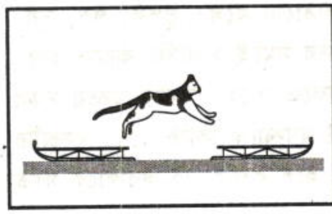
৩

গতিবিদ্যা
DYNAMICS

প্রধান শব্দ (Key Words) : প্রসঙ্গ কাঠামো, সরণ, গড় দ্রুতি, তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি, গড় বেগ, তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ, সমবেগ, গড় ত্বরণ, তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ, সমত্বরণ, পড়ন্ত বস্তুর সূত্র, প্রক্ষেপক, বিচরণ কাল, পাল্লা, বৃত্তাকার গতি, সুষম বৃত্তাকার গতি, কেন্দ্রমুখী বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ।




সূচনা
Introduction

গতিবিদ্যা হলো গতি সংক্রান্ত বিজ্ঞান। পদার্থবিজ্ঞানে গতিবিদ্যা একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ শাখা। এই শাখায় বলের ক্রিয়ায় বস্তুর গতিই প্রধান আলোচ্য বিষয়। গতিবিদ্যা কোনো বস্তুর ওপর আরোপিত অথবা প্রয়োগকৃত বলের ফলে সৃষ্ট গতির অনুসন্ধান, প্রকৃতি এবং সম্পর্ক স্থাপন করে। সমত্বরণযুক্ত অসমবেগে চলমান বস্তুর গতিই মূলত এখানে বিবেচনা করা হয়। বস্তুর গতি আলোচনায় বস্তুর আকার, আয়তন এবং আকৃতি উপেক্ষা করে বস্তুটিকে কণা হিসেবে বিবেচনা করা শ্রেয়। কণা বলতে এমন একটি বস্তু বুঝায় যার ভর একটি বিন্দুতে সংহত আছে ধরা হয়। অর্থাৎ কণার ভর আছে কিন্তু আয়তন নগণ্য। যেমন একটি মোটর গাড়ির দ্রুতি, ত্বরণ, অবস্থান ইত্যাদি নির্ণয় করতে গাড়ির আকার বা আয়তন বিবেচনা করা হয় না। এক্ষেত্রে গাড়িটিকে কণা বিবেচনা করা হয়।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- জড় কাঠামোর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পরম গতি ও আপেক্ষিক গতি বর্ণনা করতে পারবে।
- গতি বর্ণনায় অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অবস্থান-সময় ও বেগ-সময় লেখচিত্র বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- প্রক্ষেপকের গতি বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- পড়ন্ত বস্তুর সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সুষম বৃত্তীয় গতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।

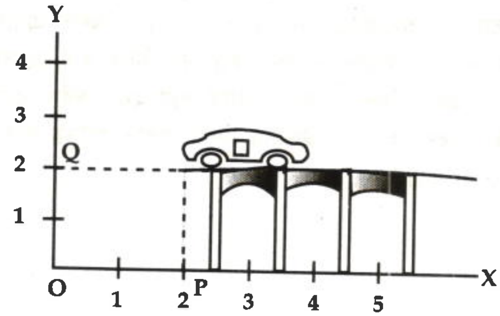
৩.১ প্রসঙ্গ কাঠামো
Frame of reference

যেকোনো সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি বস্তুর সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদিকে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যেকোনো একটি অক্ষ বরাবর বিবেচনা করে বস্তুটির গতিকে সম্পূর্ণভাবে বর্ণনা করা যায়। কোনো গতির বর্ণনার জন্য একটি প্রসঙ্গ কাঠামোর প্রয়োজন হয় যার সাপেক্ষে গতি বিবেচনা করা হয়। একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হলে তার সরণ, বেগ, ত্বরণ যথাক্রমে x, v_x, a_x হবে। এক্ষেত্রে দেখা যায় কোনো বস্তুর গতির সম্যক অবস্থা বা গতিশীল বস্তুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজন হয় কোনো না কোনো প্রসঙ্গ স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (coordinate system)। এই স্থানাঙ্ক ব্যবস্থাকে বলা হয় প্রসঙ্গ কাঠামো (reference frame)। সবচেয়ে সহজ এবং পরিচিত প্রসঙ্গ কাঠামো হলো কার্তেসীয় অক্ষ পদ্ধতি (Cartesian coordinate system)। এর দ্বারা একটি বস্তুকণার অবস্থান তিনটি পরস্পর লম্ব অক্ষ X, Y, Z দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়।

তোমার পড়ার ঘরে একটি প্রজাপতি প্রবেশের পর এদিক-ওদিক উড়তে দেখ। এখন মনে কর প্রজাপতিটি তোমার পড়ার ঘরে বুক সেল্‌ফের ওপর এসে বসল। প্রজাপতিটিকে নির্দিষ্ট করতে ঘরের যেকোনো কোণাকে মূলবিন্দু (origin)

ধরে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর নির্দিষ্ট পরিমাণ স্থান, ফিতা দিয়ে পরিমাপ করে প্রজাপতির অবস্থান নির্দিষ্ট করা যায়। মনে করা যাক ঘরের কোণা থেকে দৈর্ঘ্য বরাবর 5m, প্রস্থ বরাবর 3m এবং উচ্চতা বরাবর 2m মেপে প্রজাপতিটিকে নির্দিষ্ট করা হলো। এক্ষেত্রে প্রজাপতির স্থানাঙ্ক হবে (5, 3, 2); আবার তুমি যদি ঘরের বাইরের কোনো বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে প্রজাপতির অবস্থান নির্ণয় করতে যাও তা হলে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা পরিবর্তিত হবে। কার্তেসীয় পদ্ধতি ছাড়াও বস্তুর অবস্থান অন্যভাবে নির্ণয় করা যায়; যেমন: গোলকভিত্তিক (spherical) বা সিলিন্ডারভিত্তিক (cylindrical) স্থানাঙ্ক নির্দেশ পদ্ধতি। অর্থাৎ **কোনো বস্তুর গতির বর্ণনার জন্য ত্রিমাত্রিক স্থানে যে সুনির্দিষ্ট স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বিবেচনা করা হয় এবং যার সাপেক্ষে বস্তুটির গতি বর্ণনা করা হয় তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।** ভূপৃষ্ঠ, গ্রহ, সূর্য, কোনো বিন্দু ইত্যাদিকে প্রসঙ্গ কাঠামো হিসেবে বিবেচনা করতে পার। তবে এদের সব সময়ই সুনির্দিষ্ট করতে হবে। কোনো বস্তুর স্থানাঙ্ক সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে পরিবর্তিত অথবা স্থির থাকতে পারে। কোনো বস্তুর সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে স্থির থাকে তা হলে বস্তুর এই অবস্থাকে **স্থিতি** বলে। বস্তুটির যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি সময় ও প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে পরিবর্তিত হয় তা হলে বস্তুর এই অবস্থাকে **গতি** বলে।

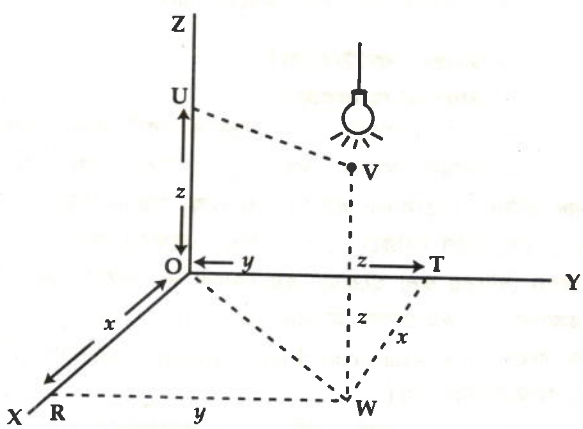
পৃথিবী পৃষ্ঠে বা মহাবিশ্বে কোনো কিছুর অবস্থান নির্দেশ করার জন্য আমাদের একটি বিন্দুকে স্থির করতে হয়। এই বিন্দুকে আমরা **মূলবিন্দু** বা **প্রসঙ্গ বিন্দু** বলি, আর যে দৃঢ় বস্তুর সাথে তুলনা করে আমরা অন্য বস্তুর অবস্থান, স্থিতি ও গতি নির্ণয় করি তাকে **প্রসঙ্গ কাঠামো** বলে।



চিত্র ৩.১

তুমি ব্রিজের ওপর একটি গাড়িকে দাঁড়ানো দেখে তার অবস্থান যদি প্রসঙ্গ কাঠামোর মাধ্যমে প্রকাশ করতে চাও তবে তোমাকে একটি স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বিবেচনা করতে হবে। ৩.১ চিত্রে ব্রিজের ওপর রাখা একটি গাড়ির অবস্থান দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X-অক্ষের দিকে OP দূরত্ব এবং Y অক্ষের দিকে OQ দূরত্ব প্রকাশের মাধ্যমে মূলবিন্দুর সাপেক্ষে গঠিত প্রসঙ্গ কাঠামোতে গাড়িটির অবস্থান নির্দেশ করছে। এক্ষেত্রে $OP = x = 2$ একক এবং $OQ = y = 2$ একক নির্দেশ করে অর্থাৎ গাড়িটির অবস্থানের স্থানাঙ্ক হবে চিত্র ৩.১ অনুযায়ী (2, 2)।

তুমি যখন ডাইনিং টেবিলে খেতে বস তখন যদি টেবিলের ওপর ঝুলন্ত বালব দেখতে পাও তা হলে বালবের অবস্থান বুঝাতে তুমি কী করবে? বালবটি যেহেতু মেঝেতে নেই আবার দেওয়ালের ওপরও নেই, আছে ঝুলন্ত অবস্থায়, তাই তোমাকে পরস্পর লম্ব তিনটি সরলরেখা রেখা OX, OY, OZ অঙ্কন করে বালবটি নির্দিষ্ট করতে হবে। এখানে মূলবিন্দু এবং অক্ষত্রয় সমন্বয়ে একটি ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Three dimensional reference frame) গঠিত হয়েছে। ৩.২ চিত্রে V দ্বারা বালবের অবস্থান নির্দেশ করা হয়েছে। চিত্র অনুযায়ী $OR = WT = x$, $OT = RW = y$ এবং $OU = VW = z$। তা হলে বালবটির অবস্থানের স্থানাঙ্ক হবে (x, y, z)। আপেক্ষিক স্থিতি এবং আপেক্ষিক গতি নির্ণয়ের জন্যে প্রসঙ্গ বিন্দু (বা প্রামাণ্য বিন্দু) ও প্রসঙ্গ কাঠামো (বা প্রামাণ্য কাঠামো)-এর প্রয়োজন।

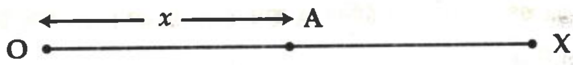


চিত্র ৩.২

(১) একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (One dimensional reference frame)

মনে করি একটি কণা একটি সরলরেখা OX-বরাবর গতিশীল। বিভিন্ন সময়ে কণাটির অবস্থান একটি বিন্দু সাপেক্ষে নির্ণয় করতে হয়। যে বিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির অবস্থান নির্ণয় করা হয়, তাকে **প্রসঙ্গ বিন্দু** বা **নির্দেশ বিন্দু** বলে। চিত্রে O-কে প্রসঙ্গ বিন্দু ধরে নেয়া হয়েছে। সাধারণত আমরা ভূপৃষ্ঠ বরাবর সরলরৈখিক গতির ক্ষেত্রে একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোতে অক্ষটিকে X-অক্ষ ধরে থাকি।

OX সরলরেখাকে X-অক্ষ বলা হয়। প্রসঙ্গ বিন্দু O এবং X-অক্ষ নিয়ে গঠিত হয়েছে একটি একমাত্রিক কাঠামো। এ কাঠামোর সাহায্যে কণার যেকোনো সময়ের অবস্থান নির্ণয় করা হয় [চিত্র ৩.৩]।



চিত্র ৩.৩

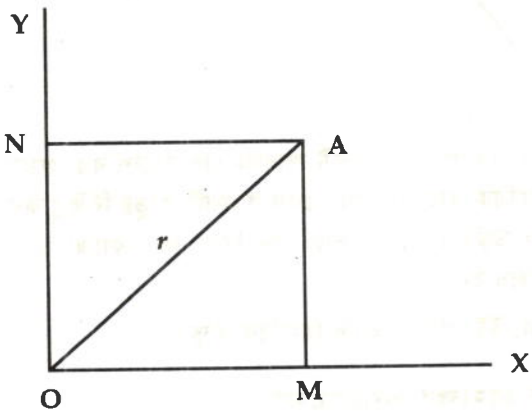
যে বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান একটিমাত্র স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

মুক্তভাবে পড়ন্ত একটি বস্তুর গতি আলোচনা করলে দেখা যাবে বিভিন্ন সময়ে বস্তুর অবস্থান বিভিন্ন হবে। এর গতি একটি একমাত্রিক কাঠামো দ্বারা প্রকাশ করা যাবে। যে বিন্দু হতে বস্তুটি পড়তে শুরু করে তাকে **প্রসঙ্গ বিন্দু** বলে এবং এর গতিপথ y-অক্ষ ধরা হবে। খাড়া ওপর নিচ বরাবর একমাত্রিক কাঠামোকে y-অক্ষ ধরে থাকি।

উদাহরণ : একটি দীর্ঘ সরু দণ্ড, একটি দীর্ঘ সরু সুতা, ঝুলন্ত সুতা ইত্যাদি একমাত্রিক বস্তু ভাবা যায়।

(২) দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Two dimensional reference frame)

মনে করি একটি কণা একটি সমতলে অবস্থিত। ধরি কণাটি গতিশীল। সেজন্য বিভিন্ন সময়ে এর অবস্থান বিভিন্ন হবে। এর অবস্থান সূচিত করার লক্ষ্যে পরস্পর দুটি লম্বিক সরলরেখার দরকার। চিত্রে OX ও OY এরূপ দুটি সরলরেখা। এই দুটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অতএব O হলো **প্রসঙ্গ বিন্দু** বা **মূলবিন্দু** (reference or origin)। এখানে OX-কে X-অক্ষ ও OY-কে Y-অক্ষ বলা হয়। প্রসঙ্গ বিন্দু এবং অক্ষ দুটি মিলে একটি কাঠামো তৈরি হয়েছে। এর নাম **দ্বিমাত্রিক কাঠামো** [চিত্র ৩.৪]।



চিত্র ৩.৪

মনে করি একটি নির্দিষ্ট সময়ে একটি কণা A অবস্থানে আছে। A হতে OX-এর ওপর AM এবং OY-এর উপর AN লম্ব টানি। তা হলে $OM = AN = x$; $AM = ON = y$। এখানে A-এর অবস্থান x ও y দুইটি স্থানাঙ্ক দ্বারা সূচিত হয়েছে। অন্যভাবে বলা যায় A হলো একটি বিন্দু যার স্থানাঙ্ক x ও y। অতএব **কোনো একটি বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান দুটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হলে উক্ত বস্তুটিকে দ্বিমাত্রিক বস্তু বলে।** OA যুক্ত করি। OA $= r$ হলে, O হতে ওই কণার দূরত্ব হবে r ।

[MAT 13-14] **উদাহরণ :** ফুটবল খেলার মাঠে একটি গতিশীল ফুটবল দ্বিমাত্রিক স্থানে দৌড়াচ্ছে। পাতলা কাগজ, পাতলা ধাতব পাত ইত্যাদি দ্বিমাত্রিক বস্তু।

(৩) ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Three dimensional reference frame)

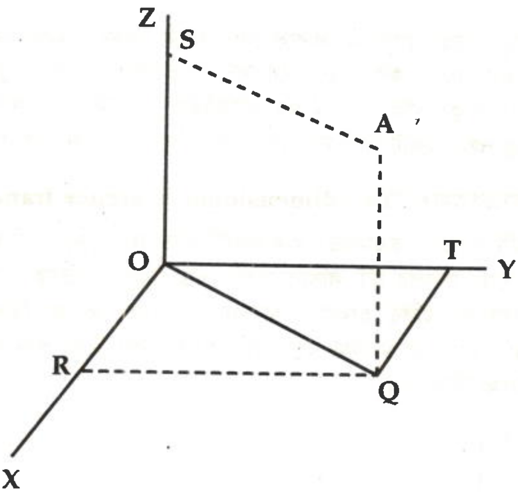
মনে করি বায়ুভর্তি কামরার মধ্যে একটি কণা অবস্থিত। কণাটির অবস্থান নির্দেশ করার জন্য পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত তিনটি সরলরেখা দরকার। ধরি সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে OX, OY এবং OZ। সরলরেখা তিনটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। অতএব O বিন্দু হলো **মূল বিন্দু** বা **প্রসঙ্গ বিন্দু**। এখানে OX কে X-অক্ষ, OY কে Y-অক্ষ এবং OZ কে Z-অক্ষ বলা হয়। মূল বিন্দু O এবং তিনটি অক্ষ মিলে যে কাঠামো তৈরি হয়েছে তার নাম **ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো** [চিত্র ৩·৫]।

মনে করি কোনো নির্দিষ্ট সময়ে কণাটি A অবস্থানে আছে। A হতে XY তলের ওপর AQ লম্ব টানি। Q হতে OX-এর ওপর QR এবং OY-এর ওপর QT লম্ব টানি। A হতে OZ-এর ওপর AS লম্ব টানি।

তা হলে $OR = QT = x$

$OT = RQ = y$

এবং $OS = AQ = z$



চিত্র ৩·৫

এখানে A-এর অবস্থান x, y এবং z এই তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। মূল বিন্দু O এবং এই তিনটি স্থানাঙ্কসহ এই কাঠামোকে ত্রিমাত্রিক কাঠামো বলে। **কোনো একটি বস্তুর বিভিন্ন কণা এই কাঠামোয় অবস্থান করলে বস্তুটিকে ত্রিমাত্রিক বস্তু বলে।** উড়ন্ত কোনো বস্তুর গতি ত্রিমাত্রিক। কাজেই এ ধরনের বস্তুর অবস্থান নির্ণয়ে ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোর প্রয়োজন হয়।

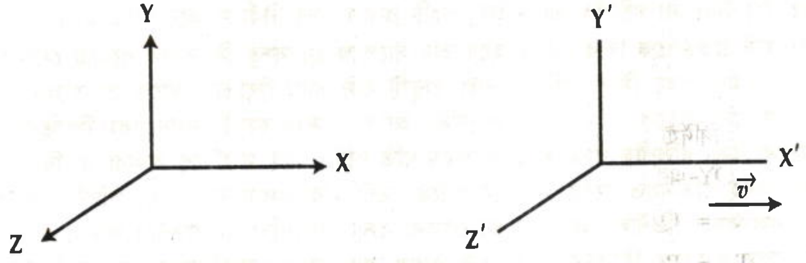
উদাহরণ : টেবিল, চেয়ার, ইট, পাথর ইত্যাদি ত্রিমাত্রিক বস্তু।

৩·২ জড় ও অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Inertial and non-inertial frame of reference

৩·২·১ জড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Inertial frame of refernece

ভূপৃষ্ঠে বা তার কাছাকাছি অবস্থানে কোনো বস্তুর গতি বর্ণনার সময় ভূপৃষ্ঠকে স্থির প্রসঙ্গ কাঠামো ধরা হয়। এখন ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত কোনো একটি পাথরখণ্ডে যতক্ষণ পর্যন্ত কোনো বাহ্যিক বল প্রয়োগ না করা হয় ততক্ষণ পর্যন্ত পাথরখণ্ডটি স্থির থাকে। আবার অন্যদিকে সমবেগে গতিশীল একটি ট্রেনের কামরায় একটি বল মেঝেতে পড়ে থাকলে বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ না করলে সেটি স্থির থাকে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে স্থির বা সমবেগে গতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য হয়। এই প্রসঙ্গ কাঠামোকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

সংজ্ঞা : যে প্রসঙ্গ কাঠামোর কোনো ধরনের ত্বরণ বা মন্দন থাকে না, অর্থাৎ যে প্রসঙ্গ কাঠামো স্থির বা সমবেগে সরলরেখায় গতিশীল সেই প্রসঙ্গ কাঠামোকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে। জড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের গতিসূত্র প্রযোজ্য হয়।



চিত্র ৩.৬

নিউটনের গতিসূত্রগুলো জড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রযোজ্য হয়। চিত্র ৩.৬-এ জড় প্রসঙ্গ কাঠামো দেখানো হয়েছে। প্রতিটি জড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে পদার্থবিজ্ঞানের সকল সূত্র অপরিবর্তিত থাকে। এই নীতিকে **নিউটনের অপরিবর্তনীয়তার নীতি** (Principle of invariance) বলা হয়।

৩.২.২ অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো
Non-inertial frame of refernece

সংজ্ঞা : জড় প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে ত্বরণ বা মন্দনসহ অসম বেগে গতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামোকে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলা হয়। কৃত্রিম উপগ্রহ, রকেট, লিফট ইত্যাদিকে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

নিউটনের গতিসূত্রগুলো অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রযোজ্য হয় না।

উদাহরণ : ধরা যাক, একটি স্থির ট্রেনের কামরায় একটি বল স্থির অবস্থায় রয়েছে। এখন ট্রেনটি ত্বরণসহ চলতে শুরু করল। দেখা যাবে বলটি পিছনের দিকে গতিশীল হয়েছে। এক্ষেত্রে বলটির ওপর বাহ্যিক কোনো বল প্রয়োগ করা হয়নি। কিন্তু স্থির বলটি চলতে শুরু করেছে। সুতরাং, এখানে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। ত্বরণসহ গতিশীল ট্রেনটি একটি অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের প্রথম গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়। প্রকৃতপক্ষে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামোতে নিউটনের কোনো গতিসূত্রই প্রযোজ্য নয়।

হাতে কলমে কাজ: ফুটবল মাঠে দুই দল ছেলে ফুটবল খেলছে, আবার তোমার পড়ার ঘরে একটি প্রজাপতি ছুটাছুটি করছে। এই দুটি ঘটনাকে প্রসঙ্গ কাঠামো ব্যবস্থায় উপস্থাপন কর। ফুটবলের অবস্থান বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন হবে কী ?

