot}8 = 9{\cdot}31\ ms^{-2}$

আমরা জানি, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g'}}$ বা, $T^2 = 4\pi^2 \dfrac{l'}{g'}$

সেকেন্ড দোলকের ক্ষেত্রে, T = 2s

$\therefore$ $4 = 4 \times 9{\cdot}87 \times \dfrac{l'}{9{\cdot}31}$ বা, $l' = \dfrac{4 \times 9{\cdot}31}{4 \times 9{\cdot}87} = 0{\cdot}943$ m

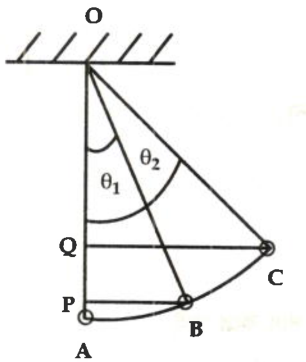
দোলকটির দৈর্ঘ্য $= 0{\cdot}943$m

আবার সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য $= 0{\cdot}993$ m

$\therefore$ দোলকটি দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= 0{\cdot}993 - 0{\cdot}943 = 0{\cdot}05$m

অর্থাৎ দোলকটির দৈর্ঘ্য 0·05m বৃদ্ধি করলে এটি N স্থানে সেকেন্ড দোলক হিসেবে ব্যবহার করা যাবে।

২২।



চিত্রে একটি সরল দোলক যার সুতার দৈর্ঘ্য 1·1m এবং ববের ব্যাসার্ধ 1·5 cm, ভর 60 g এবং OA সাম্যাবস্থান। চিত্রে QC = 3 cm এবং PB = 2 cm। [$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$]

(ক) সরল দোলকটির দোলনকাল হিসাব কর।

(খ) সরল দোলকটির A, B ও C বিন্দুতে কার্যকর বলের মানের তুলনামূলক গাণিতিক বিশ্লেষণ কর। [কু. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি সরল দোলকের দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{\cdot}115}{9{\cdot}8}} = 2{\cdot}12 \text{ sec}$$

এখানে,

কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L = l + r = 1{\cdot}1\text{ m} + 1{\cdot}5\text{ cm} = 1{\cdot}1\text{ m} + 0{\cdot}015\text{ m} = 1{\cdot}115\text{ m}$

$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

(খ) আমরা জানি,

$F = ma$

সরল দোলকের ক্ষেত্রে, $a = -g\sin\theta$

θ-এর মান 4° অপেক্ষা কম হলে, $\sin\theta = \theta$ লেখা যায়। অতএব,

$a = -g\theta$

A বিন্দুর জন্য, $\theta = 0°$

$\therefore \quad a = -g \times 0 = 0$

$\therefore \quad F = m \times a = 0$

B বিন্দুর জন্য, $a = -g\theta_1 = -g\dfrac{PB}{OB}$

$= -g \times \dfrac{0·02}{1·115}$

এখানে,
$OB = L = 1·115$ m
$PB = 2$ cm $= 0·02$ m

$\therefore \quad F = ma$

$= m \times \left(-g \times \dfrac{0·02}{1·115}\right)$

$= -60 \times 10^{-3} \times \left(9·8 \times \dfrac{0·02}{1·115}\right)$

$= -1·05 \times 10^{-2}$ N

এখানে,
$PB = 2$ cm $= 0·02$ m
$OB = L = 1·115$ m
$m = 60$ g
$= 60 \times 10^{-3}$ kg

C বিন্দুর জন্য, $a = -g\theta_2$

$\therefore \quad F = ma = m(-g\theta_2)$

$= -mg.\dfrac{QC}{OC}$

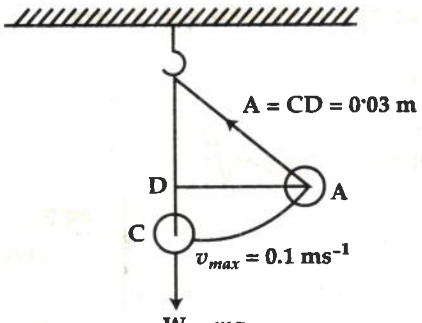
$= -60 \times 10^{-3} \times 9·8 \times \dfrac{0·03}{1·115}$

$= 1·58 \times 10^{-2}$ N

এখানে,
$QC = 3$ cm $= 0·03$ m
$OC = L = 1·115$ m
$g = 9·8$ ms^{-2}
$m = 60 \times 10^{-3}$ kg

$\therefore$ A, B ও C বিন্দুর কার্যকর বল যথাক্রমে 0 N, $1·05 \times 10^{-2}$ N এবং $1·58 \times 10^{-2}$ N

২৩।

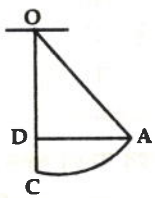


আদিবা পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবে একটি সরল দোলক (চিত্রানুযায়ী) নিয়ে কাজ করছিল। সে একটি নির্দিষ্ট সরণে সাম্যাবস্থা থেকে সরল দোলকটির বিভব শক্তি ও গতিশক্তি সমান পেল।

(ক) উদ্দীপকের সরল দোলকটির পর্যায়কাল কত?