ফুটবল খেলার সময় সমতলের ওপর ফুটবলের অবস্থান পরিবর্তন হচ্ছে তাই এটিকে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা বলা হয়। অন্যদিকে প্রজাপতির অবস্থান প্রতিটি স্থানে তিনটি অক্ষের সাপেক্ষে হয়, তাই এটি ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ঘটে। ফুটবলের অবস্থান সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

৩.৩ পরম গতি ও আপেক্ষিক গতি
Absolute motion and relative motion

৩.৩.১ পরম গতি
Absolute motion

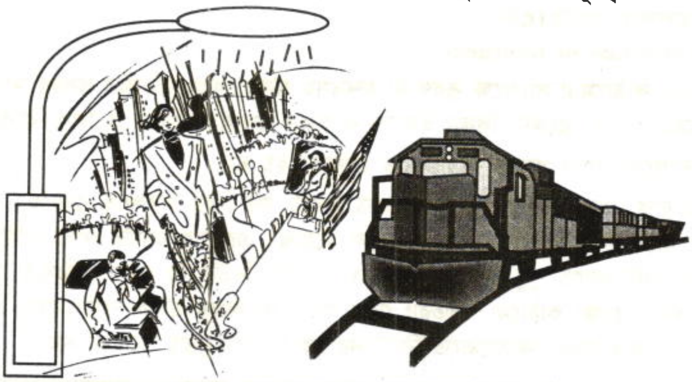
তুমি যখন রাস্তা দিয়ে হেঁটে কলেজে যাও তখন রাস্তার ওপর চলন্ত অনেক গাড়ি, রিকশা এবং আশেপাশে অনেক গাছ দেখতে পাও। এক্ষেত্রে গাড়ি ও রিকশা গতিশীল আর গাছ স্থির। আবার ভ্যাকুয়াম ক্লিনার দিয়ে যখন মেঝে পরিষ্কার করতে দেখ তখন ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের আশেপাশের প্রত্যেকটি বস্তু থেকে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের দূরত্ব এবং দিক ক্রমাগত পরিবর্তন হয়। অর্থাৎ সময়ের সাথে সাথে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের অবস্থানের পরিবর্তন হয়। এক্ষেত্রে আমরা বলি পরিপার্শ্বের সাপেক্ষে ভ্যাকুয়াম ক্লিনারটি গতিশীল। সময়ের সাথে সাথে পরিপার্শ্বের সাপেক্ষে যখন কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে তখন তাকে গতিশীল বস্তু বলি। কোনো বস্তু স্থির না গতিশীল তা বুঝার জন্য প্রসঙ্গ বস্তু তথা প্রসঙ্গ কাঠামো বিবেচনা করতে হয়। যেমন গাছের তুলনায় রিকশাটি যদি গতিশীল হয় তখন আলোচ্য বস্তু বা রিকশাকে গতিশীল ধরা হয়। আবার রিকশা ও গাড়ি যদি একই দিকে একই বেগে চলতে থাকে তা হলে সময়ের সাথে

তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বের কোনো পরিবর্তন হবে না। এক্ষেত্রে একটির তুলনায় অপরটি গতিশীল ধরা হয়। আবার চলন্ত উড়োজাহাজে দুই বন্ধু যদি মুখোমুখি বসে গল্প করতে থাকে তা হলে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সাথে তাদের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না। সুতরাং বলা যায় একজনের সাপেক্ষে অপরজন স্থির। আমরা দেখতে পাচ্ছি কোনো বস্তু প্রকৃতপক্ষে স্থির না গতিশীল তা নির্ণয়ে একটি প্রসজ্ঞা বস্তু নির্ধারণ করে নিতে হয়।

প্রসজ্ঞা বস্তু যদি প্রকৃতপক্ষে স্থির হয় তা হলে তার সাপেক্ষে যে বস্তু স্থিতিশীল রয়েছে সেও প্রকৃতপক্ষে স্থির। এ ধরনের স্থিতিকে আমরা পরম স্থিতি বলি। প্রসজ্ঞা বস্তুটি যদি পরম স্থিতিতে থাকে তা হলেই কোনো বস্তু তার সাপেক্ষে স্থির থাকলে সে বস্তুকে পরম স্থিতিশীল বলি। আবার **প্রসজ্ঞা বস্তুটি যখন পরম স্থিতিতে থাকে তখন তার সাপেক্ষে অন্য কোনো বস্তু গতিশীল থাকলে তাকে পরম গতি বলি।** এই মহাবিশ্বে আমরা যা কিছু দেখি যেমন: চন্দ্র, গ্রহ, উপগ্রহ, পৃথিবী সবই প্রতিনিয়ত সূর্যের চারদিকে ঘুরছে। তাই এক কথায় বলা যায়, পৃথিবীর ওপর অবস্থিত সকল বস্তু স্থির নয়—সকল বস্তু গতিশীল। আমরা যখন কোনো বস্তু স্থিতিশীল না গতিশীল জানার চেষ্টা করি তা কোনো আপাত স্থিতিশীল বস্তুর সাপেক্ষে বিবেচনা করি। এক কথায় বলা যায় **"এ মহাবিশ্বের সকল স্থিতিই আপেক্ষিক, সকল গতিই আপেক্ষিক। কোনো গতিই পরম নয়, পরম নয় কোনো স্থিতি।"**

নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ করে দেখ সময়ের সাথে সাথে বস্তুর অবস্থান কীভাবে পরিবর্তিত হচ্ছে।

(ক) রাজু স্টেশনের প্লাটফর্মে দাঁড়িয়ে দেখল একটি ট্রেন রাজুকে অতিক্রম করে চলে গেল [চিত্র ৩.৭]। তা হলে ট্রেনটি রাজুর অবস্থানের সাপেক্ষে গতিশীল। এক্ষেত্রে ট্রেনটির এবং রাজুর মধ্যকার দূরত্ব সময়ের সাথে সাথে পরিবর্তিত



চিত্র ৩.৭

হচ্ছে। তাহলে কি ট্রেনটি পরম গতি প্রাপ্ত নয় ? ট্রেনটি যদিও রাজুর সাপেক্ষে গতিশীল কিন্তু পৃথিবী নিজে সূর্যের চারদিকে ঘূর্ণনের জন্য পৃথিবীকে কখনো পরম স্থিতি বিবেচনা করা যায় না। এক্ষেত্রে ট্রেনটির গতি পরম গতি নয়। এভাবে তুমি পৃথিবীর ওপর বিভিন্ন বস্তুর গতির কথা ভাব এবং পরম স্থিতি ও পরম গতি বুঝার চেষ্টা কর।

(খ) সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর আবর্তনের বিস্তৃত তথ্য বিজ্ঞানীরা অনেকদিন আগেই গণনা করেছেন। অর্থাৎ পৃথিবীর গতি হিসাব করে রেলগাড়ির গতি কি নির্ণয় করা যায় না ? কিন্তু সূর্যও স্থির নয়। সমস্ত সৌরজগৎই ছায়াপথের মধ্য দিয়ে প্রচণ্ড বেগে ছুটে চলেছে। আবার ছায়াপথগুলোও একে অন্যের সাপেক্ষে গতিশীল। প্রকৃতপক্ষে এই মহাবিশ্বের সমস্ত বস্তুই গতিশীল। সুতরাং পরম গতি নির্ণয় করা অসম্ভব। অতএব বলা যায়, **কোনো বস্তুর স্থিতি অথবা গতি সব সময়ই আপেক্ষিক।**

৩.৩.২ আপেক্ষিক গতি ও নির্দেশ কাঠামো
Relative motion and reference frame

এই মহাবিশ্বে আমাদের জানা কোনো বস্তুই স্থির নয়; অর্থাৎ পরম স্থিতি কী তা আমরা জানি না। কোনো একটি বস্তু স্থির বা গতিশীল বলতে আমরা বুঝি অন্য কোনো একটি বস্তুর সাপেক্ষে ওই বস্তুটি স্থির না গতিশীল। যেমন: রাস্তার পাশে দাঁড়িয়ে থাকা একজন দর্শকের কাছে গতিশীল একটি ট্রেনের যাত্রীকে গতিশীল মনে হবে। পক্ষান্তরে গতিশীল ট্রেনের একজন যাত্রীর রাস্তার পাশে দাঁড়িয়ে থাকা একটি গাছকে ট্রেনের বিপরীত দিকে গতিশীল মনে হবে। আবার, সমবেগে একই দিকে ধাবমান দুটি ট্রেনের দুজন যাত্রীর পরস্পরকে স্থির বলে মনে হবে; কিন্তু ট্রেন দুটি বিপরীত দিকে ধাবমান হলে একজন যাত্রীর কাছে অন্য ট্রেনের যাত্রী অনেক বেশি বেগে দ্রুত পেরিয়ে যাচ্ছে মনে

হবে। এগুলো সবই আপেক্ষিক। অর্থাৎ সব স্থিতি বা গতিই হলো আপেক্ষিক স্থিতি বা আপেক্ষিক গতি। তাই বলা যায়, **দুটি চলমান বস্তুর একটির সাপেক্ষে অপরটির গতিকে আপেক্ষিক গতি বলে।** [DAT 19-20]

কোনো একটি বস্তুর অবস্থান নির্ণয় অপর একটি বস্তুর সাহায্য ছাড়া সম্ভব নয়। এই অপর বস্তুটিকে নির্দেশ বস্তু বা নির্দেশ কাঠামো (frame) বলা হয়।

কাজ : বৃষ্টির মধ্যে ছাতা মাথায় হাঁটলে ছাতা হেলিয়ে ধরতে হয় কেন ?

বৃষ্টির মধ্যে দাঁড়ানো অবস্থায় বৃষ্টির ফোঁটা খাড়াভাবে গায়ে এসে পড়বে এজন্য বৃষ্টি হতে রেহাই পেতে ছাতাকে খাড়াভাবে ধরতে হবে। কিন্তু হাটা অবস্থায় পথিকের সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করবে না। তখন পথিক দেখবে বৃষ্টি উল্লম্বের সাথে কোণ করে তির্যকভাবে সামনের দিক থেকে আসছে। তাই বৃষ্টি থেকে রেহাই পেতে ছাতাকে তির্যকভাবে ধরতে হবে।

৩.৪ গতি বর্ণনায় অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণের প্রাথমিক ধারণা
Preliminary idea of differentiation and integration to describe motion

৩.৪.১ অন্তরীকরণ
Differentiation

মনে কর একটি রাশি অন্য একটি রাশির ওপর নির্ভরশীল, তা হলে গণিতের ভাষায় এ নির্ভরশীল রাশিটি অপরটির অপেক্ষক (function) হয়।

y রাশিটি x রাশির ওপর নির্ভরশীল হলে y, x-এর একটি অপেক্ষক হয়।

অর্থাৎ $y = f(x)$ ... ... (3.1)

আবার y-এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন Δy-এর জন্য x-এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন Δx ধরলে y এবং x-এর ক্ষুদ্রতম পরিবর্তনের জন্য লেখা যায়,

$$y + \Delta y = f(\Delta x + x) \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.2)$$

বা, $\Delta y = f(\Delta x + x) - y$

বা, $\Delta y = f(\Delta x + x) - f(x)$ ... ... (3.3)

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x + x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.4)$$

এখানে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ হলো উল্লিখিত ক্ষুদ্রতম পরিবর্তনের জন্য x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার। হর Δx-এর মান যখন শূন্যের কাছাকাছি হয় তখন (3.4) নং সমীকরণকে লেখা যায়,

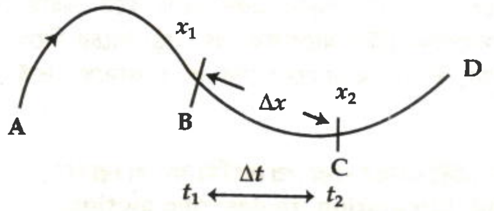
$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.5)$$

বা, $\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ... ... (3.6)

এখানে $\frac{dy}{dx}$ হলো, x-এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার। $\frac{dy}{dx}$ কে x-এর সাপেক্ষে y-এর differential সহগও বলে এবং $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয়ের পদ্ধতিকে অন্তরীকরণ বা ব্যবকলন বলে। গতির বর্ণনার ক্ষেত্রে এই অন্তরীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। এখানে $\frac{dy}{dx}$ একটি প্রতীক, যা y-এর ওপর $\frac{d}{dx}$-এর ক্রিয়াকে নির্দেশ করে। ইহা dy ও dx-এর ভাগফল নয়। $\frac{dy}{dx}$, x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার বুঝায়।

মনে কর তুমি তোমার বন্ধুর মোটর সাইকেলে করে নিউমার্কেট থেকে মতিঝিল যাচ্ছ। তা হলে যাওয়ার পথে তুমি লক্ষ করবে মোটর সাইকেল কখনো একই বেগে চলেনি। কখনো ধীরে কখনো দ্রুত চলেছে। কখনো ব্রেক চেপে থামতেও হয়েছে। ফলে মোটর সাইকেলটির গতি সুষম ছিল না। কিন্তু তোমাকে যদি মোটর সাইকেলটির বেগ নির্ণয় করতে বলা হয় তা হলে তুমি নিউমার্কেট থেকে মতিঝিলের মোট দূরত্ব নিয়ে মোট অতিক্রান্ত সময় দ্বারা ভাগ করে বেগের মান নির্ণয় করে নিবে। এক্ষেত্রে এই নির্ণেয় বেগ গড় বেগ বুঝাবে। অর্থাৎ সময়ের সাপেক্ষে দুই অবস্থানের পরিবর্তন হবে গড়বেগ v, অর্থাৎ $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$।

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ কে বলা হয় উল্লিখিত সময়ের পরিবর্তনের জন্য x-এর সাপেক্ষে সময়ের পরিবর্তনের হার বা বেগ। আবার সময়ের মান ক্ষুদ্র হলে উক্ত সময়ের বেগই হলো তাৎক্ষণিক বেগ। এক্ষেত্রে এই বেগকে অন্তরীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়; অর্থাৎ $\Delta t \to 0$ হলে $\frac{\Delta x}{\Delta t}$-এর নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় তা হলে ওই সীমাস্থ মানকে অর্থাৎ $\underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ কে $x(t)$ অপেক্ষকের t-এর সাপেক্ষে বৃদ্ধির হার বা অন্তরক সহগ বা তাৎক্ষণিক বেগ বলে।



চিত্র ৩.৮

ধরা যাক একটি কণার গতিপথ AD এবং এই গতিপথের ওপর একটি বিন্দু B-তে এর বেগের মান নির্ণয় করতে হবে। তা হলে ধরা যাক t সময়ে কণার অবস্থান B এবং $t + \Delta t$ সময়ে কণার অবস্থান C [চিত্র ৩.৮]।

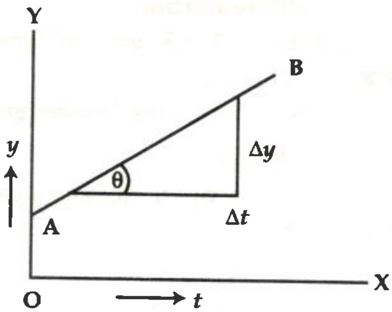
এক্ষেত্রে B ও C বিন্দুর মধ্যে দূরত্বের ব্যবধান Δx এবং সময়ের ব্যবধান Δt। তা হলে বেগের মান, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$; বলা যায় t-এর সাপেক্ষে x-এর পরিবর্তন হলো অন্তরীকরণের ভাষায় বেগের মান।

আবার t-এর Δt পরিবর্তনের জন্য Δy-এর অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তন লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় [চিত্র ৩.৯]। আলোচ্য ক্ষেত্রে Δy তথা Δt অতি ক্ষুদ্র হলে $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ সরলরেখাটির ঢাল নির্দেশ করবে।

$$\therefore \quad \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \text{ঢাল}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{dy}{dt} = \text{ঢাল}$$

অর্থাৎ সরণ (y) বনাম সময় (t) লেখচিত্র থেকে ঢাল নির্ণয়ের মাধ্যমে সময়ের পরিবর্তনের সাথে সরণের পরিবর্তন দ্বারা বেগ নির্ণয় করতে পারি।



চিত্র ৩.৯

আবার, মনে করি $x = f(t) = t^2$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

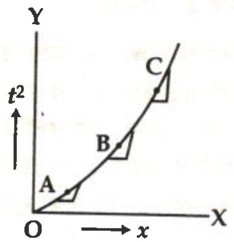
$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}$$

$$= \underset{p \to 0}{\text{Lt}} \frac{(t+p)^2 - t^2}{p}; \quad \Delta t = p \text{ ধরি}$$

$$= \underset{p \to 0}{\text{Lt}} \frac{2tp + p^2}{p} = \underset{p \to 0}{\text{Lt}} 2t + p = 2t$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(t^2) = 2t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.7)$$

নিচের লেখচিত্রে বক্র রেখায় বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত ঢালের মান সমান নয়। এইরূপ লেখচিত্রে কোনো বিন্দুর ঢাল নির্ণয় করতে হলে উক্ত বিন্দু সংলগ্ন এলাকায় অতি ক্ষুদ্র সময় Δt এবং তৎসংলগ্ন অতি ক্ষুদ্র দূরত্ব Δx বিবেচনা করতে হবে। এই ঢাল ওই বিন্দুতে অন্তরক সহগের সমান তা দেখানো যায়।



চিত্র ৩.১০

এক্ষেত্রে ঢালের মান $= \frac{\Delta t^2}{\Delta x}$ বা $\frac{d}{dx}(t^2) = 2t$ বুঝায়।

৩.১০ নং চিত্রে t^2 বনাম x লেখ অঙ্কন করা হয়েছে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১

১। একজন চালক তার গাড়ি $s = \left(\frac{1}{2}t^2 + 20\,t\right)$ m সূত্রানুসারে চালাতে আরম্ভ করল। 3 মিনিট পর তার গাড়ির অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং প্রান্ত বেগ কত হবে? [RUET Admission Test, 2014—15]

এখানে,

$$s = \frac{1}{2}t^2 + 20\,t$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = v = \frac{1}{2} \times 2\,t + 20 = t + 20$$

$$= 3 \times 60 + 20 = 200\ \text{ms}^{-1}\ [\because t = 3\ \text{min} = 3 \times 60\ \text{s}]$$

আবার, $s = \frac{1}{2}t^2 + 20t = \frac{1}{2} \times (3 \times 60)^2 + 20 \times 3 \times 60$

$$= 16200 + 3600 = 19800\ \text{m}$$

২। একটি গতিশীল কণার অতিক্রান্ত দূরত্ব, কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ ও সময়ের গুণফলের অর্ধেক। দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ ধ্রুবক।

ধরা যাক, গতিশীল কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$, তাৎক্ষণিক বেগ $= v$ (যখন সময় $= t$)

প্রশ্নানুসারে, $s = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}\frac{ds}{dt}t$ বা, $\frac{ds}{s} = \frac{2dt}{t}$

সমাকলন করে পাই, $\int \frac{ds}{s} = 2\int \frac{dt}{t}$ বা, $\ln s = 2\ln t + \ln c \ \therefore\ s = ct^2$

অবকলন করে পাই, $\frac{ds}{dt} = v = 2\,ct$

আবার, অবকলন করে পাই, $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a = 2c =$ ধ্রুবক

$\therefore$ কণাটির ত্বরণ ধ্রুবক (প্রমাণিত)।

৩। একটি গতিশীল কণার অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক হলে বস্তুটির ত্বরণ কীরূপ হবে ?