(খ) আদিবার পরীক্ষায় লব্ধ ফলাফল সমর্থনযোগ্য কি না—গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০১৭]

C সাম্যাবস্থান, A সর্বোচ্চ অবস্থা অর্থাৎ বিস্তার, $A = CD = 0·03$ m



(ক) আমরা জানি,

$v_{max} = \omega A$

বা, $0·1 = \dfrac{2\pi}{T} \times 0·03$

বা, $T = 1·9$ sec

(খ) ধরি, CD রেখায় C হতে x দূরত্বে বিভব শক্তি, $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ এবং

গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m\omega^2(\sqrt{A^2 - x^2})^2$ সমান।

অর্থাৎ, $\frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\sqrt{A^2 - x^2}$

বা, $x^2 = A^2 - x^2$

বা, $2x^2 = A^2$

বা, $x^2 = \frac{A^2}{2}$

$\therefore \quad x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm\frac{0.03}{\sqrt{2}}$

$= \pm 0.02$ m (প্রায়)

অর্থাৎ, সাম্যাবস্থান হতে উভয় দিকে 0·02 m দূরে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির মান সমান হবে।

অর্থাৎ, আদিবার পরীক্ষার ফলাফল সমর্থনযোগ্য।

২৪। A-স্থানে একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য 1m এবং B-স্থানে 0·9m। দোলকে ব্যবহৃত ববের ব্যাসার্ধ 0·75 cm।

(ক) A দোলকটির ববের কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।

(খ) A হতে B-তে কোনো বস্তু নিয়ে গেলে বস্তুটির ওজন বাড়বে না কমবে? তোমার উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক বিশ্লেষণ কর। [দি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি, সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল T = 2s এবং সরলছন্দিত স্পন্দনের ক্ষেত্রে, কৌণিক বেগ ω।

কৌণিক বেগ, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2}$

$= \pi = 3.14 \text{ rads}^{-1}$

(খ) A ও B স্থানে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য ও অভিকর্ষজ ত্বরণ যথাক্রমে L_A, L_B এবং g_A ও g_B হলে,

আমরা জানি, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, সুতরাং,

A স্থানে, $T_A = 2\pi\sqrt{\frac{L_A}{g_A}}$ এবং B স্থানে, $T_B = 2\pi\sqrt{\frac{L_B}{g_B}}$

যেহেতু $T_A = T_B$

$\therefore \quad \sqrt{\frac{L_A}{g_A}} = \sqrt{\frac{L_B}{g_B}}$

বা, $\frac{g_A}{g_B} = \frac{L_A}{L_B}$

বা, $\frac{mg_A}{mg_B} = \frac{1 + 0.75 \times 10^{-2}}{0.9 + 0.75 \times 10^{-2}}$

বা, $\frac{W_A}{W_B} = \frac{1.0075}{0.9075}$

$= 1.11$

$\therefore \quad W_A = 1.11\, W_B$

বা, $W_B = 0.9\, W_A$

এখানে,

ববের ব্যাসার্ধ, $r = 0.75$ cm

$= 0.75 \times 10^{-2}$ m

$L_A = 1 + 0.0075 = 1.0075$ m

$L_B = 0.9 + 0.0075 = 0.9075$ m

A স্থানে m ভরের বস্তুর ওজন, B স্থানে m বস্তুর ওজন অপেক্ষা বেশি।

আবার, A হতে m ভরের বস্তুটিকে B-তে নিলে ওজন কমবে।

২৫। পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবে ব্যবহৃত একটি সেকেন্ড দোলকের গ্রীষ্মকালে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাওয়ায় দোলনকাল ২.১s হয়। সঠিক সময় পাওয়ার জন্য একজন ছাত্র এর দৈর্ঘ্য 2% কমিয়ে দেয়। ($g = 9.81\ ms^{-2}$)

(ক) স্বাভাবিক অবস্থায় দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে ছাত্রটি সফল হবে কি না—গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [কু. বো. ২০২৩]

(ক) আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $$T^2 = 4\pi^2 \times \frac{L}{g}$$

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9.81 \times (2)^2}{4 \times 9.87} = 0.993\ m$$

এখানে,
দোলনকাল, $T = 2\ sec$
কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L = ?$

(খ) সরল দোলকের সূত্রানুযায়ী,

$$T \propto \sqrt{L}$$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

ধরি, গ্রীষ্মকালে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাওয়ায় কার্যকরী দৈর্ঘ্য $= L_2$

$$\therefore \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{L_2}{L_1}$$

$$L_2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \times L_1$$

$$= \left(\frac{2.1}{2}\right)^2 \times 0.993$$

$$= 1.0947\ m$$

এর দৈর্ঘ্য 2% কমিয়ে দিলে পরিবর্তিত কার্যকরী দৈর্ঘ্য,

$$L_2' = L_2 - L_2 \times 2\%$$

$$= 1.0947 - \frac{1.0947 \times 2}{100}$$

$$= 1.07283\ m$$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য 2% কমিয়ে দিলে দোলনকাল,

$$T_2' = 2\pi\sqrt{\frac{L_2'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.07283}{9.81}} = 2.07785\ sec$$

অর্থাৎ দৈর্ঘ্য 2% কমিয়ে দেওয়ায় দোলকাল হবে 2.07785 sec যা সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল 2 sec এর চেয়ে বেশি। তাই ছাত্রটি সফল হবে না।

২৬। একটি সেকেন্ড দোলকের সিলিন্ডার আকৃতির বব পানিপূর্ণ অবস্থায় আছে। ববের দৈর্ঘ্য ৮ cm।

(ক) দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) ববটি অর্ধেক খালি করলে তখন দোলকটি দ্রুত না ধীরে চলবে? গাণিতিকভাবে যাচাই করে মতামত দাও। [ব. বো. ২০২৩]

(ক) আমরা জানি, দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $$T^2 = 4\pi^2 \times \frac{L}{g}$$

$$\therefore L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9.8 \times (2)^2}{4 \times 3.14}$$

$$\therefore L = 0.993\ m$$

এখানে,
$g = 9.8\ ms^{-2}$
$T = 2\ sec$
$L = ?$

(খ) 'ক' থেকে পাই,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L = 0.993$ m