এখানে,

$s \propto t^2$ বা, $s = Kt^2$

$$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt} = 2Kt$$

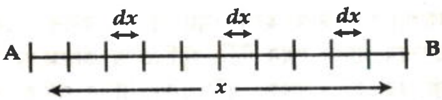
ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2Kt) = 2K =$ ধ্রুবক

সুতরাং, বস্তুটির ত্বরণ ধ্রুবক। অর্থাৎ কণাটি সমত্বরণে চলছে।

৩·৪·২ যোগজীকরণ বা সমাকলন
Integration

মনে করি একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্য x; দণ্ডটিকে অসংখ্য সমান ও ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করা হলো। এরূপ একটি ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য $= dx$। ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সকল অংশকে যোগ করলে সমগ্র দণ্ডের দৈর্ঘ্য x নির্ণয় করা যায়।

$$\therefore \quad \Sigma dx = x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.8)$$



চিত্র ৩·১১

এখানে Σ চিহ্ন যোগজীকরণ বা সমষ্টিকরণ বুঝায়।

সমীকরণ (3.8) কে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায়

$$\int dx = x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.9)$$

'$\int$' প্রতীকটি দ্বারাও যোগজীকরণ বা সমাকলন বুঝায়। এই সমীকরণ হতে দেখা যায় যে, dx-এর সমাকলিত মান x-এর সমান। তাহলে আমরা বলতে পারি সমাকলন এক ধরনের যোগজীকরণ। উপরের সমীকরণটির উভয় পাশে সমতা আনার জন্য উত্তর লেখার সময় একটি সমাকলন ধ্রুবক c যোগ করে লিখতে হয়, $\int dx = x + c$।

আবার মনে করি একটি ফাংশন $f(t)$ এর সমাকলিত মান, $\int f(t)dt = A(x)$

তা হলে $f(t)$ কে যোগজ রাশি বা integral রাশি বলে। $f(t)$-এর পর dt দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে সমাকলনটি করতে হবে t এর সাপেক্ষে। একে variable বা চলরাশি বলে।

১. কয়েকটি ক্ষেত্রে যোগজীকরণের প্রয়োগ

- ভেক্টরের সাধারণ সমাকলন স্কেলার রাশির মতোই। মনে করি $\vec{A}(t) = \hat{i}\, A_x(t) + \hat{j}\, A_y(t) + \hat{k}\, A_z(t)$ ভেক্টরটি একটিমাত্র স্কেলার চলরাশি t-এর সমাকলন; তা হলে,

  $\int \vec{A}\,(t)\, dt = \hat{i} \int A_x(t)\, dt + \hat{j} \int A_y(t) dt + \hat{k} \int A_z(t)\, dt$ হবে।

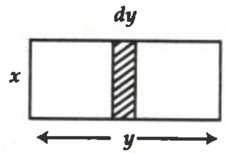
  একে $\vec{A}\,(t)$-এর **অনিশ্চিত সমাকলন** (Indefinite integral) বলে।

- অনেক ক্ষেত্রে সমাকলন ব্যবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া যেমন—

  $$\int \cos x\, dx = \sin x$$

  $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

অর্থাৎ $\sin x$ কে ব্যবকলন করলে $\cos x$ এবং $\cos x$ কে সমাকলন করলে $\sin x$ পাওয়া যায়।



চিত্র ৩·১২

- একটি আয়তক্ষেত্র অসংখ্য ফালির সমন্বয়ে গঠিত যার দৈর্ঘ্য x এবং প্রস্থ dy হলে [চিত্র ৩·১২] আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে $\int xdy, = x \int dy = xy$

- যদি প্রস্থের সীমা উল্লেখ করে দেওয়া থাকে তাহলে ক্ষেত্রফল $= \int_0^y x\, dy = x\,[y]_0^y = x\,(y - 0) = xy$

২. বেগের ক্ষেত্রে সমাকলনের প্রয়োগ

গতিশীল বস্তুর বেগ নির্ণয় কালে সরণকে মোট সময় দ্বারা ভাগ করে বেগ নির্ণয় করে থাকি। কিন্তু এই বেগ গড়বেগ ছাড়া আর কিছুই নয়। কারণ চলার ক্ষেত্রে বস্তুর গতি কখনো সুষম, কখনো অসম হয়। তাই যদি চলমান পথকে ক্ষুদ্রতম অসংখ্য প্রস্থে বা অংশে বিভক্ত করে প্রতিটি ক্ষুদ্রতম অংশ (dx) এবং এই ক্ষুদ্রতম অংশ অতিক্রমের সময় (dt) দ্বারা ভাগ করি তা হলে ক্ষুদ্রতম অংশের জন্য বেগ নির্ণয় করতে পারি। এরপর এই ক্ষুদ্রতম প্রস্থের জন্য নির্ণেয় বেগ (dv) কে সমাকলন করলে সমগ্র পথের জন্য বস্তুর প্রকৃত বেগ নির্ণয় করতে পারি। সমাকলন পদ্ধতিতে নিচে ইহা দেখানো হলো :

dx অংশের বেগ, $dv = \dfrac{dx}{dt}$

আবার সমগ্র পথের জন্য বেগ $= \int dv = v + c \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.10)$

যদি বেগের মান নির্দিষ্ট করা থাকে তা হলে উপরিউক্ত সমাকলনটি ওই সীমার মধ্যে রেখে সমাধান করলে প্রকৃত বেগ জানা যায়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় বেগের মান $v = 0$ থেকে $v = v$ হলে (3.10) নং সমীকরণকে এই সীমার মধ্যে সমাকলন করলে মোট বেগ পাওয়া যায়।

এক্ষেত্রে মোট বেগ $= \int_0^v dv = [v]_0^v = (v - 0) = v$

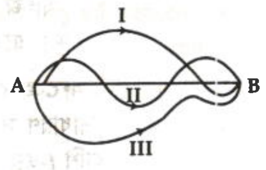
সুতরাং বলা যায় ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যোগফলই হলো মোট বা সমাকলন। একটি বাস্তব উদাহরণ দ্বারা বিষয়টি সম্বন্ধে ধারণা পাওয়া যায়। যেমন একজন মানুষ যখন টিভি স্টুডিওতে ক্যামেরার সামনে খবর পাঠ করে তখন তার ধারণকৃত ছবিটি অসংখ্য টুকরায় বিভক্ত করা হয়, আবার এটি যখন টিভির পর্দায় পৌঁছে তখন টুকরা টুকরা ছবিগুলো একত্রিত হয়ে পূর্ণাঙ্গ চিত্রে রূপ নেয়। এক্ষেত্রে স্টুডিওতে খণ্ড খণ্ড ছবিতে পরিণত হবার নাম ব্যবকলন আর টিভির পর্দায় খণ্ড খণ্ড চিত্র একত্রিত হওয়ার প্রক্রিয়াকে সমাকলন বা যোগজীকরণ বলে।

৩·৫ গতিবিষয়ক বিভিন্ন রাশি
Different quantities related to motion

১. সরণ (Displacement) : **কোনো নির্দিষ্ট দিকে কোনো বস্তুর সময়ের সাথে অবস্থান পরিবর্তনকে বস্তুটির সরণ বলে।** সরণ একটি ভেক্টর রাশি। সুতরাং এর মান ও দিক উভয়ই আছে।

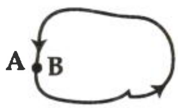
বস্তুর প্রাথমিক অবস্থান ও শেষ অবস্থান সংযোগকারী সরলরেখার দৈর্ঘ্য দ্বারা সরণ পরিমাপ করা হয়। বস্তুটির প্রাথমিক অবস্থান হতে শেষ অবস্থানের দিক সরণের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ৩·১৩]। বস্তুর সরণ পথ-নিরপেক্ষ, কেবল প্রাথমিক ও শেষ অবস্থানের ওপর নির্ভর করে।

ব্যাখ্যা : চিত্র ৩·১৩-এ একটি বস্তুকণা তিনটি ভিন্ন পথে প্রাথমিক অবস্থান A থেকে শেষ অবস্থান B-তে পৌঁছানো দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৩·১৩

কণাটি প্রতি ক্ষেত্রে ভিন্ন পথে গেলেও প্রতিটি ক্ষেত্রে বস্তুটির সরণ = AB। সরলরেখার দৈর্ঘ্য এবং সরণের অভিমুখ A থেকে B-এর দিকে। অর্থাৎ কণাটির সরণ পথ-নিরপেক্ষ, শুধুমাত্র প্রাথমিক ও শেষ অবস্থানের ওপর নির্ভরশীল।

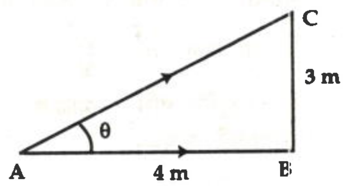


চিত্র ৩·১৪

যদি বস্তুটির প্রাথমিক ও শেষ অবস্থান একই বিন্দু হয় তবে বস্তুটির সরণ শূন্য হবে [চিত্র ৩·১৪]।

সরণের একক ও মাত্রা : S. I. পদ্ধতিতে সরণের একক মিটার (m)। সরণের মাত্রা হলো [L]

উদাহরণ : একটি বস্তু পূর্বদিকে 4 m অতিক্রম করার পর উত্তরদিকে 3 m গেল। বস্তুটির সরণের মান ও দিক নির্ণয় কর।



চিত্র ৩·১৫

বস্তুটির পূর্ব দিকের সরণ, AB = 4 m

এবং উত্তর দিকে সরণ, BC = 3 m

বস্তুটির প্রাথমিক অবস্থান A ও শেষ অবস্থান C হওয়ায় এর সরণ,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\text{ m}$$

বস্তুটির অভিমুখ A হতে C এর দিকে [চিত্র ৩·১৫]।

ধরি $\overrightarrow{AC}$ অভিমুখ AB-এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} = 0{\cdot}75 = \tan 36{\cdot}9^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = 36{\cdot}9^\circ$$

সুতরাং, বস্তুটির সরণের অভিমুখ হলো পূর্বদিকের সাথে 36·9° কোণ করে উত্তর দিকে।

২. দ্রুতি (Speed) : **কোনো গতিশীল বস্তু একক সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ওই বস্তুর দ্রুতি বলে।**

যদি একটি বস্তুকণা t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে, তবে বস্তুকণাটির দ্রুতি, $u = \frac{s}{t}$।

দ্রুতি একটি স্কেলার রাশি। এর মান আছে, কিন্তু অভিমুখ নেই।

দ্রুতির একক ও মাত্রা : S. I. পদ্ধতিতে দ্রুতির একক মিটার/সেকেন্ড (ms^{-1})। এর মাত্রা = $\frac{[L]}{[T]} = \boxed{[LT^{-1}]}$

৩. গড় দ্রুতি (Average speed) : **কোনো বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।**

ব্যাখ্যা : মনে করি একটি গতিশীল বস্তু মোট সময় t-এ মোট দূরত্ব s অতিক্রম করল।

$$\therefore \quad \text{গড় দ্রুতি, } \bar{v} = \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট ব্যয়িত সময়}} = \frac{s}{t}$$

কোনো বস্তু যদি প্রতি একক সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে অর্থাৎ বস্তুটি সমদ্রুতিতে গতিশীল হয়, তবে ওই বস্তুর দ্রুতি ও গড় দ্রুতি একই হয়।

৪. তাৎক্ষণিক দ্রুতি (Instantaneous speed) : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি বলে। ক্যালকুলাসের নিয়ম অনুসারে কোনো গতিশীল বস্তু Δt সময়ে Δs দূরত্ব অতিক্রম করলে এর তাৎক্ষণিক দ্রুতি হবে,

$$v = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

বস্তুটি সমদ্রুতিতে গতিশীল হলে প্রতিটি মুহূর্তে বস্তুটির তাৎক্ষণিক দ্রুতি সমান হয়।

উদাহরণ : একটি বস্তুকণার ওপর স্থির বল ক্রিয়া করায় কণাটির সরণ ও সময় $t = \sqrt{x} + 5$ সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত। বস্তুকণাটির বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণ কত ? (সরণ এবং দূরত্ব এস. আই. এককে প্রকাশিত)

এখানে,

$$t = \sqrt{x} + 5$$

$$\sqrt{x} = t - 5$$

$$\therefore \quad x = (t-5)^2 = t^2 + 25 - 10t$$

$\therefore$ কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ, $v = = \frac{dx}{dt} = 2t - 10$

এখন, কণাটির বেগ শূন্য হবে, যখন $2t - 10 = 0$

$\therefore \quad t = \frac{10}{2} = 5$ সেকেন্ড

৫. গড় বেগ (Average velocity) : যেকোনো সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর মোট সরণকে ওই সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকেই বস্তুটির গড় বেগ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি Δt সময় ব্যবধানে একটি বস্তুর মোট সরণ $\Delta \vec{r}$

$\therefore$ গড় বেগ, $\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

যদি বস্তুটির গতি একমাত্রিক হয় এবং বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হয়, সেক্ষেত্রে বেগের একটিমাত্র উপাংশ থাকে। উপাংশটি হবে—

$\overline{\vec{v}}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}$ [$\because$ একমাত্রিক কাঠামোতে $\vec{r} = x\hat{i}$]

এবং গড় বেগের মান $\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

[DAT 20-21]

৬. তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ (Instantaneous velocity or velocity) : সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা সংক্ষেপে বেগ বলা হয়। তাৎক্ষণিক বেগ বলতে কোনো বস্তুর বিশেষ মুহূর্তের বেগ বুঝায়। কোনো বস্তুর তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করতে হলে যে মুহূর্তের বেগ নির্ণয় করতে হবে ঠিক তার পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মুহূর্তে বস্তুটির অবস্থান জানা প্রয়োজন। পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মুহূর্ত বা সময়ের ব্যবধান অবশ্যই অত্যন্ত ক্ষুদ্র হতে হবে (প্রায় শূন্যের কাছাকাছি)।

অর্থাৎ সময়ের মান শূন্যের কাছাকাছি হলে উক্ত সময়ে সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

সুতরাং তাৎক্ষণিক একমাত্রিক বেগ $\vec{v}_x = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

ওপরের আলোচনা থেকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে গড় বেগের সীমান্তিক মানকেই তাৎক্ষণিক বেগ বা সংক্ষেপে বেগ বলে।

৭. মধ্য বেগ (Mean velocity) : কোনো একটি গতিশীল বস্তুর আদি বেগ এবং শেষ বেগ-এর অভিমুখ একই হলে তাদের যোগফলের অর্ধেককে মধ্য বেগ বলে।

মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট দিকে একটি বস্তুর আদি বা প্রথম বেগ $\vec{v}_0$ এবং শেষ বেগ $\vec{v}$.

$\therefore$ $\boxed{\text{মধ্য বেগ} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}}$

৮. আপেক্ষিক বেগ (Relative velocity) : সাধারণত 'কোনো বস্তুর বেগ' বলতে আমরা পৃথিবীর ওপর কোনো স্থির বস্তুর সাপেক্ষে এর বেগ বুঝি। আবার আমরা একটি বস্তু A-এর বেগ পৃথিবীর ওপর সচল আরেকটি বস্তু B-এর

সাপেক্ষেও নির্ণয় করতে পারি। একে B বস্তুর সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বলে। অর্থাৎ **দুটি চলমান বস্তুর একটির সাপেক্ষে অপরটির অবস্থানের পরিবর্তনের হারকে আপেক্ষিক বেগ বলে।** এক্ষেত্রে কোনো বস্তু সাপেক্ষে আরেকটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ হবে বেগদ্বয়ের ভেক্টর বিয়োগফলের সমান; অর্থাৎ পৃথিবী পৃষ্ঠের ওপর সচল কোনো বস্তু সাপেক্ষে আরেকটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বস্তু দুটির বেগের ভেক্টর বিয়োগফলের সমান।

মনে কর A ও B দুটি বস্তুর বেগ যথাক্রমে v_A এবং v_B হলে B সাপেক্ষে A-এর আপেক্ষিক বেগ

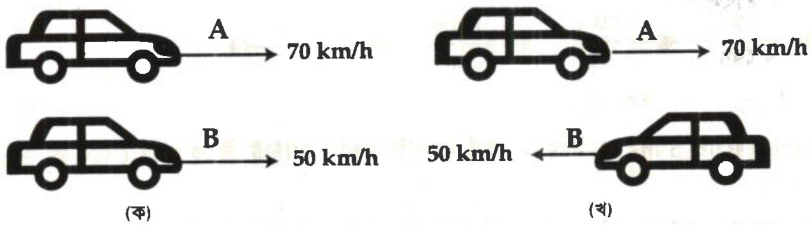
$$v_{AB} = v_A - v_B \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.11)$$

আবার A সাপেক্ষে B-এর আপেক্ষিক বেগ

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

$$\therefore \quad v_{BA} = - v_{BA} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.12)$$

উদাহরণ (ক) : নিচের চিত্র দুটি লক্ষ কর। প্রথম চিত্রে দুটি গাড়ি একই দিকে গতিশীল এবং দ্বিতীয় চিত্রে পরস্পর বিপরীত দিকে গতিশীল। এদের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করবে কীভাবে ? এক্ষেত্রে দুটি সমান্তরাল সরল চলন গতির ক্ষেত্রে আপেক্ষিক বেগ নির্ণয়ে নিম্নের দুটি গতি বিবেচনা করতে হবে।



চিত্র ৩.১৬

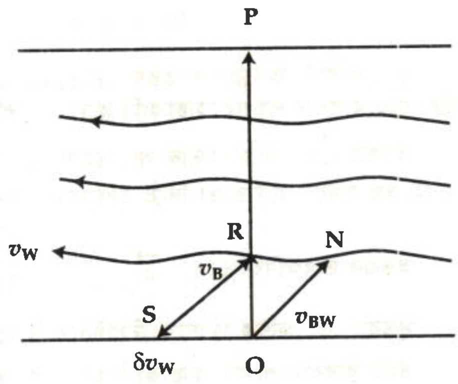
● **সমমুখী গতি :** দুটি বস্তু সরলরেখা বরাবর একই দিকে চললে B বস্তু সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগের মান বস্তুদ্বয়ের বেগের মানের বিয়োগফলের সমান হয়।

অর্থাৎ $v_{AB} = v_A - v_B$, যদি $v_A > v_B$ হয়, তবে v_{AB}-এর অভিমুখ হবে v_A-এর অভিমুখের দিকে। সুতরাং B থেকে দেখলে A বস্তুকে সামনের দিকে v_{AB} বেগে এগোতে দেখা যাবে। আবার A থেকে দেখলে B বস্তুকে v_{BA} $(= - v_{AB})$ বেগে পেছনের দিকে যেতে দেখা যাবে। কারণ v_{BA} এর অভিমুখ v_{AB}-এর বিপরীতমুখী।

● **বিপরীতমুখী গতি :** দুটি বস্তু সরলরেখা বরাবর বিপরীত দিকে চলতে থাকলে যদি A বস্তুর বেগ v_A কে ধনাত্মক ধরা হয়, তা হলে B বস্তুর বেগ v_B কে ঋণাত্মক ধরতে হবে। এখানে B সাপেক্ষে A বস্তুর আপেক্ষিক বেগ হবে, $v_{AB} = v_A - (- v_B) = v_A + v_B$, যদি $v_A > v_B$ হয়।

সুতরাং B বস্তু থেকে দেখলে A বস্তু v_{AB} বেগে B বস্তুর দিকে এগোচ্ছে বা দূরে চলে যাচ্ছে বলে মনে হবে। যেহেতু $v_{BA} = - v_B - v_A = - (v_B + v_A)$, অতএব A বস্তু থেকে দেখলে মনে হবে যে, B বস্তুটি v_{BA} $(= - v_{AB})$ বেগে A বস্তুর দিকে এগোচ্ছে বা দূরে সরে যাচ্ছে।

উদাহরণ (খ) : মনে কর এক ব্যক্তি নৌকা করে এপারের কোনো বিন্দু O থেকে নদীর ওপারে ঠিক বিপরীতে অবস্থিত P বিন্দুতে সরাসরি যেতে চায়; তা হলে তাকে ON অভিমুখে নৌকা চালাতে হবে [চিত্র ৩.১৭]।



চিত্র ৩.১৭

যদি স্রোত সাপেক্ষে নৌকাটির আপেক্ষিক বেগ v_{BW} এবং স্রোতের বেগ v_W হয়, তবে এদের ভেক্টর যোগফল নৌকাটির বেগ v_B কে প্রকাশ করে, অর্থাৎ $\vec{v}_B = \vec{v}_W + \vec{v}_{BW}$

যেকোনো দিকের গতি v_1 ও v_2 বেগে দুটি বস্তু একই স্থান থেকে যেকোনো দিকে α কোণে চললে আপেক্ষিক বেগ, $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(180° - \alpha)}$

সিদ্ধান্ত : ওপরের উদাহরণ থেকে এ সিদ্ধান্ত নেয়া যায় :

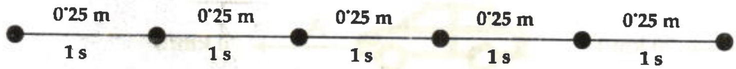
(১) দুটি গতিশীল বস্তু একই দিকে চললে বস্তু দুটির বেগ বিয়োগ করে আপেক্ষিক বেগ পাওয়া যায়।

(২) দুটি গতিশীল বস্তু বিপরীত দিকে চললে আপেক্ষিক বেগ বের করতে বেগ দুটি যোগ করতে হয়।

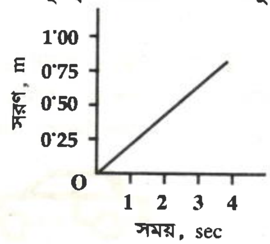
৯. সমবেগ (Uniform velocity) : কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বলের মান ও দিক ধ্রুব থাকলে, ওই বস্তুর বেগও ধ্রুব থাকে। বস্তুর এই ধ্রুব বেগকে সমবেগ বলে।

উদাহরণ : শব্দের বেগ, আলোর বেগ ইত্যাদি।

ব্যাখ্যা : ৩·১৮ (ক) চিত্রে পাঁচটি বিন্দু দ্বারা 1 সেকেন্ড পরপর কোনো একটি সরলরেখা বরাবর একই দিকে গতিশীল একটি বস্তুর অবস্থান প্রকাশ করা হয়েছে। এখানে পরপর দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 0·25m। গতি অনুসারে বস্তুটি একই অভিমুখে প্রতি সেকেন্ডে 0·25m দূরত্ব অতিক্রম করছে এবং সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে। কাজেই বস্তুর এই বেগ সমবেগ এবং সমবেগের মান 0·25 ms^{-1}। ৩·১৮(খ) চিত্রে সরণ বনাম সময় লেখচিত্র দ্বারা সমবেগ দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৩·১৮ (ক)

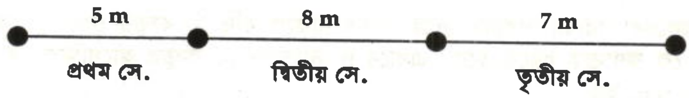


চিত্র ৩·১৮ (খ)

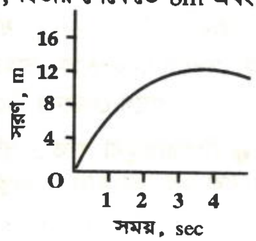
একটি বস্তুর সমবেগ 5 ms^{-1}। উক্তিটির অর্থ বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট দিকে প্রতি সেকেন্ডে 5m দূরত্ব অতিক্রম করে চলছে।

১০. অসম বেগ (Variable velocity) : যদি ভিন্ন ভিন্ন সময়ে বস্তুর বেগ ভিন্ন ভিন্ন হয় তবে তাকে অসম বেগ বলে। কাজেই সময়ের সাথে সরণের হারের মান অথবা দিক অথবা উভয়েই পরিবর্তিত হলে ওই সরণের হারই অসম বেগ।

ব্যাখ্যা : ধরি, একটি গতিশীল বস্তু কোনো একটি দিকে প্রথম সেকেন্ডে 5m, দ্বিতীয় সেকেন্ডে 8m এবং তৃতীয় সেকেন্ডে 7m পথ অতিক্রম করল [চিত্র ৩·১৯ (ক)]। এখানে বস্তু সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে না। সুতরাং বস্তুর এই বেগ অসম বেগ। অসম বেগের লেখচিত্র ৩·১৯ (খ)-এ দেখানো হয়েছে।



চিত্র ৩·১৯ (ক)



চিত্র ৩·১৯ (খ)

১১. তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ (Instantaneous acceleration or acceleration) : কোনো একটি গতিশীল বস্তুর সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বেগ পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা সংক্ষেপে ত্বরণ বলে।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, অত্যন্ত অল্প সময়ে Δt-এ কোনো বস্তুর বেগ পরিবর্তন $\Delta\vec{v}$ হয়। বস্তুটির বেগের পরিবর্তন যে খুবই স্বল্প সময়ে ঘটেছে তা দিয়ে ভাগ করলে তাৎক্ষণিক ত্বরণ পাওয়া যায়।

অতএব তাৎক্ষণিক ত্বরণ, $$\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

সুতরাং, তাৎক্ষণিক ত্বরণকে নিম্নলিখিত উপায়ে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে, গড় ত্বরণের সীমাস্থিক মান ত্বরণের সমান।

ত্বরণের মান হবে, $a = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$

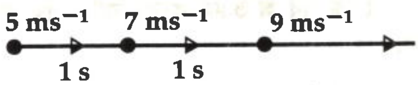
উল্লেখ্য, কোনো বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ ওই বিন্দুতে বস্তুটির বেগের লম্ব বরাবর হবে।

ত্বরণ দুই প্রকার; যথা—(ক) **সমত্বরণ** (uniform acceleration) ও (খ) **অসমত্বরণ** (variable acceleration)।

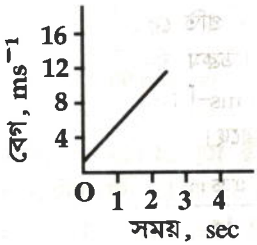
(ক) সমত্বরণ : ত্বরণ যদি সব সময় ধ্রুব হয় তবে তাকে সমত্বরণ বলে। অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ত্বরণ সমত্বরণ। সমত্বরণশীল বস্তুতে সমবল ক্রিয়া করে। সমত্বরণে ত্বরণের মান ও দিক উভয়ই ধ্রুব থাকে।

৩·২০ (ক) চিত্রে একটি সরলরেখা বরাবর বস্তুর পরপর সেকেন্ডের বেগ দেখিয়ে তার ত্বরণের প্রকৃতি নির্দেশ করা হয়েছে। ৩·২০ (খ) চিত্রে লেখচিত্রের সাহায্যে সমত্বরণ দেখানো হয়েছে। এখানে সমত্বরণের মান $2\ ms^{-2}$। সমত্বরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র সরলরেখা এবং ঢাল সর্বত্র সমান হয়।

একটি বস্তুর সমত্বরণ $10\ ms^{-2}$ এই উক্তি দ্বারা বুঝা যায় যে, একই দিকে বস্তুর বেগ প্রতি সেকেন্ডেই $10\ ms^{-1}$ বৃদ্ধি পাচ্ছে।



(ক) সমত্বরণ



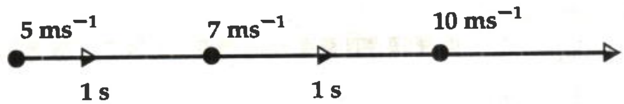
(খ) সমত্বরণ

চিত্র ৩·২০

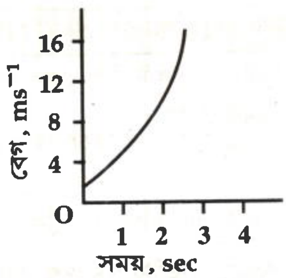
কাজ : সমদ্রুতিতে চলমান কোনো বস্তুর ত্বরণ থাকা কী সম্ভব ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকা সম্ভব। একটি বস্তু যদি সম বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে পরিধি বরাবর আবর্তিত হয় তবে বস্তুটির ওপর কেন্দ্রাভিমুখী অভিকেন্দ্র ত্বরণ ক্রিয়াশীল হয়।

(খ) অসম ত্বরণ : সময়ের সাথে যখন ত্বরণ ভিন্ন ভিন্ন হয় তখন তাকে অসম ত্বরণ বলে। ত্বরণের মান ও দিক, কিংবা মান অথবা দিক পরিবর্তনের জন্য অসম ত্বরণ সৃষ্টি হতে পারে। বাস, ট্রেন, মোটরগাড়ি ইত্যাদির ত্বরণ অসম ত্বরণের উদাহরণ। এক কথায় গতিশীল প্রায় বস্তুর ত্বরণই অসম ত্বরণ।



(ক) অসম ত্বরণ



(খ) অসম ত্বরণ

চিত্র ৩·২১

৩·২১ (ক) ও (খ) চিত্রে যথাক্রমে সরলরেখা ও লেখচিত্র দ্বারা অসম ত্বরণ দেখানো হয়েছে। লেখচিত্রের বিভিন্ন বিন্দুতে ঢাল ভিন্ন ভিন্ন হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.২

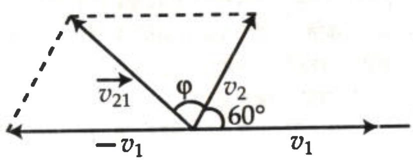
১। দুটি বস্তুর একটি অপরটির বেগের দ্বিগুণ বেগে তার সাথে 60° কোণ করে চলছে। এখানে একটির সাপেক্ষে অপরটির আপেক্ষিক বেগ কত?

ধরা যাক প্রথম বস্তুটির বেগ v_1 এবং দ্বিতীয়টির বেগ v_2।

প্রশ্নানুসারে, যদি $v_2 = u$ হয় তবে $v_1 = 2u$

∴ প্রথম বস্তুর সাপেক্ষে দ্বিতীয় বস্তুর আপেক্ষিক বেগ,

$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$



চিত্রানুসারে, $v_{21} = \sqrt{v_2^2 + v_1^2 + 2v_2v_1 \cos 120°}$

$$= \sqrt{u^2 + 4u^2 + 2u.2u\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{5u^2 - 2u^2} = \sqrt{3}\,u$$

ধরা যাক, এই আপেক্ষিক বেগ প্রথম বস্তুর গতিবেগ অভিমুখের সাথে φ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \quad \tan\varphi = \frac{v_1 \sin 120°}{v_2 + v_1 \cos 120°}$$

$$= \frac{2u \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{u - 2u \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}\,u}{0}$$

$$= \infty = \tan 90°$$

$$\therefore \quad \varphi = 90°$$

২। এক ব্যক্তি গড়ে 24 kmhr^{-1} বেগে গন্তব্যস্থানের অর্ধেক পথ অতিক্রম করে। বাকি পথ কত বেগে চললে ওই ব্যক্তি সম্পূর্ণ পথ 32 kmhr^{-1} গড় গতিবেগে অতিক্রম করবে ?

ধরা যাক, ওই ব্যক্তি মোট $2x$ km পথ অতিক্রম করে।

প্রশ্নানুসারে, প্রথম x km যেতে সময় লাগে $\frac{x}{24}$ hr। সমগ্র পথ 32 kmhr^{-1} গড় বেগে অতিক্রম করলে মোট সময় লাগে,

$$\frac{2x}{32}\text{ hr} = \frac{x}{16}\text{ hr}$$

$\therefore$ শেষ অর্ধেক যেতে সময় নেয় $\left(\frac{x}{16} - \frac{x}{24}\right)$ hr $= \frac{x}{48}$ hr

$\therefore$ দ্বিতীয় অর্ধেক ওই ব্যক্তির গতিবেগ হবে, $\frac{x}{x/48} = 48$ kmhr^{-1}

কাজ : একটি বস্তুর গড় বেগ শূন্য কিন্তু ওই বস্তুর গড় দ্রুতি শূন্য নাও হতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

বস্তুটি যদি একটি বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে আবার ওই বিন্দুতে ফিরে আসে, তবে তার সরণ শূন্য হয়। এখন, গড় বেগ $= \dfrac{\text{মোট সরণ}}{\text{মোট সময়}}$। এক্ষেত্রে যেহেতু মোট সরণ শূন্য, তাই গড় বেগ শূন্য হবে।

আবার আমরা জানি, গড় দ্রুতি $= \dfrac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$। এক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব শূন্য নয় বিধায় গড় দ্রুতি শূন্য হবে না। সুতরাং, বস্তুটির গড় বেগ শূন্য হলেও গড় দ্রুতি শূন্য নয়।

নিজে কর : একটি বস্তুর বেগ শূন্য কিন্তু ত্বরণ শূন্য নয়—এরকম হতে পারে কী? ব্যাখ্যা কর।

৩.৬ অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণের সাহায্যে গতির সমীকরণ প্রতিপাদন
Derivation of equations of motion using differentiation and integration

পূর্বের অনুচ্ছেদে দূরত্ব, সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি রাশিগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এই রাশিগুলো পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। এগুলোকে কয়েকটি সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এই সমীকরণগুলোকে গতির সমীকরণ বলে। অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ ব্যবহার করে এ সমীকরণগুলো নিম্নে প্রতিপাদন করা হলো :

(ক) সমবেগে গতিশীল বস্তুর দূরত্বের সমীকরণ $\boxed{(s = vt}$ বা, $x = x_0 + v_x t)$

মনে করি একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে সমবেগে গতিশীল।

ধরি, বস্তুটির সমবেগ $= v$

আদি সরণ $= 0$

t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$

অতি ক্ষুদ্র সময় dt সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব ds হলে,

$t + dt$ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s + ds$

আমরা জানি,

বেগ, $v = \frac{ds}{dt}$

বা, $ds = vdt$ ... ... (3.13)

যখন $t = 0$, তখন $s = 0$ এবং যখন $t = t$, তখন $s = s$

সমীকরণ (3.13)-কে উল্লিখিত সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_0^s ds = \int_0^t vdt$$

বা, $\int_0^s ds = v\int_0^t dt$ [$\because v$ ধ্রুবক]

বা, $s = v \times t$ ... ... (3.14)

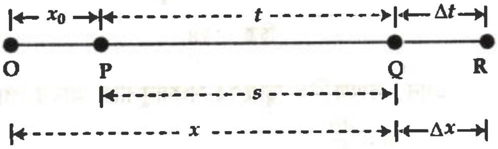
যদি বস্তুটি X-অক্ষের দিকে গতিশীল হয় এবং গতির শুরুতে অর্থাৎ যখন $t = 0$, তখন $s = x_0$ এবং যখন $t = t$, তখন $s = x$ এবং বেগ, $v = v_x$ হয় [চিত্র ৩.২২], তবে সমীকরণ (3.13)-কে উপরিউক্ত সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} ds = v_x \int_0^t dt$$

বা, $[s]_{x_0}^{x} = v_x [t]_0^t$

বা, $x - x_0 = v_y t$

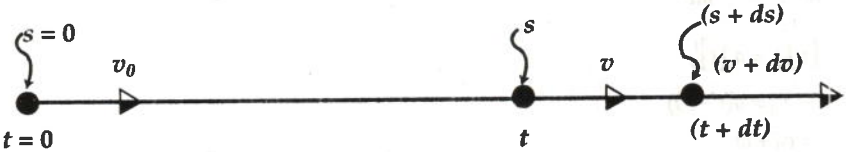
বা, $x = x_0 + v_x t$ ... ... (3.15)



চিত্র ৩·২২

(খ) সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর শেষ বেগের সমীকরণ $\boxed{(v = v_0 + at)}$ বা $v_x = v_{x0} + a_x t$)

মনে করি কোনো একটি দিকে v_0 আদি বেগসহ a সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ অতি অল্প dt সময়ে v হতে



চিত্র ৩·২৩

বৃদ্ধি পেয়ে $v + dv$ হয় [চিত্র ৩·২৩]। তা হলে ত্বরণের সংজ্ঞা অনুসারে,

ত্বরণ $a = \frac{dv}{dt}$

বা, $dv = adt$ ... ... (3.16)

যখন $t = 0$, তখন $v = v_0$ এবং যখন $t = t$, তখন $v = v$। এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.16)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$$

বা, $\int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt$

বা, $[v]_{v_0}^{v} = a[t]_0^t$

বা, $v - v_0 = at$

বা, $v = v_0 + at$ ... ... (3.17)

বস্তু সম মন্দনে চললে, মন্দন = – ত্বরণ = $-a$ এবং সেক্ষেত্রে,

$$v = v_0 - at \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.18)$$

স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v_0 = 0$, a = ধ্রুবক হয়। সেক্ষেত্রে v = ধ্রুবক $\times\, t$ বা $v \propto t$ হয় অর্থাৎ স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে বেগ সময়ের সমানুপাতিক।

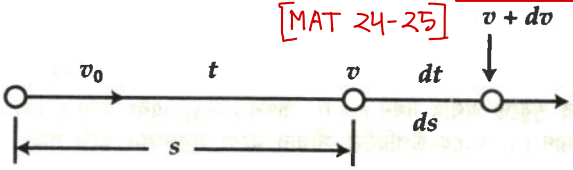
বি. দ্র. X-অক্ষ বরাবর গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে আদিবেগ v_{x0}, শেষ বেগ v_x এবং ত্বরণ a_x ধরলে সমীকরণ (3.17) পরিবর্তিত হবে।

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.19)$$

অনুরূপভাবে, সমীকরণ (3.18) পরিবর্তিত হবে। Y বা Z -অক্ষ বরাবর গতির ক্ষেত্রে x-এর স্থলে যথাক্রমে y বা z ব্যবহার করতে হবে।

(গ) সমত্বরণে বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ ($s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ বা $x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$)

[MAT 24-25]



চিত্র ৩·২৪

মনে করি, একটি বস্তুকণা v_0 আদি বেগসহ a সমত্বরণে কোনো নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল।

বস্তুকণাটি t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং একই দিকে আরও অতি ক্ষুদ্র সময় dt পরে ds দূরত্ব অতিক্রমের পর $v + dv$ বেগ প্রাপ্ত হয় [চিত্র ৩·২৪]।

এখন, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

বা, $$dv = adt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.20)$$

যখন $t = 0$, তখন বেগ $v = v_0$ এবং যখন $t = t$, তখন বেগ $v = v$। এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.20)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$$

বা, $$[v]_{v_0}^{v} = a\,[t]_0^t$$

বা, $$v - v_0 = a(t - 0)$$

বা, $$v = v_0 + at \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.21)$$

আবার তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

বা, $$ds = vdt$$

বা, $ds = (v_0 + at)dt$ [সমীকরণ (3.21)-এর সাহায্যে]

বা, $$ds = v_0 dt + atdt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.22)$$

আবার যখন সময়, $t = 0$ অর্থাৎ গণনার শুরুতে $s = 0$ এবং t সময় পরে $s = s$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.22)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_0^s ds = \int_v^t v_0 dt + \int_v^t atdt$$

বা, $$\int_0^s ds = v_0 \int_v^t dt + a \int_v^t tdt$$

বা, $$[s]_0^s = v_0\,[t]_0^t + a\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

বা, $$(s - 0) = v_0\,(t - 0) + a\left(\frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$$

বা, $$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.23)$$

আবার, বস্তুটি স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে গতিশীল হলে, আমরা পাই,

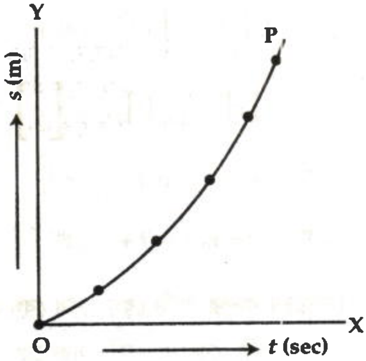
$$s = 0 \times t + \frac{1}{2}at^2$$

বা, $s = 0 + \frac{1}{2}at^2$

বা, $s = \frac{1}{2}at^2$

বা, $s =$ ধ্রুবক $\times t^2$ $\left[\because \frac{1}{2}a = \text{ধ্রুবক}\right]$

বা, $\boxed{s \propto t^2}$



চিত্র ৩.২৫

অর্থাৎ স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

চিত্র ৩.২৫-এ সময়ের সঙ্গে সরণের লেখচিত্র দেখানো হয়েছে।

যদি বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হয় এবং $t = 0$ সময়ে আদিবেগ $= v_{x0}$, অন্য যেকোনো সময় t-তে শেষ বেগ $= v$ ও সমত্বরণ a_x ধরা হলে সমীকরণ (3.23) লেখা যায়, $s = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

এখন $t = 0$ সময়ে বস্তুটির আদি অবস্থান x_0 এবং t সময়ে এর অবস্থান x হলে, $s = x - x_0$ হবে।

সেক্ষেত্রে,

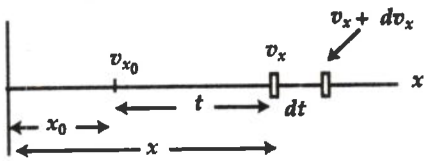
$$s = x - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

বা, $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ ... ... (3.24)

বস্তু a সমত্বরণে না চলে a সমমন্দনে চললে, মন্দন = — ত্বরণ = $-a$ সমীকরণ (3.24) হতে পাই,

$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ ... ... (3.25)

মনে করি, একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর a_x সমত্বরণে গতিশীল এবং গণনার শুরুতে অর্থাৎ যখন $t = 0$ তখন বস্তুটির আদি অবস্থান $= x_0$, বেগ $= v_{x_0}$ এবং t সময় পরে অবস্থান $= x$, বেগ $= v_x$; এখন বস্তুটি একই দিকে আরও ক্ষুদ্র সময় dt পরে dx দূরত্ব অতিক্রম করে $v_x + dv_x$ বেগ প্রাপ্ত হলে, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,



চিত্র ৩.২৬

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

বা, $dv_x = a_x dt$ ... ... (3.26)

সমীকরণ (3.26)-কে যথাযথ সীমা তথা $t = 0$ ও $t = t$ এবং v_{x_0} ও v_x সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_{x_0}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt$$

বা, $[v_x]_{v_{x_0}}^{v_x} = a_x [t]_0^t$

বা, $v_x - v_{x_0} = a_x (t - 0)$

বা, $v_x = v_{x_0} + a_x t$ ... ... (3.27)

আবার, তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে পাই,

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

বা, $dx = v_x dt$ বা, $dx = (v_{x0} + a_x t)\, dt$ ... ... (3.28) [সমীকরণ (3.27) এর সাহায্যে]

সমীকরণ (3.28)-এর উভয় পক্ষকে x_0 ও x এবং $t = 0$ ও t সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_{x_0} + a_x t)\, dt$$

বা, $[x]_{x_0}^{x} = v_{x_0}[t]_0^t + a_x \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$

বা, $x - x_0 = v_{x_0} t + a_x \times \frac{t^2}{2}$

বা, $x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$

[DAT 22-23]

(ঘ) সমত্বরণে বস্তুর আদি বেগ, শেষ বেগ এবং দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক $\boxed{v^2 = v_0{}^2 + 2as}$ বা, $v_x{}^2 = v_{x0}^2 + 2a(x - x_0)$