এখানে,

$h = \frac{8}{2} = 4$ cm

$L = 0.04$ m

আমরা জানি,

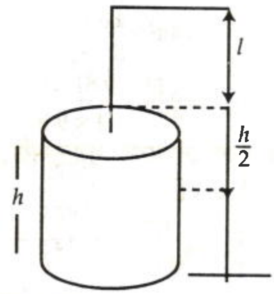
$$L = l + \frac{h}{2}$$

$\therefore$ $L = l + 0.04$

$l = L - 0.04 = (0.993 - 0.04)$ m $= 0.953$ m

ববটি অর্ধেক খালি করলে ববের ভার কেন্দ্রের সরণ,

$$r = \frac{h}{2} - \frac{h}{4} = \frac{h}{4} \text{m}$$



$\therefore$ দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য,

$$L' = l + \frac{h}{2} + r$$

$$= 0.53 + \frac{0.08}{2} + \frac{0.08}{4}$$

$$= 1.013 \text{ m}$$

এই অবস্থায় পরিবর্তিত দোলনকাল T' হলে,

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}} = 2 \times 3.14\sqrt{\frac{1.013}{9.8}} = 2.02 \text{ sec}$$

দেখা যায় যে, $T' > T$, অর্থাৎ ববটি অর্ধেক খালি করলে দোলকাল বেড়ে যাবে। অর্থাৎ দোলকটি ধীরে চলবে।

২৭। 2 kg ভরের একটি বস্তু 20 cm বিস্তার নিয়ে $5\frac{d^2x}{dt^2} + 625x = 0$ সমীকরণ অনুসারে কম্পিত হচ্ছে। কম্পন শুরুর 2 sec পরে গতিশক্তি K_1 এবং 2.5 sec পর গতিশক্তি K_2 হয়।

(ক) বস্তুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের K_1 ও K_2-এর মান একই হবে কী? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [সি. বো. ২০২৪]

(ক) এখানে,

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 625x = 0$$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} + 125x = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$

আমরা জানি, সরল দোলন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

(i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$\omega^2 = 125$

বা, $\omega = \sqrt{125}$

$\therefore$ $2\pi f = \sqrt{125}$

$$f = \frac{\sqrt{125}}{2\pi} = 1.78 \text{ Hz}$$

(খ) 'ক' থেকে পাই কৌণিক বেগ,

$\omega = \sqrt{125}$ rads^{-1}

আমরা জানি সরণ,

এখানে,

$m = 2$ kg

$A = 20$ cm $= 0.2$ m

$t_1 = 2$ sec

$x_1 = A \sin \omega t$

$= 0.2 \sin(\sqrt{125} \times t_1)$

$t_1 = 2$ sec হলে

$x_1 = 0.2 \sin(\sqrt{125} \times 2)$

$\therefore$ $x_1 = -0.0722$ m

$\therefore$ বেগ, $v_1 = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$

$= \sqrt{125} \times \sqrt{(0.2)^2 - (0.0722)^2}$

$= 2.085\ ms^{-1}$

$\therefore$ গতিশক্তি,

$K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (2.085)^2 = 4.348\ J$

আবার, $t_2 = 2.5$ sec-এ সরণ $x = 0.2 \sin(\sqrt{125} \times 2.5) = 0.063\ m$

সুতরাং বেগ, $v_2 = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{125} \times \sqrt{(0.2)^2 - (0.0636)^2} = 2.12\ ms^{-1}$

$\therefore$ গতিশক্তি, $K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (2.12)^2 = 4.49\ J$

এখানে, $K_1 \neq K_2$, সুতরাং K_1 ও K_2 এর মান একই হবে না।

২৮। সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দনশীল 0.1 kg ভরের কোনো কণার সরণের সমীকরণ $x = 0.1 \sin\left(0.5\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$ (সকল রাশি এসআই এককে প্রকাশিত)।

(ক) সর্বোচ্চ বিস্তারে কণাটির উপর ক্রিয়ারত প্রত্যয়নী বল বের কর।

(খ) $t = 0.5$ সেকেন্ডে ও $t = 0.75$ সেকেন্ড সময়ে কণার যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা যাচাই কর। [য. বো. ২০২৪]

(ক) আমরা জানি,

$x = A \sin(\omega t + \delta)$ … … … (i)

$x = 0.1 \sin\left(0.5\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$ … … … (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

বিস্তার, $A = 0.1\ m$

কৌণিক বেগ, $\omega = 0.5\pi$

$\delta = \frac{\pi}{5}$

$\therefore$ সর্বোচ্চ বিস্তারের ত্বরণ,

$a = -\omega^2 A$

$= -(0.5\pi)^2 \times 0.1$

$= -0.2467\ ms^{-2}$

বল, $F = ma = 0.1 \times (-0.2467)$

$= -0.02467\ N$

(— ve চিহ্ন প্রত্যয়নী বল নির্দেশ করে)

(খ) আমরা জানি বিভব শক্তি,

$E_P = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$

ও গতিশক্তি, $E_K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$

$\delta = \frac{\pi}{5}$, $t = 0.5$ sec

$\therefore K_{P_1} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$

$= \frac{1}{2} \times 0.1 \times (0.5\pi)^2 \times (0.1)^2 \left[\sin\{(0.5\pi \times 0.5) + \frac{\pi}{5}\}\right]^2$

$= 1.2035 \times 10^{-3}\ J$

এবং $E_{K_1} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$

$= \frac{1}{2} \times 0.1 \times (0.5\pi)^2 \times (0.1)^2 \left[\cos\{(0.5\pi \times 0.5) + \frac{\pi}{5}\}\right]^2$