মনে করি, কোনো একটি সরলরেখা বরাবর a সমত্বরণে গতিশীল একটি বস্তুর আদি বেগ $= v_0$; t সময় পরে তার শেষ বেগ $= v$ এবং উক্ত সময়ে বস্তুটি s দূরত্ব অতিক্রম করে। v, v_0, a ও s-এর সম্পর্কজনিত সমীকরণ প্রতিপাদন করতে হবে।

তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

বা, $a = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt}$

বা, $a = \frac{dv}{ds} \times v$

বা, $ads = v \times dv$ … … … (3.29)

যখন $s = 0$, তখন $v = v_0$ এবং যখন $s = s$, তখন $v = v$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.29)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_0^s ads = \int_{v_0}^{v} vdv \quad \text{বা,} \quad a\int_0^s ds = \int_{v_0}^{v} vdv$$

বা, $a[s]_0^s = \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v}$

বা, $a(s - 0) = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right)$

বা, $as = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$

বা, $2as = v^2 - v_0^2$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2as$ … … … (3.30)

আবার, বস্তুটি স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলা শুরু করলে,

আমরা পাই,

$$v^2 = 0^2 + 2as$$

বা, $v^2 = 2as$

বা, $v^2 = \text{ধ্রুবক} \times s$ [$\because$ $2a$ ধ্রুব সংখ্যা]

বা, $v^2 \propto s$

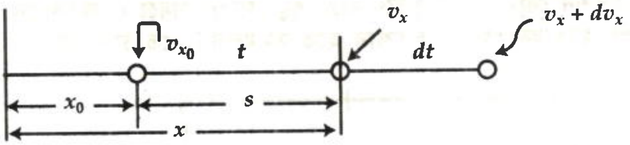
বা, $\boxed{v \propto \sqrt{s}}$

অর্থাৎ স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে গতিশীল কোনো বস্তুর শেষ বেগ অতিক্রান্ত দূরত্বের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

$v_x^2 = v_x^2 + 2a_x(x - x_0)$ প্রতিপাদন :

মনে করি, একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর a_x সমত্বরণে গতিশীল।

গণনার শুরুতে, অর্থাৎ যখন সময়, $t = 0$ তখন বস্তুটির আদিবেগ $= v_{x0}$ এবং আদি অবস্থান $= x_0$ এবং t সময় পরে বেগ $= v_x$ এবং অবস্থান $= x$



চিত্র ৩·২৭

এখন, বস্তুটি ওই X-অক্ষ বরাবরই আরও অতি ক্ষুদ্র সময় dt পরে $v_x + dv_x$ বেগ প্রাপ্ত হলে, তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

বা, $a_x = \frac{dv_x}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ বা, $a_x = \frac{dv_x}{dx} \times v_x$

বা, $a_x dx = v_x \times dv_x$ ... ... (3.31)

যখন $x = x_0$, তখন $v = v_{x0}$ এবং যখন $x = x$, তখন $v = v_x$; এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (3.31)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} a_x dx = \int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x$$

বা, $a_x \int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x$

বা, $a_x [x]_{x_0}^{x} = \left[\frac{v_x^2}{2}\right]_{v_{x0}}^{v_x}$

বা, $a_x(x - x_0) = \left(\frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{x_0}^2}{2}\right)$

বা, $a_x(x - x_0) = \frac{v_x^2 - v_{x_0}^2}{2}$

বা, $v_x^2 - v_{x_0}^2 = 2a_x(x - x_0)$

বা, $v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$ ... ... (3.32)

অনুসন্ধানমূলক কাজ : কোনো বস্তুর ত্বরণ স্থির থাকলে তার বেগের দিক পরিবর্তিত হতে পারে কী ?

কোনো বস্তুর ত্বরণ স্থির থাকলেও তার বেগের দিক পরিবর্তিত হতে পারে। এটি সম্ভব যদি ত্বরণ ও বেগের দিক একই না হয়; যেমন: কোনো বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে কোনো কোণে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি অর্ধাবৃত্তাকারের পথে ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসে। বস্তুটির গতিপথের প্রতিটি বিন্দুতে বস্তুর ত্বরণ হলো অভিকর্ষজ ত্বরণ যার মান স্থির; কিন্তু বস্তুর গতিবেগের দিক সর্বদাই পরিবর্তিত হয়।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি গাড়ির গতি দ্বিগুণ হলে ব্রেক চেপে থামানোর দূরত্ব কতগুণ হতে হবে? ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, v_0 বেগে গতিশীল একটি গাড়িতে ব্রেক চেপে a মন্দন সৃষ্টি করা হলো, ফলে s দূরত্বে গিয়ে গাড়িটি থামল। এখানে চূড়ান্ত বেগ $v = 0$

আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

বা, $s = \frac{v_0^2}{2a}$

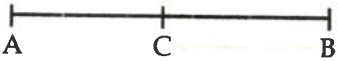
বা, $s \propto v_0^2$ (ব্রেকের জন্য মন্দন, a = ধ্রুবক)

সুতরাং, গাড়ির প্রাথমিক বেগ দ্বিগুণ হলে, গাড়িটি থামানোর দূরত্ব, $s = (2)^2 = 4$ গুণ হতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৩

১। একটি ট্রেন A স্টেশন থেকে যাত্রা শুরু করে 40 min-এ B স্টেশনে গিয়ে থামে। A ও B-এর মধ্যবর্তী কোনো অবস্থান C-তে ট্রেনটি সর্বোচ্চ গতিবেগ ঘণ্টায় 60 km প্রাপ্ত হয়। যদি ট্রেনটি A থেকে C-তে সমত্বরণে এবং C হতে B-তে সমমন্দনে আসে, তবে A থেকে B-এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধরা যাক, ট্রেনটি A স্টেশন থেকে a_1 সমত্বরণে যাত্রা শুরু করে t_1 সময়ে C অবস্থানে যায় এবং C অবস্থানে ট্রেনটি সর্বোচ্চ বেগ 'v' প্রাপ্ত হয়। অতঃপর C অবস্থান হতে সমমন্দন a_2-তে চলে এবং t_2 সময়ে B স্টেশনে গিয়ে থামে।



$\therefore$ A হতে C পর্যন্ত ট্রেনটির গতির ক্ষেত্রে লেখা যায়,

$v = u + a_1t_1 = 0 + a_1t_1 = a_1t_1$ এবং $AC = ut + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}vt_1$

আবার C থেকে B পর্যন্ত ট্রেনটির গতির ক্ষেত্রে লেখা যায়,

$0 = v - a_2t_2 \quad \therefore \quad v = a_2t_2$

$\therefore \quad CB = vt_2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2 = a_2t_2^2 - \frac{1}{2}a_2t_2^2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2 = \frac{1}{2}vt_2$

অতএব,

$$AB = AC + CB = \frac{1}{2}vt_1 + \frac{1}{2}vt_2 = \frac{1}{2}v(t_1 + t_2)$$
$$= \frac{1}{2} \times 60 \times \frac{40}{60}\,\text{km} = 20\,\text{km}$$

২। একটি লিফট 'a' সমত্বরণে ওপরে উঠছে। লিফটে দাঁড়ানো এক ব্যক্তি একটি বলকে v বেগে খাড়া ওপরে ছুড়লো। t সময় পরে বলটি পুনরায় ওই ব্যক্তির হাতে ফিরে এল। দেখাও যে $v = \frac{t}{2}(g + a)$; এখানে g = অভিকর্ষজ ত্বরণ।

ধরা যাক, ওই ব্যক্তি যখন বলটিকে ওপরের দিকে ছুড়ে তখন ওপরের দিকে লিফটির বেগ ছিল v।

$\therefore$ বলটির কার্যকর প্রাথমিক উল্লম্ব বেগ $= u + v$

t সময়ে লিফটের অতিক্রান্ত উচ্চতা, $h = ut + \frac{1}{2}at^2$

ওই t সময়ে বলটি যে উচ্চতা আরোহণ করে তা হলো,

$$h' = (h + v)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

এখন প্রশ্নানুসারে, $h = h'$

$\therefore \quad ut + \frac{1}{2}at^2 = (u + v)\,t - \frac{1}{2}gt^2 = ut + vt - \frac{1}{2}gt^2$

বা, $\frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}gt^2$ বা, $vt = \frac{1}{2}(a + g)t^2$

$\therefore \quad v = \frac{t}{2}(g + a)$ (প্রমাণিত)।

৩। স্থির মানের বলের ক্রিয়ায় একমাত্রিক স্থানে গতিশীল একটি বস্তুকণার সরণ (x) সময়ের সাথে $t = \sqrt{x} + 5$ সমীকরণ দ্বারা সম্পর্কিত। দেখাও যে বস্তুকণার বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণও শূন্য (x মিটারে এবং t সেকেন্ডে প্রকাশিত)।

[CKKUET Admission Test : 2021-22]

এখানে,

$t = \sqrt{x} + 5$

বা, $\sqrt{x} = t - 5$

বা, $x = (t - 5)^2 = t^2 - 10t + 25$

$\therefore$ কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ,

$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 10$

এখন কণাটির বেগ শূন্য হলে আমরা পাই,

$0 = 2t - 10$

বা, $t = \frac{10}{2} = 5$ সেকেন্ড

$\therefore$ $t = 5$ সেকেন্ড সময়ে কণাটির সরণ, $x = t^2 - 10t + 25$

$= (5)^2 - 10 \times 5 + 25 = 0$

সুতরাং, কণাটির বেগ যখন শূন্য তখন কণাটির সরণও শূন্য। (প্রমাণিত)

৪। একটি কণা (1, 2) বিন্দু থেকে গতি শুরু করে xy তলে $(2\hat{i} + 3\hat{j})$ ms^{-1} বেগে গতিশীল হলে 10 সেকেন্ড পরে কণাটির অবস্থানের x ও y স্থানাঙ্কগুলো কী হবে?

t সময় পরে অবস্থান ভেক্টর,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}.t$$

এখানে, $\vec{r}(0) = (\hat{i} + 2\hat{j})$ m এবং $\vec{v} = (2\hat{i} + 3\hat{j})$ ms^{-1} এবং $t = 10$ s

$\therefore$ $\vec{r}(t) = (\hat{i} + 2\hat{j}) + 10(2\hat{i} + 3\hat{j}) = 21\hat{i} + 32\hat{j}$

সুতরাং, 10 সেকেন্ড পরে কণাটির অবস্থানের x ও y স্থানাঙ্ক হবে (21 m, 32 m)।

৫। একটি বস্তুকণা X-অক্ষ বরাবর গতিশীল। মূলবিন্দু থেকে কণাটির সরণ $x = 24t - 4t^2$ সমীকরণ মেনে চলে, x এবং t যথাক্রমে মিটার ও সেকেন্ড এককে প্রকাশিত। (i) $t = 1$ সেকেন্ড থেকে $t = 2$ সেকেন্ডের মধ্যে কণাটির গড় গতিবেগ নির্ণয় কর। (ii) $t = 2$ সেকেন্ডের মুহূর্তে কণাটির তাৎক্ষণিক গতিবেগ নির্ণয় কর।

এখানে, $x = 24t - 4t^2$, যখন $t = 1$s, ধরি $x = x_1$

$\therefore$ $x_1 = 24 \times 1 - 4 \times (1)^2 = 24 - 4 = 20$ m

আবার যখন, $t = 2$, ধরি $x = x_2$, $\therefore$ $x_2 = 24 \times 2 - 4 \times (2)^2 = 48 - 16 = 32$ m

$\therefore$ $t = 1$s থেকে $t = 2$s-এর মধ্যে কণাটির সরণ $= x_2 - x_1 = 32 - 20 = 12$ m

$\therefore$ ওই অবকাশে কণাটির গড় গতিবেগ, $\vec{v} = \dfrac{\text{মোট সরণ}}{\text{মোট সময়}} = \dfrac{12\text{ m}}{1\text{s}} = 12\ ms^{-1}$

(ii) t সময়ের মুহূর্তে কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ, $v = \dfrac{dx}{dt} = 24 - 8t$

$\therefore$ $v = 24 - 8t$

$\therefore$ $t = 2$s, সময়ের মুহূর্তে কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ $= 24 - 8 \times 2 = 24 - 16 = 8\ ms^{-1}$

৬। একটি গতিশীল বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব S এবং সময় t এর মধ্যে সম্পর্ক হলো $S = 3t - 4t^2 + 6t^3$। যাত্রা শুরুর 3s পরে বস্তুর দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব, বেগ ও ত্বরণের মান নির্ণয় কর। (এখানে s এককে এবং t সেকেন্ড এককে প্রকাশিত)

এখানে, $S = 3t - 4t^2 + 6t^3$ ... ... (i)

3s অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$S = 3 \times 3 - 4 \times (6)^2 + 6 \times (3)^3 = 9 - 36 + 162 = 135$ m

সমীকরণ (i) কে t এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$\dfrac{ds}{dt} = v = 3 - 4 \times 2t + 6 \times 3t^2$

$= 3 - 8t + 18t$ ... ... (ii)

3s পরে বেগ,

$v = 3 - 8 \times 3 + 18 \times (3)^2 = 3 - 24 + 162 = 141\ ms^{-1}$

সমীকরণ (ii) কে t এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$\dfrac{dv}{dt} = a = -8 + 18 \times 2t = -8 + 36t$, 3$s$ পরে ত্বরণ

$a = -8 + 36 \times 3 = -8 + 108 = 100\ ms^{-2}$

৭। এক ব্যক্তি যখন বাসের দরজা থেকে 8m দূরে তখন বাসটি 2 ms^{-2} ত্বরণ নিয়ে চলতে শুরু করল। ওই ব্যক্তি যদি দৌড়ে 4 সেকেন্ড পর বাসটি ধরতে সমর্থ হয়, তবে ওই ব্যক্তির দৌড়ের ত্বরণ কত?

এখানে,

বাসের ত্বরণ, $a = 2\ ms^{-2}$

বাসের দূরত্ব, $s = 8$ m

ব্যক্তির প্রাথমিক বেগ, $u = 0$

ধরা যাক, ওই ব্যক্তির ত্বরণ $= a'ms^{-2}$

4 সেকেন্ডে ব্যক্তি কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s = ut + \dfrac{1}{2}a't^2 = 0 + \dfrac{1}{2}a'(4)^2 = 8a'$ m

বাসটি ওই 4 সেকেন্ডে দূরত্ব অতিক্রম করে,

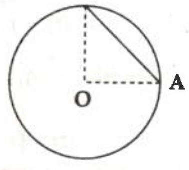
$s = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 16 = 16$ m

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে,

$8a' = 8 + 16 = 24$

$\therefore \quad a' = \frac{24}{8} = 3\ ms^{-2}$

৮। একটি কণা 28 cm ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে গতিশীল। কণাটি (i) বৃত্তপথের এক চতুর্থাংশ অতিক্রম করতে 4 সেকেন্ড সময় নেয় এবং (ii) সমগ্র বৃত্তাকার পথটি অতিক্রম করতে 16 সেকেন্ড সময় নেয়। প্রতি ক্ষেত্রে কণাটির গড় দ্রুতি ও গড়বেগ নির্ণয় কর।



(i) বক্র পথের পরিধি $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 28 = 176\ cm$

প্রথম ক্ষেত্রে, কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{2\pi r}{4} = \frac{176}{4} = 44\ cm$

$\therefore$ কণাটির গড় দ্রুতি $= \frac{44}{4} = 11\ cms^{-1}$

প্রথম ক্ষেত্রে কণাটির সরণ $= \sqrt{(28)^2 + (28)^2} = 28\sqrt{2}\ cm$

$\therefore$ ওই পথে কণাটির গড় গতিবেগ $= \frac{28\sqrt{2}}{4} = 9{\cdot}9\ cms^{-1}$। যার অভিমুখ AB বরাবর [চিত্র ১]

(ii) কণাটির সম্পূর্ণ বৃত্তাকার পথ অতিক্রম করলে মোট দূরত্ব $= 176\ cm$

$\therefore$ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে গড় দ্রুতি $= \frac{176}{16} = 11\ cms^{-1}$

এক্ষেত্রে কণাটির সরণ $= 0$; সুতরাং, কণাটির গড় গতিবেগ $= 0$

৯। কোনো গতিশীল বস্তু কণার মুহূর্তের অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t$ হলে কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ কত? এবং ত্বরণ কত? [ঢা. বো. ২০১৫]

এখানে,

অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = \hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t$

বেগ, $\vec{v} = ?$

ত্বরণ, $a = ?$

তাৎক্ষণিক বেগ, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

বা, $\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t\right)$

$= -5\hat{i}\sin 5t + 5\hat{j}\cos 5t$

$= -5(\hat{i}\sin 5t - \hat{j}\cos 5t)$

আবার ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-5(\hat{j}\cos 5t - \hat{i}\sin 5t)\right]$

$= -25\hat{j}\sin 5t - 25\hat{i}\cos 5t$

$= -25(\hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t)$

$\therefore$ বেগ, $\vec{v} = -5(\hat{i}\sin 5t - \hat{j}\cos 5t)$ এবং ত্বরণ $\vec{a} = -25(\hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t)$

১০। একটি গতিশীল বস্তুর সরণের সমীকরণ $x = (4t^2 + 3t)$ m। 2 sec পর বস্তুটির বেগ কত? [রা. বো. ২০১৫]

আমরা জানি,

বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(4t^2 + 3t) = 8t + 3$

$\therefore$ 2 sec পর বেগ অর্থাৎ, $t = 2$ sec বসিয়ে পাই,

$v = 8 \times (2) + 3 = 16 + 3 = 19\ ms^{-1}$

$\therefore \quad v = 19\ ms^{-1}$

কাজ : সমদ্রুতিসম্পন্ন কোনো কণার বেগ কী অসম হতে পারে ?

সমদ্রুতিসম্পন্ন একটি কণার বেগ অসম হতে পারে। সমদ্রুতিতে গতিশীল কোনো কণার অভিমুখ যখন পরিবর্তিত হয় তখন কণার গতিবেগের পরিবর্তন হয়। অর্থাৎ কণার বেগ অসম হয়; কিন্তু দ্রুতির কোনো পরিবর্তন হয় না। যখন একটি কণা সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে আবর্তন করে তখন বৃত্তাকার পথের প্রতিটি বিন্দুতে বস্তুকণার বেগের অভিমুখ ওই বিন্দুতে বৃত্তাকার পথের স্পর্শক বরাবর হয়। তখন যেহেতু প্রতিটি বিন্দুতে বেগের অভিমুখ বিভিন্ন হয় ফলে বস্তুর বেগ অসমবেগ হয়, যদিও কণাটি সমদ্রুতিতে ঘুরছে।

কাজ : বলবিদ্যায় গড় বেগের চেয়ে তাৎক্ষণিক বেগ অধিক তাৎপর্যপূর্ণ কেন, ব্যাখ্যা কর।

কোনো বস্তুর গতি সম্বন্ধীয় পর্যালোচনায় বেগের সুষমতা, বেগের পরিবর্তন ইত্যাদি সম্বন্ধে ধারণা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এই ধারণাগুলি গড় বেগ থেকে পাওয়া যায় না। সেই কারণে গড় বেগের তুলনায় তাৎক্ষণিক বেগ অধিক তাৎপর্যপূর্ণ।

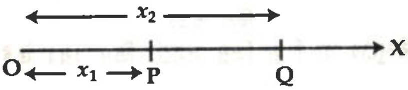
৩·৭ অবস্থান-সময়, দূরত্ব-সময় ও বেগ-সময় লেখচিত্র
Position-time, distance-time and velocity-time graphs

বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন অবস্থান-সময়, দূরত্বের পরিবর্তন দূরত্ব-সময় এবং বেগের পরিবর্তন বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

৩·৭·১ অবস্থান-সময় লেখচিত্র
Position-time graphs

সময় অতিবাহিত হওয়ার সাথে সাথে একটি গতিশীল বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে। এই সম্পর্ক লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। এক্ষেত্রে গ্রাফ কাগজে X-অক্ষ বরাবর সময় (t) Y-অক্ষ বরাবর অবস্থানের পরিবর্তন (Δx) স্থাপন করা হয়। এই লেখচিত্রকে অবস্থান-সময় লেখচিত্র বলে। এই লেখচিত্র থেকে বস্তুর বেগ নির্ণয় করা হয়। নিম্নে সুষম ও অসম বস্তুর গতি বুঝানো হয়েছে এবং সরলরেখা বরাবর গতি বিবেচনা করা হয়েছে।

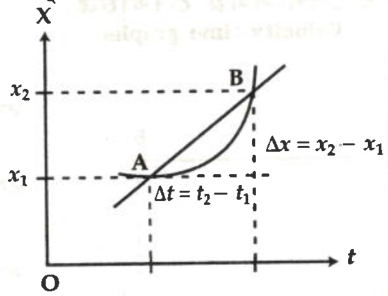
১. কোনো বস্তু একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত হলে সেই বিন্দু থেকে বস্তুর দূরত্বকে অবস্থান (position) বলে।



চিত্র ৩·২৮

মনে কর একটি বস্তু X-অক্ষ বরাবর গতিশীল। বস্তুটি যখন P বিন্দুতে তখন মূলবিন্দু O থেকে বস্তুটির দূরত্ব x_1 এবং যখন Q বিন্দুতে অবস্থান করে তখন দূরত্ব x_2। X-অক্ষ বরাবর বস্তুর এরূপ গতি চিত্র ৩·২৮ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

আবার মনে করি কোনো একটি বস্তু t_1 সময়ে A বিন্দুতে এবং t_2 সময়ে B বিন্দুতে অবস্থান করে। X-অক্ষ বরাবর A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে x_1 এবং x_2। এক্ষেত্রে t_2 এবং t_1 সময়ের মধ্যকার ব্যবধান $\Delta t = t_2 - t_1$ চিত্র ৩·২৯ এ দেখানো হলো।



চিত্র ৩·২৯

২. লেখচিত্রের সাহায্যেও কোনো বস্তুর গতির বিষয়ে আলোচনা করা যায়। এই পদ্ধতিতে Y-অক্ষ বরাবর সরণ, বেগ বা ত্বরণের মানকে এবং x-অক্ষ বরাবর সময় সূচিত করে লেখচিত্র আঁকা যায়।

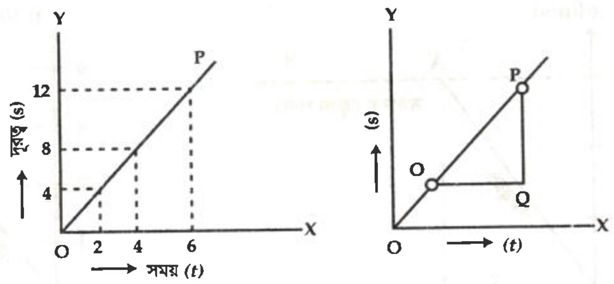
৩·৭·২ দূরত্ব-সময় লেখচিত্র
Distance-time graphs

(i) দূরত্ব-সময় লেখচিত্র (সমবেগের ক্ষেত্রে) :

একটি মোটর সাইকেলের গতি সমতল রাস্তায় 2 মিনিট পরপর নিচের সারণিতে দেখানো হলো [সারণি ৩·১]।

সারণি ৩·১ : দূরত্ব–সময়

সময় t (min)	দূরত্ব s (km)
0	0
2	4
4	8
6	12



চিত্র ৩·৩০

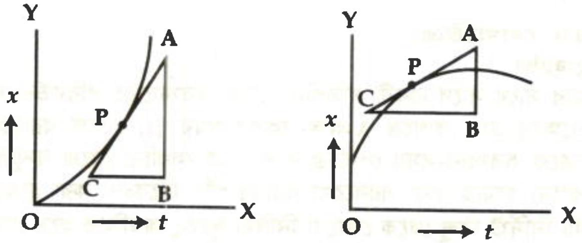
সমবেগে গতিশীল বস্তু একই সময়ে একই দূরত্ব অতিক্রম করবে। সুতরাং সময় সাপেক্ষে দূরত্বের লেখচিত্র মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা OP হয় [চিত্র ৩·৩০]।

OP রেখার ঢাল $= \frac{PQ}{OQ} = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} =$ বেগ

অতএব বস্তুর সমবেগ দূরত্ব-সময় লেখচিত্রের নতির সমান হয়। অর্থাৎ যেকোনো সময়ে বেগের মান হবে ওই বিন্দুতে অঙ্কিত ঢালের মান।

(ii) দূরত্ব-সময় লেখচিত্র (অসম বেগের ক্ষেত্রে) :

অসম বেগে গতিশীল বস্তু একই সময়ে একই দূরত্ব অতিক্রম করে না। অবস্থান (x) ও সময় (t)-এর লেখচিত্র বক্ররেখা হয়। যেকোনো সময়ের বেগ নির্ণয়ে ওই বিন্দু হতে স্পর্শক টেনে ঢাল নিলে বেগ পাওয়া যায়। ৩.৩১ চিত্রে P বিন্দুতে বেগ নির্ণয় করা হয়েছে।



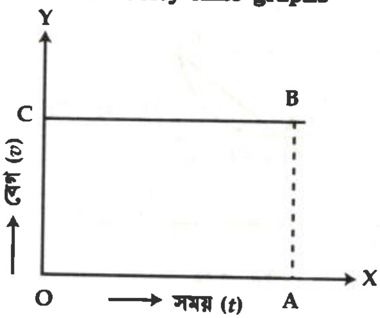
(ক) (খ)

চিত্র ৩.৩১

এরূপ বক্ররেখার ঢাল বিভিন্ন বিন্দুতে বা ভিন্ন ভিন্ন সময়ে ভিন্ন হয়। এই ঢালের মান ওই সময়ে অসম বেগের মান নির্দেশ করে।

চিত্র অনুযায়ী, P বিন্দুতে বেগ, $v = \frac{AB}{CB} = \frac{x}{t}$

৩.৭.৩ বেগ-সময় লেখচিত্র
Velocity-time graphs



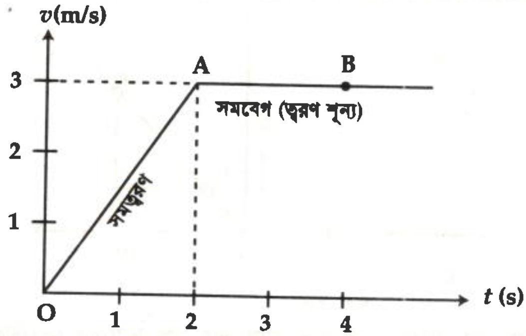
চিত্র ৩.৩২

(i) বেগ-সময় লেখচিত্র (সমবেগের ক্ষেত্রে) : সমবেগে চলমান বস্তুর সময় সাপেক্ষে বেগের লেখচিত্র সময় অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা CB হয় [চিত্র ৩.৩২]। সময়ের সাথে বেগের কোনো পরিবর্তন হয় না বলেই এরকম হয়।

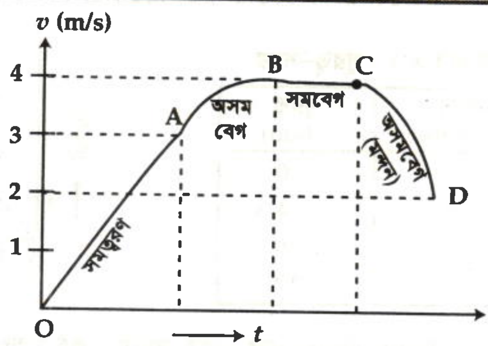
বেগ-সময় লেখচিত্রে বেগ ও সময় অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ OABC আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= OC \times OA = vt = s$

অর্থাৎ বস্তু দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব বেগ-সময় লেখচিত্রের বেগ ও সময় অক্ষের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

কর্ম অনুশীলন I. একটি গ্রাফ কাগজে নিচের লেখচিত্র ৩.৩৩(ক) অঙ্কন কর এবং A এবং B বিন্দুতে বেগ ব্যাখ্যা কর।



চিত্র ৩.৩৩(ক)



চিত্র ৩.৩৩খ)

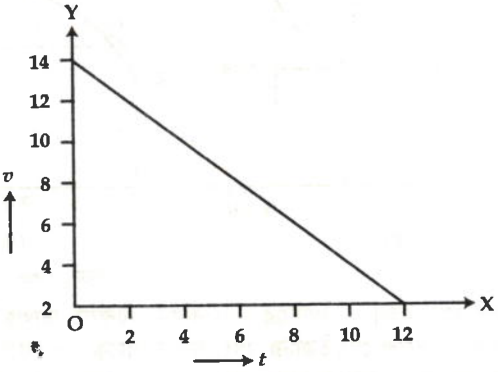
কর্ম অনুশীলন II. একটি গ্রাফ কাগজে লেখচিত্র ৩.৩৩(খ) অঙ্কন কর এবং A, B, C, D বিন্দুতে বেগ ব্যাখ্যা কর।

(ii) বেগ-সময় লেখচিত্র (অসমবেগের ক্ষেত্রে) : $t = 0$ sec থেকে 2 sec পরপর বেগ হ্রাসের মান সারণি ৩.২ দেওয়া হলো। প্রাপ্ত মান থেকে $v — t$ লেখচিত্র অঙ্কন করলে লেখচিত্রটি নিম্নরূপ হয় [চিত্র ৩.৩৪]।

এই লেখচিত্রে যেকোনো সময় t-তে বস্তুর বেগ v নির্ণয় করা যায়। চিত্র থেকে দেখা যায় সময়ের সাথে সাথে বেগ হ্রাস পায়। চিত্র থেকে আরও দেখা যায়, 0 সময়ে বস্তুর বেগ 14 ms^{-1} এবং 12 sec সময়ে বেগ শূন্য। এটি একটি অসম বেগ। এক্ষেত্রে সময়ের সাথে সাথে বেগ হ্রাস পাচ্ছে এবং প্রতিক্ষেত্রে ত্বরণ (বা মন্দন) ধ্রুব থাকে।

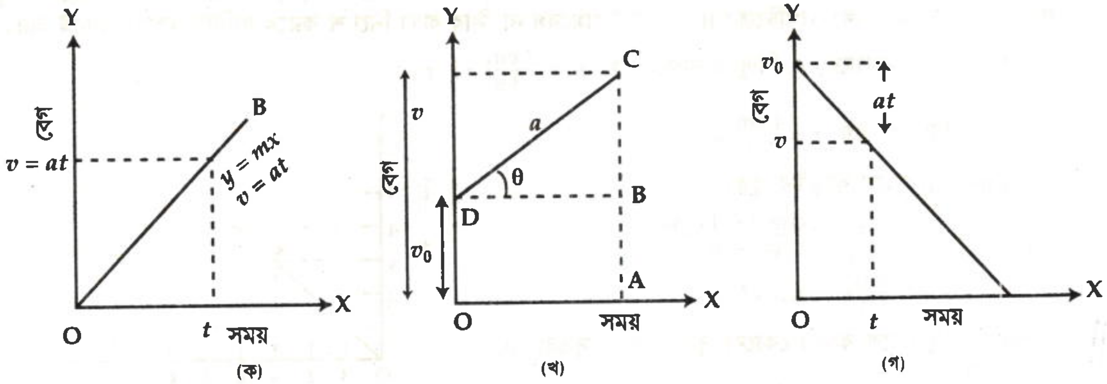
সারণি : ৩.২

সময় t sec	বেগ v ms^{-1}
0	14
2	12
4	10
6	8
8	6
10	4
12	0



চিত্র ৩.৩৪

(iii) বেগ-সময় লেখচিত্র (সমত্বরণের ক্ষেত্রে) : সমত্বরণে সরলরেখা বরাবর সচল বস্তুর বেগ-সময় লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হয়। একই সময় অবকাশে একই পরিমাণ বেগ বৃদ্ধি হয় বলে লেখচিত্রটি এরূপ হয়। বস্তুটি স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করলে সরলরেখাটি মূল বিন্দুগামী হয়, ৩.৩৫(ক) চিত্রে OB সরলরেখা। এই সরলরেখার ঢাল থেকে ত্বরণ নির্ণয় করা যায়।



চিত্র ৩.৩৫

কিন্তু বস্তুটির যদি প্রাথমিক বেগ থাকে তবে বেগ-সময় লেখচিত্রটি DC সরলরেখা হয় [চিত্র ৩.৩৫(খ)]। এখানে OD = প্রাথমিক বেগ v_0। দুটি ক্ষেত্রেই সরলরেখাটির নতি বা ঢাল বস্তুর সমত্বরণের সমান হয়।

ত্বরণ নির্ণয় : চিত্র ৩.৩৫(খ)–এ সময় t = OA, প্রাথমিক বেগ v_0 = OD, চূড়ান্ত বেগ, v = AC

ত্বরণ, $a = \dfrac{\text{বেগ পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$

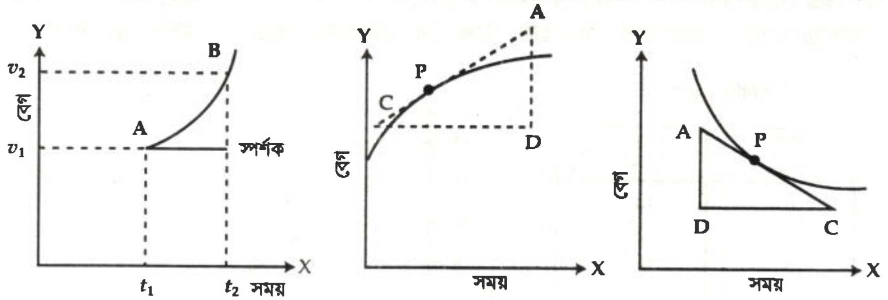
$= \dfrac{AC — OD}{OA} = \dfrac{AC — AB}{BD}$

$= \dfrac{BC}{DB}$ = DC সরলরেখার ঢাল বা নতি

$= \tan\theta$ (ধ্রুবক)

(iv) বেগ-সময় লেখচিত্র (সম-মন্দনের ক্ষেত্রে) : সম মন্দনে চলমান বস্তুর প্রাথমিক বেগ থাকবেই। এক্ষেত্রেও বেগ-সময় লেখচিত্রটি সরলরেখা হবে। কিন্তু এর ঢাল ঋণাত্মক হবে [চিত্র ৩.৩৫(গ)]। ঋণাত্মক ঢাল মন্দন বুঝায়। সরলরেখাটির ঢাল বস্তুর সম মন্দনের সমান হয়। শেষ পর্যন্ত বস্তুটি স্থির অবস্থায় আসে অর্থাৎ এর বেগ শূন্য হয়।

(v) বেগ-সময় লেখচিত্র (অসম ত্বরণের ক্ষেত্রে) : অসম ত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে বেগ-সময় লেখচিত্রটি বক্ররেখা হয় [চিত্র ৩.৩৬(ক) ও ৩.৩৬(খ)]। সময়ের সঙ্গে বেগ বাড়লে ত্বরণও বাড়ে এবং লেখচিত্র ৩.৩৬(ক) ও ৩.৩৬(খ)-এর অনুরূপ হয়। পূর্বের মতো আমরা প্রমাণ করতে পারি যে, $(t_2 - t_1)$ সময় অবকাশে গড় ত্বরণের মান AB



(ক) (খ) (গ)

চিত্র ৩.৩৬

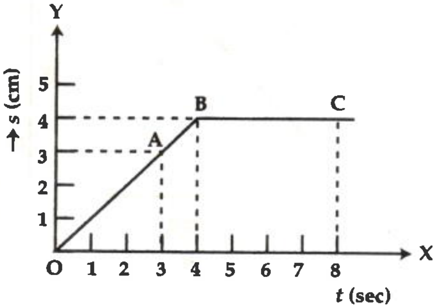
জ্যা-এর ঢালের সমান হয়। লেখচিত্রের যেকোনো বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ ওই বিন্দুতে লেখচিত্রের স্পর্শকের ঢালের সমান হয়। সময়ের সঙ্গে লেখচিত্রটির ঢাল বাড়তে থাকে। এ থেকে বোঝা যায় যে, ত্বরণ স্থির নয় [চিত্র ৩.৩৬(খ)] বরং সময়ের সঙ্গে বাড়ছে। বস্তুর বেগ সময়ের সাথে কমলে বা মন্দন হলে লেখচিত্রটি ৩.৩৬(গ) চিত্রের অনুরূপ হয়। P বিন্দুর ত্বরণ ΔADC এর ঢাল থেকে পাওয়া যায়।

$\therefore$ ত্বরণ = ঢাল $= \dfrac{AD}{DC}$

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৪

১। একটি বস্তুর সরণ (s) বনাম সময় (t)-এর লেখচিত্র দেখানো হলো। (ক) লেখচিত্রের AB অংশে বস্তুর ত্বরণের মান নির্ণয় কর। (খ) লেখচিত্রের BC রেখাটি সমবেগ না স্থিরাবস্থা নির্দেশ করবে গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

(ক) লেখচিত্র অনুসারে, A বিন্দুতে বস্তুর বেগ, $u = \dfrac{3\text{ cm}}{3\text{ s}} = 1\text{ cms}^{-1}$



এবং B বিন্দুতে বেগ, $v = \dfrac{4\text{ cm}}{4\text{ s}} = 1\text{ cms}^{-1}$

সুতরাং AB অংশে বস্তুটির ত্বরণ,

$$a = \frac{v-u}{t_2-t_1} = \frac{1\text{ cms}^{-1} - 1\text{ cms}^{-1}}{(4-3)\text{ s}}$$

$$= \frac{0\text{ cms}^{-1}}{1\text{ s}} = 0\text{ cms}^{-2}$$

অর্থাৎ AB অংশে বস্তুর কোনো ত্বরণ নেই। সুতরাং AB অংশে বস্তুটির ত্বরণ শূন্য।

(খ) লেখচিত্রের BC অংশে সময় পরিবর্তনের সাথে দূরত্ব একই থাকে। অর্থাৎ BC রেখাটি বস্তুটির স্থিরাবস্থা নির্দেশ করে। এর গাণিতিক বিশ্লেষণ নিম্নরূপ :

B বিন্দুতে বস্তুটির অবস্থান, $s_1 = 4$ cm এবং C বিন্দুতে বস্তুটির অবস্থান, $s_2 = 4$ cm

অতএব, BC অংশে বস্তুটির সরণ,

$$x = x_2 - x_1 = 4 - 4 = 0\text{ cm}$$

এবং BC অংশে অতিক্রান্ত সময়,

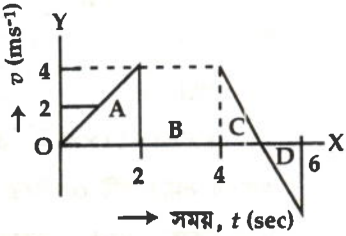
$$t = (8-4)\text{ s} = 4\text{ s}$$

এখন, BC অংশে বস্তুটির বেগ,

$$v = \frac{x}{t} = \frac{0\text{ cm}}{4\text{ s}} = 0\text{ cms}^{-1}$$

অর্থাৎ BC অংশে বস্তুটির কোনো বেগ নেই। এটি স্থির থাকে।

২। চিত্রে সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি কণার বেগ-সময় লেখচিত্রে দেখানো হয়েছে।



(i) 6 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং

(ii) 6 sec-এ কণার সরণ নির্ণয় কর।

(i) কণা কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, বেগ-সময় লেখচিত্র এবং সময় অক্ষের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফলের সমান।

সুতরাং 6 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

x = ক্ষেত্রফল A + ক্ষেত্রফল B + ক্ষেত্রফল C + ক্ষেত্রফল D

$$= \frac{1}{2}\times 4\times 2 + 4\times 2 + \frac{1}{2}\times 4\times 1 + \frac{1}{2}\times 1\times 4$$
$$= 4 + 8 + 2 + 2 = 16\text{ m}$$

(ii) 6 sec-এ কণার সরণ,

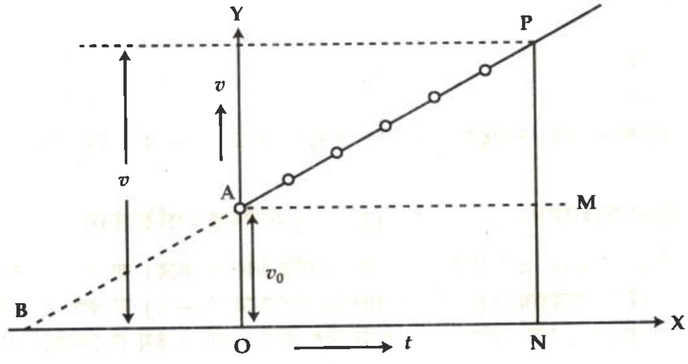
s = ক্ষেত্রফল A + ক্ষেত্রফল B + ক্ষেত্রফল C − ক্ষেত্রফল D

$$= 4 + 8 + 2 - 2 = 12\text{ m}$$

৩.৭.৪ বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে গতির সমীকরণ প্রতিপাদন

(ক) $v = v_0 + at$ সমীকরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র

এই সমীকরণে দুটি চলরাশি আছে, একটি হলো সময় t অপরটি হলো বেগ v। t কে X-অক্ষে এবং v কে Y অক্ষে স্থাপন করে একটি বস্তুকণার বেগ-সময় লেখচিত্র আঁকা হলো [চিত্র ৩.৩৭]। চিত্রে P বিন্দু হতে Y-অক্ষের ওপর PY লম্ব টানি। মনে করি t সময়ে বস্তুর চূড়ান্ত বেগ $= v =$ OY; এখন OY = OA + AY অর্থাৎ $v = v_0 + at$।



চিত্র ৩.৩৭

এখানে ঢাল, $a = \frac{PM}{AM} = \frac{AY}{AM} = \frac{AY}{t}$

$\therefore \quad v = v_0 + at$ সমীকরণটি লেখচিত্রে উপস্থাপন করা যায়।

স্থির অবস্থান থেকে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v_0 = 0, a =$ ধ্রুবক হয় $\therefore \; v = 0 +$ ধ্রুবক $\times t \quad \therefore \; v \propto t$ অর্থাৎ বেগ সময়ের সমানুপাতিক।

(খ) $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র

চিত্র ৩.৩৭-এ v বনাম t লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা। চিত্রে $PN \perp OX$; $AM \perp PN$

ধরি আদি বেগ $= v_0$, সমত্বরণ $= a$, ON $= t$ এবং t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$

এখন s = OAPN ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= OAMN আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AMP ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= OA \times ON + \frac{1}{2}\times AM \times PM = v_0 t + \frac{1}{2}\times AM \times PM$$