$= 3.019 \times 10^{-5}\ J$

যান্ত্রিক শক্তি বা কণাটির মোট শক্তি,

$$E_1 = K_{P_1} + E_{K_1} = (1.2035 \times 10^{-3} + 3.019 \times 10^{-5})$$
$$= 1.233 \times 10^{-3}\ J$$

অনুরূপভাবে, $t = 0.75$ sec এর ক্ষেত্রে আমরা পাই,

কণাটির বিভবশক্তি, $E_{P_2} = 1.166 \times 10^{-3}\ J$

এবং গতিশক্তি, $E_{K_2} = 6.72 \times 10^{-5}\ J$

যান্ত্রিকশক্তি বা মোট শক্তি,

$$E_1 = E_{P_2} + E_{K_2} = (1.166 + 10^{-3} + 6.72 \times 10^{-5})\ J$$
$$= 1.233 \times 10^{-3}\ J$$

এখানে, $E_1 = E_2$ কাজেই $t = 0.5$ sec ও $t = 0.75$ sec এ যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা পরিলক্ষিত হয়।

২৯। পৃথিবীর কেন্দ্র হতে $\frac{2R}{3}$ ও $\frac{4R}{3}$ দূরে দুটি অবস্থান A ও B। এখানে পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R = 6400 km। পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি সেকেন্ড দোলক সঠিক সময় দেয় এবং এর দোলনের বিস্তার 5 cm। পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $9.8\ ms^{-2}$।

(ক) পৃথিবী পৃষ্ঠে সেকেন্ড দোলকটির ভরের সর্বোচ্চ বেগ নির্ণয় কর।

(খ) সেকেন্ড দোলকটি ই ও ঈ অবস্থানে নিয়ে গেলে দিনে একই পরিমাণ সময় হারাবে কী? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০২৪]

(ক) আমরা জানি,

$$v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A$$
$$= \frac{2 \times 3.1416}{2} \times 0.05$$
$$= 0.157\ ms^{-1}$$

এখানে,
$A = 5\ cm = 0.5\ m$
$T = 2$ sec
$v_{max} = ?$

(খ) পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে A বিন্দুর গভীরতা,

$$h_A = R - \frac{2R}{3} = \frac{R}{3}$$

আবার, পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে B বিন্দুর উচ্চতা,

$$h_B = \frac{4R}{3} - R = \frac{R}{3}$$

A বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g_A = g\left(1 - \frac{h_A}{R}\right)$$
$$= 9.8\left(1 - \frac{\frac{R}{3}}{R}\right)$$
$$\therefore\ g_A = 6.53\ ms^{-2}$$

আবার, B বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ, g_B হলে,

$$\frac{g_B}{g} = \left(\frac{R}{R + \frac{R}{3}}\right)^2$$
$$\therefore\ \frac{g_B}{9.8} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{9}{16}$$
$$\therefore\ g_B = \frac{9}{16} \times 9.8 = 5.52\ ms^{-2}$$

A বিন্দুতে দোলনকাল $T_A = T\sqrt{\frac{g}{g_A}} = 2 \times \sqrt{\frac{9.8}{6.53}} = 2.66$ sec

আবার, B বিন্দুতে দোলনকাল, $T_B = T\sqrt{\frac{g}{g_B}} = 2 \times \sqrt{\frac{9.8}{5.52}} = 3.46$ sec

A অবস্থানে দোলকটি দিনে n_A সেকেন্ড সময় হারালে,

$$T_A = \frac{2 \times 86400}{86400 - n_A}$$

$$\therefore \quad n_A = 86400 - \frac{2 \times 86400}{T_A}$$

$$= 86400 - \frac{2 \times 86400}{2.45} = 15869.38 \text{ sec}$$

আবার, B অবস্থানে দোলকটি দিনে n_B সেকেন্ড সময় হারালে,

$$T_B = \frac{2 \times 86400}{86400 - n_B}$$

$$\therefore \quad n_B = 86400 - \frac{2 \times 86400}{2.66} = 21437.6 \text{ sec}$$

এখানে, $n_A \neq n_B$; সুতরাং সেকেন্ড দোলকটি A ও B স্থানে নিয়ে গেলে দিনে একই পরিমাণ সময় হারাবে না।

৩০। রূপমের মামার বাড়ির ধাতব পেন্ডুলামযুক্ত একটি দেয়াল ঘাড়ির পেন্ডুলামের দোলনকাল 2 sec। ঘড়িটিকে পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গেল 100 sec সময় হারায়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km এবং ভূপৃষ্ঠে $g = 9.8$ ms^{-2}।

(ক) উদ্দীপকের আলোকে পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) ঘড়িটিকে পাহাড়ের উচ্চতার সমান গভীরতার খনিতে নিয়ে গেলে দোলনকালের কী পরিবর্তন হবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [দি. বো. ২০২৪]

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় দোলকটির পরিবর্তিত দোলনকাল,

$$T' = 2 \times \frac{86400}{86400 - n}$$

$$= \frac{2 \times 86400}{86400 - 100}$$

$$= \frac{1728}{863} \text{ sec}$$

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km = 6.4×10^6 m
সেকেন্ড দোলকের দালনকাল, T = 2 sec
একদিনে হারানো সময়, n = 100 sec
T = ?