আবার ঢাল, $a = \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{t}$

বা, $a = \frac{PM}{t}$

$\therefore \quad PM = at$

$\therefore \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} t \times at = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

অতএব সমীকরণটি লেখচিত্রে উপস্থাপন করা যায়।

স্থির অবস্থান থেকে সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $s = 0 \times t + \frac{1}{2} \times$ ধ্রুবক $\times t^2$

বা, $s =$ ধ্রুবক $\times t^2$ বা, $s \propto t^2$

অর্থাৎ সরণ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

(গ) বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে $v^2 = v_0^2 + 2as$ সমীকরণ প্রতিপাদন

চিত্র ৩.৩৭-এ AP সরলরেখার ঢাল বা নতি

$$a = \frac{PM}{AM} = \frac{PM}{ON}$$

সুতরাং, $as = \frac{PM}{ON} \times$ OAPN ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{PM}{ON} \times \frac{1}{2} (OA + PN) \times ON = \frac{1}{2} \times PM \times (OA + PN)$$

$$= \frac{1}{2} \times (PN - MN) \times (OA + PN) = \frac{1}{2} \times (v - v_0) \times (v_0 + v)$$

$$= \frac{1}{2} (v^2 - u^2)$$

বা, $2as = v^2 - v_0^2$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2as$

এক্ষেত্রে স্থির অবস্থান এবং সমত্বরণে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে $v \propto \sqrt{s}$ হয়। অর্থাৎ বেগ দূরত্বের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

(ঘ) বেগ-সময় লেখচিত্রের সাহায্যে $s_t = v_0 + \frac{1}{2} a (2t - 1)$ সমীকরণ প্রতিপাদন

বেগ–সময় লেখচিত্র ৩.৩৮-এ AP সরলরেখাটি কণার গতি নির্দেশ করে। অর্থাৎ AP সরলরেখার সমীকরণ হলো $v = v_0 + at$। মনে করি ওই সরলরেখায় AB ও AP অংশদ্বয় যথাক্রমে $(t - 1)$ সেকেন্ড ও t সেকেন্ড সময় পর্যন্ত গতি নির্দেশ করে। সুতরাং BP রেখাংশ t-তম সেকেন্ডের গতি নির্দেশ করে। তাই t-তম সেকেন্ডের সরণ

$s_t =$ BP রেখাংশ ও সময় অক্ষের মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফল

$=$ CBPD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} (CB + DP) \times CD$$

চিত্র ৩.৩৮-এ $CD = OD - OC = - (t - 1) = 1\ s$

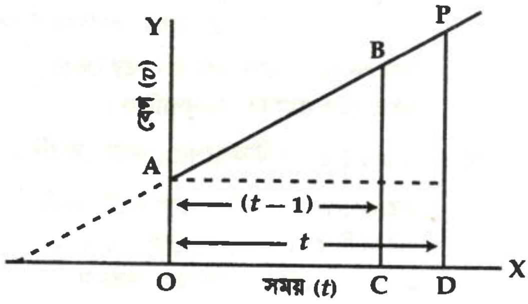
$CB = (t - 1)$ সময়ে বেগ $= v_0 + a (t - 1)$

$DP = t$ সময়ে বেগ $= v_0 + at$

$$\therefore \quad s_t = \frac{1}{2} [v_0 + a(t - 1) + v_0 + at] \times 1$$

$$= \frac{1}{2} [2v_0 + a (2t - 1)]$$

$$= v_0 + \frac{1}{2} a (2t - 1)$$



চিত্র ৩.৩৮

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৫

১। একটি বস্তুর বেগ 8s-এ $(4\hat{i}+2\hat{j})\ ms^{-1}$ হতে বৃদ্ধি পেয়ে $(12\hat{i}-4\hat{j})\ ms^{-1}$ হলো। গড় ত্বরণ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী, $\Delta\vec{v} = \{(12\hat{i}-4\hat{j})-(4\hat{i}+2\hat{j})\}\ ms^{-1} = (8\hat{i}-6\hat{j})\ ms^{-1}$ এবং

$\Delta t = 8\ s$

$\therefore$ গড় ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(8\hat{i}-6\hat{j})\,ms^{-1}}{8s} = (\hat{i}-\frac{3}{4}\hat{j})\,ms^{-2}$

এবং গড় ত্বরণের মান, $|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}\ ms^{-2} = 1{\cdot}25\ ms^{-2}$

২। দুটি ইঞ্জিনচালিত নৌকা $10\ ms^{-1}$ এবং $5\ ms^{-1}$ বেগ নিয়ে একটি প্রতিযোগিতা শুরু করে। তাদের ত্বরণ যথাক্রমে $2\ ms^{-2}$ এবং $3\ ms^{-2}$। যদি নৌকা দুটি একই সময়ে শেষ প্রান্তে পৌছায় তবে তারা কত সময় প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করেছিল ?

এখানে,
প্রথম নৌকার আদিবেগ, $v_{01} = 10\ ms^{-1}$
প্রথম নৌকার ত্বরণ, $a_1 = 2\ ms^{-2}$
দ্বিতীয় নৌকার আদিবেগ, $= v_{02} = 5\ ms^{-1}$
দ্বিতীয় নৌকার ত্বরণ, $a_2 = 3\ ms^{-2}$

প্রথম নৌকার ক্ষেত্রে

$$s = v_{01}t+\frac{1}{2}a_1t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

দ্বিতীয় নৌকার ক্ষেত্রে

$$s = v_{02}t+\frac{1}{2}a_2t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই

$$v_{01}t+\frac{1}{2}a_1t^2 = v_{02}t+\frac{1}{2}a_2t^2$$

বা, $(v_{01}-v_{02})t = \frac{1}{2}(a_2-a_1)t^2$

বা, $(10-5)t = \frac{1}{2}(3-2)t^2$ বা, $5t = \frac{1}{2}\times t^2$

বা, $5 = \frac{1}{2}t$

$\therefore\ t = 10\ sec$

৩। একটি ট্রেন স্থির অবস্থান হতে $10\ ms^{-2}$ ত্বরণে চলতে আরম্ভ করল। একই সময়ে একটি গাড়ি $100\ ms^{-1}$ সমবেগে ট্রেনের সমান্তরালে চলা শুরু করল। ট্রেন গাড়িটিকে কখন পিছনে ফেলে যাবে ?

[KUET Admisstion Test : 2011-12]

মনে করি, ট্রেনটি t সময় পরে s দূরত্ব অতিক্রম করে গাড়িটিকে পিছনে ফেলবে।

এখানে,
ট্রেনের আদিবেগ, $v_{01} = 0$
ত্বরণ, $a_1 = 10\ ms^{-2}$
গাড়ির আদিবেগ, $v_{02} = 100\ ms^{-1}$
গাড়ির ত্বরণ, $a_2 = 0$

ট্রেনের ক্ষেত্রে,

$s = v_{01}t+\frac{1}{2}a_1t^2$

বা, $s = 0+\frac{1}{2}\times10\times t^2$

বা, $s = 5t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$

গাড়ির ক্ষেত্রে,

$s = v_{02}t+\frac{1}{2}a_2t^2$

বা, $s = 100t+\frac{1}{2}\times 0$

বা, $s = 100t \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$5t^2 = 100t$

$\therefore\ t = \frac{100}{5} = 20\ s$

বিকল্প : সমবেগের ক্ষেত্রে, $s = vt = 100\,t$

$\therefore \quad t = \frac{100}{s} = \frac{100}{5} = 20\ s$

~~৪~~। একটি বুলেট কোনো দেয়ালে 0·04 m প্রবেশের পর 75% বেগ হারায়। ওই দেয়ালে বুলেটটি আর কতদূর প্রবেশ করতে পারবে ? [রা. বো. ২০১০; Admission Test : KUET 2017-18; BUET 2009-10, 2013-14 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$v_{x_1}{}^2 = v_{x0}^2 + 2a_x s_1$

বা, $a_x = \frac{v_{x_1}{}^2 - v_{x0}^2}{2s_1} = \frac{\frac{v_{x0}^2}{16} - v_{x0}^2}{2s_1}$

$= \frac{-15v_{x0}^2}{32s_1} = \frac{-15v_{x0}^2}{32 \times 0{\cdot}04} = \frac{-15v_{x0}^2}{1{\cdot}28}$

এখানে প্রথম ক্ষেত্রে,

আদিবেগ $= v_{x_0}$

দূরত্ব, $s_1 = 0{\cdot}04$ m

0·04 m যাওয়ার পরে শেষ বেগ

$v_{x_1} = \frac{v_{x_0}}{4}$

ত্বরণ, $a_x = ?$

আবার, $v_{x_2}{}^2 = v^2_{x01} + 2a_x s_2$

$0 = \frac{vx_0^2}{16} + 2 \times \left(\frac{-15v_{x0}^2}{1{\cdot}28}\right) \times s_2$

বা, $\frac{30v_{x0}^2}{1{\cdot}28} s_2 = \frac{v_{x0}^2}{16}$

$\therefore \quad s_2 = \frac{1{\cdot}28}{480} = 2{\cdot}67 \times 10^{-3}$ m

এখানে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

আদিবেগ, $v_{x01} = \frac{v_{x_0}}{4}$

ত্বরণ, $a_x = \frac{-15\,v_{x0}^2}{32 \times {\cdot}04}$

শেষ বেগ, $v_{x_2} = 0$

দূরত্ব, $s_2 = ?$

৫। 100 ms⁻¹ বেগে বন্দুকের একটি গুলি 2 m পুরু দেওয়াল ভেদ করে বেরিয়ে আসার সময় 50 ms⁻¹ বেগ প্রাপ্ত হয়। 100 ms⁻¹ বেগ সম্পন্ন গুলি সম্পূর্ণ থামাতে কত মিটার পুরু দেওয়ালের প্রয়োজন হবে? [CUET Admission Test, 2010—11]

আমরা জানি,

$v^2 = v_0{}^2 - 2\,as$

বা, $(50)^2 = (100)^2 - 2 \times a \times 2$

বা, $a = \frac{(100)^2 - (50)^2}{4} = 1875\ ms^{-2}$

এখানে,

$v_0 = 100\ ms^{-1}$

$v = 50\ ms^{-1}$

$s = 2$ m

ধরা যাক, দেয়ালের নির্ণেয় পুরুত্ব xm

সুতরাং, $v^2 = v_0{}^2 - 2\,ax$

বা, $0 = (100)^2 - 2 \times 1875 \times x$

বা, $x = \frac{(100)^2}{2 \times 1875} = 2{\cdot}667$ m

এখানে,

$v = 0$

$v_0 = 100\ ms^{-1}$

$a = 1875\ ms^{-2}$

$x = ?$

৬। একটি স্রোতস্বিনী নদীতে এমনভাবে নৌকা চালানো হলো যাতে সেটি ন্যূনতম দূরত্বে বিপরীত তীরে পৌঁছায়। এতে যা সময় লাগে স্রোতের বেগ না থাকলে তার অর্ধেক সময় লাগত। নৌকার বেগ 3 ms⁻¹ হলে স্রোতের বেগ কত?

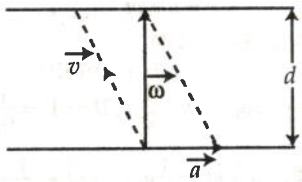
ধরা যাক, স্রোতের বেগ u ms⁻¹। ন্যূনতম দূরত্বে নদী পার হওয়ার জন্য নৌকাকে এমনভাবে চালাতে হবে যাতে নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগের লব্ধি নদীর প্রস্থ বরাবর হয়।

এক্ষেত্রে লব্ধি বেগ, $\omega^2 = v^2 - u^2$ বা, $\omega = \sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{3^2 - u^2}\ ms^{-1}$

$\therefore$ নদীর প্রস্থ d হলে, নদী পার হতে সময় লাগে, $t_1 = \frac{d}{\sqrt{3^2 - u^2}}$ s

স্রোতের বেগ না থাকলে ন্যূনতম দূরত্বে নদী পারে হতে প্রয়োজনীয় সময় লাগত, $t_2 = \frac{d}{3}$ s

প্রশ্নানুসারে,



$$t_2 = \frac{t_1}{2} \quad \therefore \quad \frac{d}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{d}{\sqrt{3^2 - u^2}}$$

বা, $\sqrt{3^2 - u^2} = \frac{3}{2}$

বা, $9 - u^2 = \frac{9}{4}$

বা, $u^2 = 9 - \frac{9}{4}$

$\therefore \quad u = \sqrt{\frac{36-9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = 2.6\ \text{ms}^{-1}$

৭। 3.0 kg ভরের একটি হাতুড়ি 6 m উঁচু থেকে একটি লৌহদণ্ডের ওপর পড়ল এবং 0.1 s সময়ে স্থির হলো। লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল নির্ণয় কর। ($g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$)

এখানে,
হাতুড়ির ভর, $m = 3.0$ kg
দূরত্ব, $s = 6$ m
সময়, $t = 0.1$ s
দণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল, F = ?
$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

হাতুড়ির উল্লম্ব গতির সময় এর প্রাথমিক বেগ, $u = 0$
হাতুড়ির ওপর পড়ার মুহূর্তে হাতুড়ির বেগ v হলে,
আমরা পাই,

$v^2 = u^2 + 2as = 0 + 2gs$

বা, $v^2 = 0 + 2 \times 9.8 \times 6 = 117.6$

$\therefore \quad v = \sqrt{117.6} = 10.84\ \text{ms}^{-1}$

অতএব হাতুড়ির গতির জন্য লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত বল,

$$F = \frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}} = \frac{m(v-u)}{t}$$

$$= \frac{3 \times (10.84 - 0)}{0.1} = 325\ \text{N}$$

$\therefore$ লৌহদণ্ডের ওপর প্রযুক্ত মোট বল = F + হাতুড়ির ওজন

$= F + mg = 325 + 3 \times 9.8 = 325 + 29.4$
$= 354.4$ N

৮। বিমানবন্দরের রানওয়ের দৈর্ঘ্য 100 m। একটি উড়োজাহাজ উড়ার পূর্ব মুহূর্তে 216 km/hr গতিসম্পন্ন হতে হয়। উড়োজাহাজটি 15 m/s² ত্বরণে ত্বরান্বিত হলে রানওয়ে থেকে উড়তে সক্ষম হবে কী ? রানওয়ের দৈর্ঘ্য সর্বনিম্ন কত হলে উড়োজাহাজটি উড়তে পারবে ? [BUET Admission Test, 2013-14]

এখানে,

$v = 216\ \text{km/h} = \frac{216 \times 1000}{60 \times 60} = 60\ \text{ms}^{-1}$

$a = 15\ \text{ms}^{-2}$
$s = 100$ m

আমরা জানি,

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{(60)^2}{2 \times 15}$$

$= 120$ m

$\therefore \quad 100\ \text{m} < 120\ \text{m}$

সুতরাং, উড়োজাহাজটি উড়তে সক্ষম হবে না। রানওয়ের দৈর্ঘ্য সর্বনিম্ন 120 m হলে উড়োজাহাজটি উড়তে পারবে।

৯। একটি কণা সমত্বরণে চলে 5th সেকেন্ডে 7 m দূরত্ব অতিক্রম করে এবং আরও কিছু দূর গিয়ে থেমে যায়। কণাটি শেষতম সেকেন্ডে মোট অতিক্রান্ত দূরত্বের $\frac{1}{64}$ অংশ অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ, ত্বরণ ও মোট সময় নির্ণয় কর। [KUET Admission Test, 2006-07]

আমরা জানি,

$$s_{th} = 7 = u + \frac{1}{2}a(2t-1) = u + \frac{1}{2}a(2 \times 5 - 1)$$

$$= u + \frac{9}{2}a \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

আবার,

$$v = 0 = u + at \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

মোট সময় t হলে,

$$s_{th} = u + \frac{1}{2}a(2t - 1) = \frac{1}{64}\left(ut + \frac{1}{2}at^2\right)$$

বা, $u + at - \frac{1}{2}a = \frac{1}{64}ut + \frac{1}{128}at^2$

বা, $0 - \frac{1}{2}a = \frac{t}{64}\left(u + \frac{1}{2}at\right) = \frac{t}{64}\left(u + at - \frac{1}{2}at\right)$ $[\because u + at = 0]$

বা, $0 - \frac{1}{2}a = \frac{t}{64}\left(0 - \frac{1}{2}at\right)$

বা, $\frac{a}{2} = \frac{at^2}{128}$

বা, $t^2 = 64 \quad \therefore \quad t = 8\text{ s}$

সুতরাং মোট সময়, $t = 8\text{ s}$

(ii) নং থেকে পাই,

$u + at = 0$

$u = -8a$

এখন, (i) নং থেকে $-8a + \frac{9}{2}a = 7$ বা, $-7a = 14$

$\therefore \quad a = -2\text{ ms}^{-2}$

$\therefore$ কণাটির ত্বরণ, $a = -2\text{ ms}^{-2}$

(ii) নং থেকে $u = -8a = -8 \times (-2) = 16\text{ ms}^{-1}$

অতএব কণাটির আদিবেগ, $u = 16\text{ ms}^{-1}$

উত্তর : কণাটির আদিবেগ 16 ms^{-1}; ত্বরণ -2 ms^{-2} এবং মোট সময় 8 s

১০। স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করে একটি বস্তু প্রথম সেকেন্ডে 2 m দূরত্ব অতিক্রম করে। পরবর্তী 1 m দূরত্ব অতিক্রম করতে বস্তুটির কত সময় লাগবে ? [ঢা. বো. ২০১০; CUET Admission Test : 2011-12 (মান ভিন্ন)]

১ম ক্ষেত্রে,

আমরা জানি,

$$s_1 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

বা, $2 = 0 + \frac{1}{2} \times a \times (1)^2$

$\therefore \quad a = 4\text{ ms}^{-2}$

এখানে,

$v_0 = 0$

$t_1 = 1\text{ s}$

$s_1 = 2\text{ m}$

$a = ?$

২য় ক্ষেত্রে,

দূরত্ব, $s = 3\text{m}$

$\therefore \quad s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

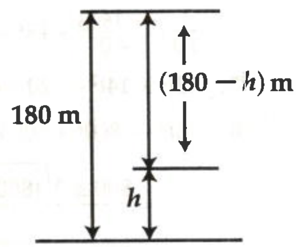
$3 = 0 + \frac{1}{2} \times 4 \times t^2$

$\therefore \quad t^2 = \frac{3}{2}$ বা, $t = 1.22\text{ s}$

অতএব, শেষের 1 m পথ অতিক্রম করতে সময় লাগবে $= 1.22 - 1 = 0.22\text{ s}$

১১। একটি বস্তুকে 180 m উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে ফেলে দেওয়া হলো। একই সময় অন্য একটি বস্তুকে 60 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। কখন এবং কোথায় তারা একত্রে মিলিত হবে ?

মনে করি নিক্ষিপ্ত হবার t সময় পর ভূমি হতে h উচ্চতায় তারা একত্রে মিলিত হবে।



পতনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$(180-h) = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$$

বা, $(180-h) = 0 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$

নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$$v_0t = 180$$

বা, $60\,t = 180$

$\therefore \; t = 3\text{ s}$

t-এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$180 - h = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times (3)^2$$

$\therefore \; h = 180 - 44{\cdot}1 = 135{\cdot}9\text{ m}$

$\therefore$ নিক্ষিপ্ত হবার 3 সে. পর ভূমি হতে 135·9 m ওপরে একত্রে মিলিত হবে।

~~১২~~। একটি রাইফেলের গুলি একটি তক্তাকে ঠিক ভেদ করতে পারে। যদি গুলির বেগ চারগুণ করা হয়, তবে অনুরূপ কয়টি তক্তা ভেদ করতে পারবে ? [কৃষি গুচ্ছ ভর্তি পরীক্ষা, ২০২০–২১]

[MAT 8-9]

১ম ক্ষেত্রে,

আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

বা, $0 = v_0^2 - 2ax$

বা, $a = \frac{v_0^2}{2x}$

এখানে,
তক্তার পুরুত্ব $= x$
আদি বেগ $= v_0$
ত্বরণ $= a$
সরণ $= x$

২য় ক্ষেত্রে,

তক্তার সংখ্যা n ধরলে মোট পুরুত্ব $= nx$

এখন, $0 = (4v_0)^2 - 2 \times \frac{v_0^2}{2x} \times nx$

বা, $nv_0^2 = 16\,v_0^2$

বা, $n = 16$

$\therefore$ তক্তার সংখ্যা $= 16$

এখানে,
আদি বেগ $= 4v_0$
শেষ বেগ $= 0$
ত্বরণ $= \frac{v_0^2}{2x}$

১৩। মেইল ট্রেন এবং একটি মালবাহী ট্রেন একই ট্রেন লাইনের ওপর দিয়ে একই দিকে যথাক্রমে 35 ms^{-1} এবং 15 ms^{-1} গতিবেগে চলছে। মেইল ট্রেনের চালক ঠিক 200 m দূর মালবাহী ট্রেনটিকে দেখে ব্রেক প্রয়োগ করে 0·70 ms^{-2} মন্দন সৃষ্টি করল। সঙ্গে সঙ্গে মালগাড়ি চালকও 0·60 ms^{-2} ত্বরণ সৃষ্টি করল। ট্রেন দুটির মধ্যে সংঘর্ষ হবে কি না গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

মনে করি ট্রেন দুটি t সময় পরে সংঘর্ষে লিপ্ত হলো। এই সময় মেইল ট্রেন যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা হলো—

$$S_1 = 35t - \frac{1}{2} \times 0{\cdot}70\,t^2 = 35t - \frac{14}{40}t^2$$

এবং মালগাড়ি কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব, $S_2 = 15t + \frac{1}{2}0{\cdot}60\,t^2 = 15t + \frac{3}{10}t^2$

এখন, সংঘর্ষ হবে যদি $S_1 = S_2 + 200$ হয়

$$35t - \frac{14}{40}t^2 = 15t + \frac{3}{10}t^2 + 200$$

বা, $\frac{3}{10}t^2 + \frac{14}{40}t^2 + 15t - 35t + 200 = 0$

বা, $12t^2 + 14t^2 - 20 \times 40t + 200 \times 40 = 0$

বা, $26t^2 - 800t + 8000 = 0$

$$\therefore \quad t = \frac{800 \pm \sqrt{(800)^2 - 4 \times 26 \times 8000}}{2}$$

$$= \frac{800 \pm \sqrt{640000 - 832000}}{2}$$

স্পষ্টই $\sqrt{640000 - 832000}$ ঋণাত্মক। তাই t অবাস্তব। অর্থাৎ ট্রেন দুটির সংঘর্ষ ঘটবে না।

১৪। একটি বাঘ 8 m সামনে একটি হরিণকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা থেকে 1 ms^{-2} ত্বরণে তার পেছনে দৌড়াতে থাকে। হরিণটি টের পেয়ে 3 ms^{-1} সমবেগে চলতে থাকলে কতক্ষণ পরে ও কত দূরত্ব অতিক্রমে বাঘটি হরিণটিকে ধরতে পারবে?