ধরি পাহাড়ের উচ্চতা, h

$$\therefore \quad h = \left(\frac{T'}{T} - 1\right) \times R = \left(\frac{1728}{2 \times 863} - 1\right) \times 6.4 \times 10^6 = 7416 \text{ m}$$

(খ) আমরা জানি খনিতে অভিকর্ষজ ত্বরণ,

$$g' = g\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$= 9.8\left(1 - \frac{7416}{6.4 \times 10^6}\right)$$

$$= 9.788 \text{ ms}^{-2}$$

$\therefore$ খনিতে দোলকাল কম্ব হলে,

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$$

বা, $$T' = T \times \sqrt{\frac{g}{g'}}$$

$$= 2 \times \sqrt{\frac{9.8}{9.788}} = 2.0012 \text{ sec}$$

সার-সংক্ষেপ

পর্যাবৃত্তি : যদি কোনো একটি বস্তু নির্দিষ্ট সময় পরপর একই স্থানে ফিরে আসে অথবা একই স্থান দিয়ে নির্দিষ্ট সময় অন্তর অতিক্রম করে তবে তাকে পর্যাবৃত্তি বলে।

স্থানিক পর্যাবৃত্তি : পর্যায়বৃত্তির পর্যায়কাল যদি স্থান সাপেক্ষ হয়, তবে তাকে স্থানিক পর্যাবৃত্তি বলে।

কালিক পর্যাবৃত্তি : পর্যায়বৃত্তির পর্যায়কাল যদি একটি নির্দিষ্ট সময় সাপেক্ষ হয়, তবে তাকে কালিক পর্যাবৃত্তি বলে।

সরল ছন্দিত গতি : কোনো দোলনরত কণার ত্বরণ সাম্যাবস্থান থেকে এর দূরত্বের সমানুপাতিক ও সব সময় সাম্যাবস্থানের অভিমুখী হলে ওই কণার গতিকে সরল ছন্দিত গতি বলে।

বল ধ্রুবক : কোনো স্প্রিংয়ের মুক্ত প্রান্তে একক সরণ ঘটালে স্প্রিংটি সরণের বিপরীত দিকে যে প্রত্যায়নক বল প্রয়োগ করে তাকে বল ধ্রুবক বলে।

পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের সম্পর্ক : কৌণিক কম্পাঙ্ক ω, পর্যায়কাল T এবং বল ধ্রুবক K হলে $w^2 = \frac{k^2}{m^2 v}$। এখানে m স্পন্দনশীল কণার ভর।

দশা পার্থক্য : দুটি সরল ছন্দিত গতি একই ছন্দে না চললে তাদের মধ্যে দশা পার্থক্য আছে ধরা হয়। দশা পার্থক্য বলতে একটি কণা আরেকটি কণা থেকে কত দশা কোণে এগিয়ে বা পিছিয়ে তা বোঝানো হয়।

সরল দোলন গতি : কোনো পর্যায়গতিসম্পন্ন বস্তুর ওপর কার্যরত ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে তার মান ওই বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল দোলন গতি বলে।

সরল দোলকের সূত্রাবলি :

প্রথম সূত্র : কোনো স্থানে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটা সরল দোলকের বিস্তার 4°-এর মধ্যে থাকলে তার প্রতিটি দোলনের জন্য সমান সময় লাগবে।

দ্বিতীয় সূত্র : বিস্তার 4°-এর মধ্যে থাকলে কোনো নির্দিষ্ট স্থানে সরল দোলকের দোলনকাল তার কার্যকরী দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক অর্থাৎ $T \propto \sqrt{1}$।

তৃতীয় সূত্র : বিস্তার 4°-এর মধ্যে থাকলে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোনো একটি সরল দোলকের দোলনকাল ওই স্থানের অভিকর্ষীয় ত্বরণের বর্গমূলের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ বা, $T^2 \propto \frac{1}{g}$।

চতুর্থ সূত্র : বিস্তার 4°-এর মধ্যে এবং কার্যকরী দৈর্ঘ্য স্থির থাকলে কোনো স্থানে সরল দোলকের দোলনকাল দোলক পিণ্ডের ভর, আকৃতি, উপাদানের ওপর নির্ভর করে না।

দোলক ঘড়ির দ্রুত বা ধীরে চলা : শীতকালে ঘড়ির দোলনকাল কমে যায় এবং ঘড়ি দ্রুত চলে। গ্রীষ্মকালে ঘড়ির দোলনকাল বেড়ে যায় এবং ঘড়ি ধীরে চলে।

সরল দোল গতির শক্তি : সরল দোল গতির সাম্যাবস্থানে গতিশক্তি সর্বোচ্চ হয় এবং বিস্তারের উপর প্রান্ত বিন্দুতে গতিশক্তি শূন্য হয়। কণাটি যখন সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে তখন এর স্থিতিশক্তির মান সর্বনিম্ন হয়। যখন কণাটি গতিপথের যেকোনো প্রান্ত বিন্দুতে পৌঁছায় তখন কণাটির স্থিতিশক্তির মান সর্বোচ্চ হয়। কণার মোট শক্তি সরণের ওপর নির্ভর করে না। সরল দোল গতি শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে।

প্রত্যায়নক বল : বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর বিকৃতি হলে স্থিতিস্থাপকতার কারণে পূর্বের অবস্থায় ফিরে যেতে বস্তুর মধ্যে যে বল উৎপন্ন হয় তাকে প্রত্যায়নক বল বলে। এই প্রত্যায়নক বল মূলত স্থিতিস্থাপক বল।

স্পন্দন গতি : পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে, পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় বিপরীত দিকে চলে তবে বস্তুর ওই গতিকে স্পন্দন বলে।

সরল ছন্দিত স্পন্দন : কোনো পর্যায় গতিসম্পন্ন বস্তুর ওপর কার্যকর ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে তার মান ওই বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল ছন্দিত স্পন্দন বলে।

সরল দোলক : একটি ছোট ভারী বস্তু পিণ্ডকে একটি ওজনবিহীন, অপ্রসারণীয় এবং নমনীয় সুতার সাহায্যে একটি দৃঢ় অবলম্বনে ঝুলিয়ে দেওয়ায় তা যদি বিনা বাধায় এদিক-ওদিক দোলে, তবে সুতা সমেত পিণ্ডটিকে সরল দোলক বলে।

পূর্ণ দোলন (Complete oscillation) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড তার গতিপথের যেকোনো বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে দুই প্রান্ত অবধি যেয়ে পুনরায় সেই বিন্দুতে ফিরে এলে একটি পূর্ণ দোলন হয়।

দোলন বা পর্যায় কাল (Time period) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ডের একটি পূর্ণ দোলন দিতে যে পরিমাণ সময় লাগে তাকে দোলন কাল বলে।

কম্পাঙ্ক (Frequency) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড এক সেকেন্ডে যতবার পূর্ণ দোলন দেয়, তাকে কম্পাঙ্ক বা কম্পনি বলে।

বিস্তার (Amplitude) : দুলবার সময় কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড সাম্যাবস্থা হতে সর্বাপেক্ষা যতটা বেশি দূরে যায় তাকে তার বিস্তার বলে।

দশা : কোনো একটি কম্পমান বস্তুর যেকোনো মুহূর্তের দোলনের অবস্থা অর্থাৎ বস্তুটির অবস্থান, বেগ, ত্বরণ এবং গতির অভিমুখ যা দ্বারা বুঝা যায় তাকে দশা বলে।

সেকেন্ড দোলক (Second pendulum) : যে সরল দোলকের দোলনকাল 2 সেকেন্ড, তাকে সেকেন্ড দোলক বলে। সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণের সমানুপাতিক।

কৌণিক কম্পাঙ্ক : সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কোনো কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক কম্পাঙ্ক বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার ক্ষেত্রে $\frac{1}{2}KA^2$ হচ্ছে—
(i) সর্বোচ্চ গতিশক্তি, (ii) সর্বোচ্চ স্থিতিশক্তি, (iii) মোট শক্তি।

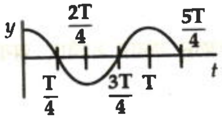
২। পর্যায়কাল 2 গুণ করা হলে দোলকের দৈর্ঘ্য 4 গুণ করতে হবে। পৃথিবীর কেন্দ্রে সরল দোলকের দোলনকাল অসীম হয়। $T \propto \sqrt{L}$

৩। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল, $T \propto \sqrt{\frac{K}{m}}$; অর্থাৎ বল ধ্রুবকের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

৪। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার অন্তরক সমীকরণ, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$।

৫। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার কম্পাঙ্ক $\frac{\omega}{2\pi}$ এবং পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\omega}$।

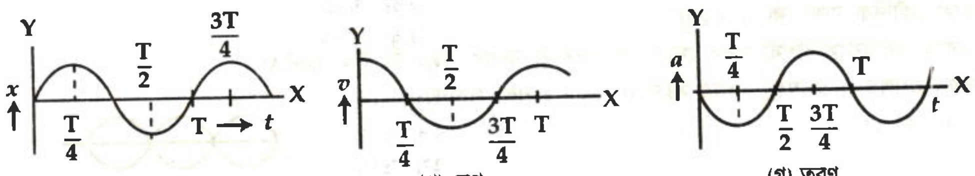
৬। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণা যখন সাম্যাবস্থা অতিক্রম করে তখন এর গতিশক্তি সর্বোচ্চ এবং বিভবশক্তি সর্বনিম্ন হয়। সরল দোলন গতির জন্য কৌণিক সরণ 4°-এর চেয়ে বেশি হতে পারবে না।

৭। 

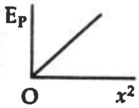
সরল ছন্দিত গতিতে গতিশীল একটি বস্তুর গতির সরণ–সময় লেখচিত্রের জন্য প্রযোজ্য

(i) যখন $t = \frac{3T}{4}$ তখন $E = 0$, (ii) যখন $t = \frac{T}{4}$ তখন $E_k = E_p$ প্রযোজ্য নয়। যখন $t = T$ হয় তখন সরণ সর্বনিম্ন হয়। সরল দোলকের ক্ষেত্রে পর্যায়কাল $T = 2 \times$ এক বার টিক শব্দের সময়।

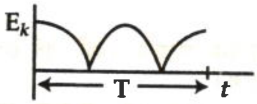
৮। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ ও ত্বরণের লেখচিত্র হলো—



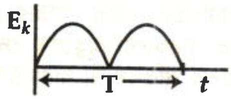
(ক) সরণ (খ) বেগ (গ) ত্বরণ

৯। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার বিভবশক্তি বনাম সরণের বর্গের লেখচিত্র— 

১০। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার দোলনকাল T, বিস্তার A-এর সর্বোচ্চ বেগ হলো, $v_{max} = \omega A + \frac{2\pi}{T} \times A$।

১১। একটি সরল ছন্দিত স্পন্দকের সাম্যাবস্থান থেকে সময় পরিমাপ শুরু করলে সেটির গতিশক্তি বনাম সময়ের লেখচিত্র হলো 

। সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত কোনো কণার বারবার স্পন্দিত হওয়ার কারণ গতি জড়তা ও প্রত্যায়নক বল।

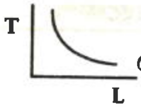
১২। একটি সরল ছন্দিত স্পন্দকের বিস্তার অবস্থান থেকে সময় পরিমাপ শুরু করলে সেটির গতিশক্তি বনাম এর পর্যায় কালের লেখচিত্র হলো 

। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার জন্য ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী। অর্থাৎ $a \propto -x$

১৩। সরল ছন্দিত স্পন্দকের ক্ষেত্রে পর্যায়কাল এবং প্রত্যায়নক বলের মান অপরিবর্তিত থাকে।

১৪। ω এবং f-এর মধ্যে একটিমাত্র ধ্রুবকের পার্থক্য তা হলো 2π

১৫। সুষম বৃত্তাকার গতিকে সরল ছন্দিত স্পন্দন গতি হিসেবে বিবেচনা করা যায়। একটি দোলক ঘড়িকে পাহাড়ের চূড়ায় নিলে ধীরে চলবে। কারণ সেখানে g-এর মান কম।

১৬। 

লেখচিত্রটি সরল দোলকের তৃতীয় সূত্র সমর্থন করে।

১৭। সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর সমানুপাতিক। পৃথিবীর 45° অক্ষাংশে অভিকর্ষজ ত্বরণকে আদর্শ মান ধরা হয়।

১৮। ববের ভর বেশি হলে দোলনকাল অপরিবর্তিত থাকবে। সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার বেগ (i) মধ্য বিন্দুতে সর্বোচ্চ (ii) সর্বোচ্চ সরণে শূন্য (iii) সাম্যাবস্থায় সর্বনিম্ন।

১৯। সরল দোলকের দৈর্ঘ্য L, ভর M, কম্পাঙ্ক f। এর কম্পাঙ্ক $2f$ করা হলে দৈর্ঘ্য হ্রাস করে $\frac{L}{4}$ করতে হবে।

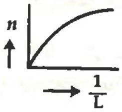
২০। $\frac{2d^2x}{dt^2} + 32x = 0$ হলে এর কৌণিক কম্পাঙ্ক হবে 4 $rads^{-1}$। একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য 0·993 m।

২১। সরল দোলকের সাহায্যে নির্ণয় করা যায় পাহাড়ের উচ্চতা ও অভিকর্ষজ ত্বরণ।

২২। দোলনকালের অনুপাত 2 : 3 হলে কার্যকর দৈর্ঘ্যের অনুপাত হবে 4 : 9

২৩। একক সেকেন্ড দোলকের পর্যায়কাল 2 sec এবং কম্পাঙ্ক 0·5 Hz

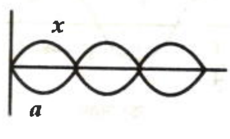
২৪। পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের মধ্যে সম্পর্ক হলো $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ অবস্থান ও সাম্যাবস্থানের মধ্যে দশা পার্থক্য $\frac{\pi}{4}$।

২৫। কার্যকরী দৈর্ঘ্য বনাম কম্পাঙ্কের লেখচিত্র হলো 

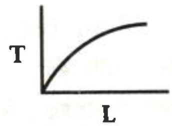
। একটি পূর্ণ কম্পনে T সময়ে দশার পরিবর্তন 2π হলে কৌণিক কম্পাঙ্ক $\omega = 2\pi f$।

২৬। একক পর্যায়কালবিশিষ্ট সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার গড় গতিশক্তি $m\omega^2A^2$।

২৭। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সরণ ও ত্বরণের দশা পার্থক্য 180° বা π।



২৮। $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ সমীকরণটি T বনাম L লেখচিত্র একটি অধিবৃত্ত।



২৯। স্প্রিং সংযুক্ত একটি কণা সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হচ্ছে $x = \frac{A}{2}$ অবস্থানে বেগ $\frac{\sqrt{3}}{2} v_{max}$।

৩০। কোনো সরল ছন্দিত স্পন্দকের পর্যায়কাল 10 sec হলে ত্বরণ a এবং সরণ x-এর মধ্যকার সম্পর্ক হলো $a = -\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 x$।

৩১। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোনো কণার যান্ত্রিক শক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

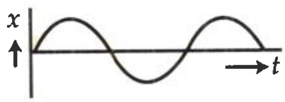
৩২। একটি স্প্রিং-এর সঞ্চিত শক্তি বনাম প্রসারণের লেখচিত্র হবে প্যারাবোলা।

৩৩। $x = 0$ অবস্থানে মোট শক্তি $x = A$ অবস্থানে মোট শক্তি সমান।

৩৪। $x = 0$ অবস্থানে গতিশক্তি $x = A$ অবস্থানে স্থিতিশক্তির সমান $= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} Kx^2$

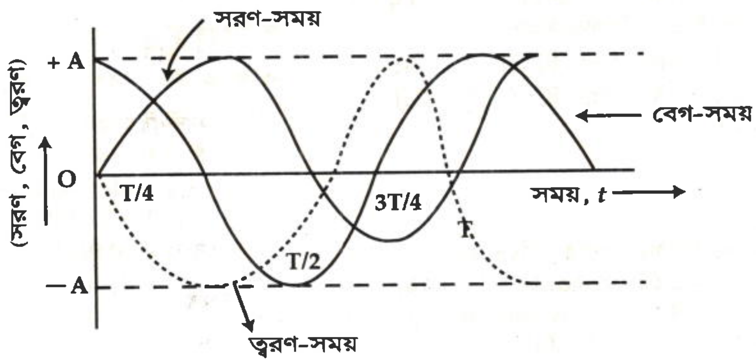
৩৫। সাম্যাবস্থান থেকে সরণ যেখানে বিস্তারের অর্ধেক সেখানে গতিশক্তি ও বিভবশক্তি সমান হবে।

৩৬। একটি পর্যাবৃত্ত কণার সমীকরণ, $x = a \sin \omega t$ এবং এর লেখচিত্র—



কম্পাঙ্কের একক হলো cycle/s বা Hertz।

৩৭। সরল ছন্দিত গতির সরণ, বেগ ও ত্বরণ বনাম সময়ের লেখচিত্র হলো—



৩৮। সরল ছন্দিত স্পন্দনের ভর, পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের সম্পর্ক হলো : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$। কৌণিক কম্পাঙ্ক $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

৩৯। দশা, $\delta = 0$ হলে কণার গতি সাম্যাবস্থান হতে এবং $\delta = \frac{\pi}{2}$ হলে গতি সরণের সর্বোচ্চ অবস্থান হতে শুরু হয়।

৪০। স্প্রিং ধ্রুবক K-এর মান স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য, জ্যামিতিক গঠন ও পদার্থের স্থিতিস্থাপক ধর্মের ওপর নির্ভর করে। এর একক Nm^{-1} এবং মাত্রা MT^{-2}।

৪১। $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলনগতি নির্দেশ করে।

৪২। একটি সরল দোলকের দোলনকাল 50% বৃদ্ধি করতে এর কার্যকর দৈর্ঘ্য 1·25 গুণ বৃদ্ধি করতে হবে।

৪৩। একটি সরল গতিসম্পন্ন কণার কম্পাঙ্ক ω হলে এর স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের কম্পাঙ্ক 2ω।

৪৪। সাম্যাবস্থান হতে সরণ $x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$ অবস্থানে দোলনগতিসম্পন্ন বস্তুর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হবে।

৪৫। দোলকের ববের ভর বেশি হলে দোলনকাল অপরিবর্তিত থাকবে।

৪৬। সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য g-এর সমানুপাতিক, একটি সরল দোলককে পৃথিবীর কেন্দ্রে নিয়ে গেলে এর দোলনকাল অসীম হবে।

৪৭। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 4 গুণ বৃদ্ধি করলে দোলনকাল দ্বিগুণ বাড়বে। মহাকাশে একটি সেকেন্ড দোলকের কম্পাঙ্ক 0Hz।

৪৮। সুর শলাকার গতি দোলনগতির উদাহরণ।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। সরল ছন্দিত স্পন্দনের বৈশিষ্ট্য—
[রা. বো. ২০১৯; সি. বো. ২০১৭; সকল বোর্ড ২০১৪; JU Admission Test, 2022-23]

(i) বস্তুর গতি পর্যায় গতি
(ii) ত্বরণ বস্তুর সরণ অভিমুখী
(iii) ত্বরণ বস্তুর সরণের সমানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক ?

ⓚ i ও ii
ⓚ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓖ i, ii ও iii

২। একটি বস্তু 4 cm বিস্তারের সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন করছে। সাম্যাবস্থা থেকে কত দূরত্বে বস্তুটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হবে ?
[Admission Test : BUET 2013-14; JU 2021-22 (মান ভিন্ন); RU-C 2021-22]

ⓚ $2\sqrt{2}$ cm
ⓚ $\sqrt{2}$ cm
ⓖ 2 cm
ⓖ 1 cm

৩। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার গতিপথের মধ্য-অবস্থানে— [ম. বো. ২০২৩; চ. বো. ২০২২; ঢা. বো. ২০১৫; Admission Test : JnU 2013-14; BRU 2017-18; CU-A1 2016-17]

ⓚ বেগ সর্বনিম্ন, সরণ সর্বোচ্চ
ⓚ বেগ সর্বনিম্ন, সরণ সর্বনিম্ন
ⓖ বেগ সর্বাধিক, সরণ সর্বাধিক
ⓖ বেগ সর্বাধিক, সরণ সর্বনিম্ন

৪। সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত কণার বিভবশক্তি সর্বোচ্চ হবে যখন সরণ—
[Admission Test : MBSTU 2017-18; RU 2015-16]

ⓚ A
ⓚ $\frac{A}{2}$
ⓖ $\frac{A}{\sqrt{2}}$
ⓖ 0 হয়

৫। সরল ছন্দিত স্পন্দনশীল একটি কণার দোলনকাল 10 সেকেন্ড। কোন সমীকরণটি এর ত্বরণ 'a' এবং সরণ 'x'-এর সম্পর্ক প্রকাশ করে ?
[কু. বো. ২০২১; ঢা. বো. ২০১৫; চ. বো. ২০১৫; য. বো. ২০১৫ (মানভিন্ন); Admission Test : RU 2016-17; GST-A 2022-23]

ⓚ $a = -10\pi x$
ⓚ $a = -(20\pi)x$
ⓖ $a = -\left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 x$
ⓖ $a = -(20\pi)^2 x$

৬। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার অন্তরকলন সমীকরণ $4\frac{d^2x}{dt^2} + 100\,x = 0$ হলে কণাটির কৌণিক কম্পাঙ্ক কত হবে? [য. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন), ২০২১ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); রা. বো. ২০২১, ২০১৫; সি. বো. ২০১৬; Admission Test : DU 2007-08; RU-C1 2016-17; Butex 2016-17; BSMRSTU 2019-20 (মান ভিন্ন); RU unit-C 2020-21 (মান ভিন্ন); DU-A 2021-22 (মান ভিন্ন); BUP 2021-22 (মান ভিন্ন)]

ⓚ 2 $rads^{-1}$
ⓚ 4 $rads^{-1}$
ⓖ 5 $rads^{-1}$
ⓖ 100 $rads^{-1}$

৭। একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য—
[চ. বো. ২০২১; সি. বো. ২০২১; য. বো. ২০১৬; Admission Test : JUST 2017-18; JU 2019-20; CVASU 2019-20; CU-A 2022-23, 2020-21, 2017-18; BDS 2017-18; Marine-A 2017-18]

ⓚ 0·971 m
ⓚ 0·993 m
ⓖ 0·971 m
ⓖ 0·248 m