বাঘের ক্ষেত্রে, অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$S_1 + 8 = ut + \frac{1}{2}at^2$$

বা, $S_1 + 8 = 0 + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$

$$\therefore \quad S_1 = \frac{1}{2}at^2 - 8 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

হরিণের ক্ষেত্রে,

$$S_1 = vt = 3 \times t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$\therefore$ (1) ও (ii) সমীকরণ অনুযায়ী,

$$\frac{1}{2}at^2 - 8 = 3t$$

বা, $\frac{1}{2} \times 1 \times t^2 - 8 = 3t$

বা, $0.5t^2 - 8 = 3t$

$\therefore \quad 0.5t^2 - 3t - 8 = 0$

$$\therefore \quad t = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 0.5 \times 8}}{2 \times 0.5}$$

$\therefore \quad t = 8$ sec

(ii)নং সমীকরণে $t = 8$ sec বসিয়ে পাই,

$$S_1 = 3 \times 8 = 24 \text{ m}$$

অর্থাৎ 8 sec পর বাঘটি 24 m দূরত্বে অতিক্রম করে হরিণকে ধরতে পারবে।

১৫। একটি বিড়াল 5 ms^{-1} গতিতে চলছে। বিড়ালের 30 m পেছন থেকে একটি কুকুর 10 ms^{-1} গতিতে বিড়ালকে ধরার জন্য দৌড়াতে শুরু করল। কত সময় পর কুকুরটি বিড়ালকে ধরবে?

ধরি কুকুরটি 5 দূরত্ব অতিক্রম করে t সময় পর বিড়ালকে ধরতে পারবে।

কুকুরের ক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$S + 30 = \upsilon_0 t$$

$$S + 30 = 5t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার বিড়ালের ক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$S = vt$

$\therefore \quad S = 10 + t = 10t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

t এর (1)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$S + 30 = 5t$

বা, $10t + 30 = 5t$

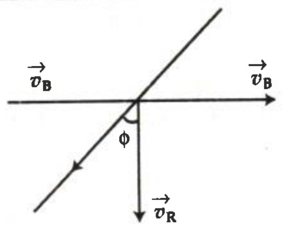
বা, $5t = -30,\ t = -6\ \text{sec} = 6\ \text{sec}$

t এর মান (ii)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$S = 10t = 10 \times 6 = 60\ \text{m}$

অর্থাৎ 10 sec পর কুকুরটি মোট $S + 30 = (60 + 30)\ \text{m} = 90\ \text{m}$ পথ অতিক্রম করে বিড়ালটিকে ধরতে পারবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : বৃষ্টির দিনে চলন্ত বাসে বসে থাকা একজন যাত্রীর নিকট উল্লম্বভাবে পতনশীল বৃষ্টির পানি তির্যকভাবে পড়ছে মনে হয় কেন ?



বৃষ্টির বেগ v_R এবং বাসের বেগ $\vec{v}_B$ হলে যাত্রী সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ হবে, $\vec{v}_{RB} = \vec{v}_R - \vec{v}_B$। $\vec{v}_{RB}$ ভেক্টরটি উল্লম্ব রেখার সাথে ϕ কোণে আনত থাকলে, $\tan\phi = \dfrac{v_B}{v_R}$ ।

অর্থাৎ, বাসটি চলতে থাকলে বাসের যাত্রীর নিকট উল্লম্বভাবে পতনশীল বৃষ্টি তির্যকভাবে পড়ছে মনে হবে।

প্রাস (Projectile)

ভূপৃষ্ঠ থেকে বা ভূপৃষ্ঠের কাছাকাছি কোনো বিন্দু থেকে যেকোনো দিকে তির্যকভাবে নিক্ষেপ করা হলে তাকে প্রাস বলে।

জানা দরকার :

- প্রাসের ওপর একমাত্র ক্রিয়াশীল বল অভিকর্ষ বল;
- প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা পৃথিবীর ব্যাসার্ধের তুলনায় নগণ্য। তাই প্রাসের গতির আলোচনায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান স্থির ধরে নেওয়া হয়, এবং
- প্রাসের গতি আলোচনায় বায়ুর বাধা উপেক্ষণীয়।

প্রাসের গতি সংক্রান্ত কয়েকটি সংজ্ঞা

প্রক্ষেপণ বিন্দু (Point of projection) : যে বিন্দু দিয়ে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় সেই বিন্দুকেই প্রক্ষেপণ বিন্দু বলা হয়।

প্রক্ষেপণ পথ (Trajectory) : যে বক্রপথে প্রাসের গতি হয় তাকেই প্রাসের প্রক্ষেপণ পথ বলা হয়।

প্রক্ষেপণ বেগ (Velocity of projection) : যে প্রারম্ভিক বেগে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় সেই বেগকে প্রক্ষেপণ বেগ বলে।

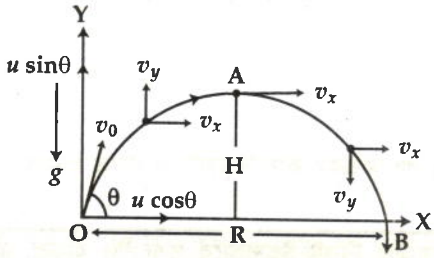
প্রক্ষেপণ কোণ (Angle of projection) : অনুভূমিক তলের সঙ্গে যে কোণে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় তাকেই বলা হয় প্রক্ষেপণ কোণ।

প্রক্ষেপণ সীমা বা পাল্লা (Horizontal range or range) : প্রাসের প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে পতন বিন্দুর মধ্যবর্তী অনুভূমিক দূরত্বকে অণুভূমিক পাল্লা বা পাল্লা বলে।

উড্ডয়নকাল (Time of flight) : প্রক্ষেপণ বিন্দু থেকে প্রক্ষেপণ বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের ওপর এসে পড়তে প্রাসটির যে সময় লাগে তাকে উড্ডয়নকাল বলে। একে **চলনকাল**ও বলা হয়।

৩·৮ প্রক্ষেপণ গতি
Projectile Motion

তুমি যদি স্টেডিয়ামে কখনো ক্রিকেট খেলা দেখতে যাও তা হলে বাউন্ডারি থেকে ছোড়া ক্রিকেট বলের গতি লক্ষ করলে দেখবে বলটি প্রথমে ভূমি থেকে ওপরে উঠে পুনরায় বাঁকা পথে ভূমিতে ফিরে আসে। আবার বন্দুক থেকে উপরের দিকে ছোড়া বুলেটের গতি, নিক্ষিপ্ত তীর বা বর্শার গতি, বিমান থেকে নিক্ষিপ্ত বোমার গতি সকল ক্ষেত্রে একই প্রকার গতিপথ লক্ষ করা যায়। এই ধরনের বক্রগতিকে **প্রাসের গতি** বলে এবং প্রাসটি যে পথ অতিক্রম করে তাকে প্রাসের গতিপথ (trajectory) বলা হয়। ইহা একটি অধিবৃত্ত। এ ধরনের গতি দ্বিমাত্রিক গতি। বাতাসের বাধা উপেক্ষা করলে প্রাসের গতি কেবলমাত্র অভিকর্ষের ক্রিয়ায় হয়। **প্রাসের গতিপথ সর্বদা প্যারাবোলা বা অধিবৃত্ত হয়। প্রাস সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছালে এর বেগ সর্বনিম্ন (শূন্য) হয়। আবার সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক হয়।** প্রাস প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে অনুভূমিক দিকে সর্বাধিক যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে প্রাসের পাল্লা (Range) বলে। **নিক্ষেপণ কোণ 45° হলে প্রাসের পাল্লা সর্বাধিক হয়।**



চিত্র ৩·৩৯

অনুভূমিক বরাবর প্রাসের ত্বরণ, $a_x = 0$, উল্লম্ব বরাবর প্রাসের ত্বরণ, $a_y = -g$ হয়। **প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ ও ত্বরণের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়।** প্রক্ষেপণ বিন্দুতে প্রাসের মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $x = 0$, $y = 0$ হয়। মনে কর O বিন্দু হতে θ কোণে একটি প্রাসকে v_0 আদিবেগে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো [চিত্র ৩·৩৯]। প্রাসের প্রাথমিক বেগ v_0 কে দুটি উপাংশে বিভক্ত করা যায়। একটি উপাংশ OX বরাবর, অপর উপাংশ OY বরাবর। উপাংশ দুটি হলো $v_{x_0} = v_0 \cos\theta$ এবং $v_{y_0} = v_0 \sin\theta$। উল্লেখ্য **অনুভূমিক দিকে g এর কোনো অক্ষাংশ নেই, তাই ত্বরণ না থাকায় অনুভূমিক দিকে বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে। সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক হয় এবং বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়। উল্লম্ব বরাবর ত্বরণ থাকে তাই বেগের উপাংশ পরিবর্তিত হয়।**

প্রাসের সঞ্চারপথ (Locus of projectile) : এমন একটি নির্দেশতন্ত্র নেওয়া হলে যার ধনাত্মক Y-অক্ষ উল্লম্ব বরাবর ওপরের দিকে বিস্তৃত এবং ধনাত্মক X-অক্ষ অনুভূমিকভাবে প্রাসের প্রক্ষেপ বেগের অনুভূমিক উপাংশের দিকে বিস্তৃত। মূল বিন্দু প্রাসের প্রক্ষেপ বিন্দু [চিত্র ৩·৩৯]।

আমরা প্রক্ষেপ মুহূর্ত থেকে সময় গণনা করতে পারি। অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব x হলে গতির সমীকরণ অনুযায়ী $x = v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$x = v_0 \cos\theta t + 0$ [∵ অনুভূমিক গতি $v_{x0} = v_0 \cos\theta$]

$$\therefore \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.33)$$

আবার $a_x = -g$ হওয়ায় t সময় পর উল্লম্ব দিকে প্রাসের বেগ বা উল্লম্ব গতি,

$$v_y = v_{y_0} - gt = v_0 \sin\theta - gt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.34)$$

t সময় পর প্রাস যদি y উচ্চতায় আরোহণ করে তবে,

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.35)$$

t সময়ে লব্ধি বেগ, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

লব্ধি বেগ অনুভূমিক দিকের সাথে α কোণ করলে, $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$

t-এর মান (3.35) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$y = v_0 \sin\theta \times \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g \times \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2$$

$$\boxed{y = ax - bx^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.36)$$

ইহা একটি প্যারাবোলা বা অধিবৃত্তের সমীকরণ।

এখানে $a = \tan\theta$, $b = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}$

এই রাশি দুটি প্রক্ষেপ পথে ধ্রুব থাকে। সুতরাং **প্রাসের গতিপথ একটি প্যারাবোলা।**

অনুধাবনমূলক কাজ : খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্ব শূন্য হয় কেন ?

জেনে রাখ : খাড়াভাবে ওপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2}{2g}$

সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছাবার সময় : সর্বাধিক উচ্চতায় $v_y = 0$ এবং $t = t_m$ হলে $v_y = v_0 \sin\theta - gt$ সমীকরণে মান বসিয়ে পাওয়া যায়, $0 = v_0 \sin\theta - gt_m$ বা, $t_m = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$

বিচরণ কাল বা উড্ডয়ন কাল বা চলন কাল (Time of flight) (T) : এক্ষেত্রে উঠা এবং নামার জন্য $y = 0$ হয় ফলে (3.34) নং সমীকরণ থেকে $v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$

$$\therefore \quad t\left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt\right) = 0 \text{ অথবা } t = 0 \quad \therefore \quad t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$t = 0$ হলে প্রাসের প্রাথমিক অবস্থা 0-কে নির্দেশ করে। অতএব বিচরণ কাল $t = T$ বসিয়ে পাই

$$\boxed{T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.39)$$

[DAT 24-25]

জেনে রাখ : খাড়াভাবে ওপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থান-পতন বা বিচরণকাল, $T = \frac{2v_0}{g}$

প্রক্ষেপণ সীমা বা পাল্লা (R) (Horizontal angle) : অনুভূমিক দিকে OB = পাল্লা = R [চিত্র ৩.৩৯]

অতএব পাল্লা, $R = v_{x_0} T = v_0 \cos\theta T = v_0 \cos\theta \times \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$

$$= \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$\therefore \quad \boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta} \quad [\because 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta] \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.40)$$

DAT [23-24]

সর্বাধিক পাল্লা (R_{max}) :

v_0-এর যেকোনো প্রদত্ত মানে R সর্বাধিক হয় যখন $\sin 2\theta = 1$ বা $2\theta = 90°$ হয় বা $\theta = 45°$ হয়।

$$\therefore \quad \boxed{R_{max} = \frac{v_0^2 \sin 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g}}$$

অর্থাৎ 45° নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষিপ্ত বস্তুর পাল্লা সর্বাধিক। প্রাসের পাল্লা আদিবেগ ও নিক্ষেপ কোণের ওপর নির্ভর করে। আদিবেগ যত বেশি হবে পাল্লাও তত বেশি হবে। এজন্য লং জাম্প দেওয়ার সময় কিছু দূর থেকে দৌড়ে আসলে বেশি দূরত্ব অতিক্রম করা যায়।

সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি
Kinetic energy and potential energy of a projectile at the highest point

(i) সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের গতিশক্তি : প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে এর গতিশক্তি সর্বনিম্ন হয়। এই বিন্দুতে প্রাসের শুধুমাত্র অনুভূমিক বেগ $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ থাকে এবং উল্লম্ব বেগ শূন্য হয়। সুতরাং

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.41)$$

(ii) সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের স্থিতিশক্তি : সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের স্থিতিশক্তি সর্বাধিক হয়। এই স্থিতিশক্তি,

$$E_p = mgh = mg \times \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.42)$$

অতএব, মোট শক্তি, $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.43)$$

এই শক্তি প্রাসের প্রাথমিক মোট শক্তির সমান।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৬

১। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে ভূপৃষ্ঠ হতে 40 ms^{-1} বেগে শত্রুপক্ষের একটি বিমানের দিকে একটি কামানের গোলা নিক্ষেপ করা হলো। গোলাটি 30 m দূরে অবস্থিত একটি দেয়ালকে কত উচ্চতায় কত সময় পর আঘাত করবে ? [KUET Admission Test : 2018-19 (মান ভিন্ন)]

মনে করি গোলাটি y উচ্চতায় দেওয়ালকে আঘাত করে।

আদিবেগের অনুভূমিক উপাংশ,

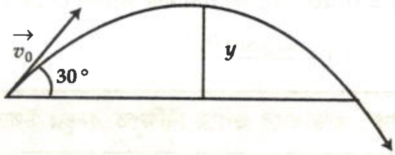
$$v_{x0} = v_0 \cos 30° = 40 \cos 30° = 34{\cdot}64 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 30°$
আদিবেগ, $v_0 = 40 \text{ ms}^{-1}$
উচ্চতা, $y = ?$

অনুভূমিক দিকে ত্বরণ না থাকার কারণে বেগের উপাংশ অপরিবর্তিত থাকবে। ধরি t সময় পর গোলাটি 30 m দূরের দেওয়ালকে আঘাত করে।

$\therefore \quad v_{x0}t = 30$

বা, $t = \dfrac{30}{34{\cdot}64} = 0{\cdot}866$ sec



আদিবেগের উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_{y0} = 40 \sin 30° = 20 \text{ ms}^{-1}$$

t সময় পর উল্লম্ব সরণ,

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 20 \times 0{\cdot}866 - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times (0{\cdot}866)^2 = 13{\cdot}645 \text{ m}$$

বি. দ্র. X ও Y-অক্ষের দূরত্ব একসাথে ব্যবহার হলে, $y = (\tan\theta)x - \dfrac{9x^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$ সূত্র প্রয়োগেও অঙ্ক করা যাবে।

২। একটি প্রাসের প্রাথমিক বেগ হলো $(2\hat{i} + 3\hat{j})$ ms^{-1}। যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ হলো যথাক্রমে অনুভূমিক ও উল্লম্ব দিক বরাবর একক ভেক্টর। প্রাসটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। ($g = 9{\cdot}8$ ms^{-2})

প্রাসটির প্রাথমিক বেগ, $\vec{v} = (2\hat{i} + 3\hat{j})\text{ ms}^{-1} = (v_x\hat{i} + v_y\hat{j})\text{ ms}^{-1}$

অর্থাৎ $v_x = 2 \text{ ms}^{-1}$ এবং $v_y = 3\text{ms}^{-1}$

ধরা যাক, প্রাসটির $t = 0$ সময়ে অর্থাৎ প্রাথমিক স্থানাঙ্ক (0, 0) এবং ts পরে স্থানাঙ্ক (x, y)।

$\therefore \quad x = v_xt = 2t$ m ... ... (i)

এবং $y = v_yt - \frac{1}{2}gt^2 = (3t - 4{\cdot}9\,t^2)$ m ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাওয়া যায়,

$$y = 2 \times 2x - 4{\cdot}9\,(2x)^2 = 4x - 9{\cdot}8x^2$$

সর্বাধিক উচ্চতা (H) : সর্বোচ্চ বিন্দু A-তে বেগের উল্লম্ব উপাংশের মান শূন্য হয় অর্থাৎ $v_y = 0$ হয়; সেক্ষেত্রে (3.34) সমীকরণ থেকে $v_0 \sin\theta - gt = 0$, $t = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$ ... ... (3.37)

(3.35) নং সমীকরণে $y = H$ এবং t-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$H = v_0 \sin\theta \times \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}\frac{gv_0^2 \sin^2\theta}{g^2}$$

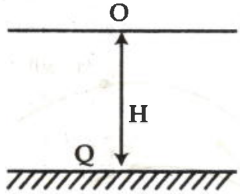
$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$\therefore \quad \boxed{H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}} \quad ... \quad ... \quad ... \quad (3.38)$$

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৭

১। যদি ভূমি থেকে O বিন্দুর উচ্চতা H এবং t সময় পরে বস্তুটি ভূমির Q বিন্দুতে আঘাত করে, তবে দেখাও যে ভূমি স্পর্শ করার পর অনুভূমিক সীমা, $R = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$।



আমরা জানি,

$$H = 0 \times t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad [\because\ y = v_{y0}t + \frac{1}{2}gt^2]$$

বা, $t^2 = \frac{2H}{g}$ বা, $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

$\therefore$ $R = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$

২। 1·25 m উচ্চতাবিশিষ্ট একটি অনুভূমিক টেবিলের এক প্রান্ত দিয়ে একটি বল গড়িয়ে পড়ল। টেবিল থেকে পড়ার মুহূর্তে বলটির বেগ 3 ms⁻¹ হলে বলটি টেবিলের নিম্ন প্রান্ত থেকে কত দূরে গিয়ে পড়বে ?

আমরা জানি প্রক্ষেপণ সীমা,

$$R = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\therefore\ R = 3 \times \sqrt{\frac{2 \times 1{\cdot}25}{9{\cdot}8}}$$

$$= 3 \times 0{\cdot}5 = 1{\cdot}5\ \text{m}$$

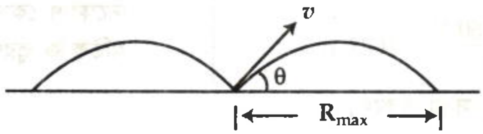
এখানে,
$v_0 = 3\ \text{ms}^{-1}$
$H = 1{\cdot}25\ \text{m}$
$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

৩। মেঝেতে অবস্থিত একটি ফোয়ারা থেকে পানি চারদিকে ছড়িয়ে পড়ছে। যদি ফোয়ারার মুখ থেকে পানি v বেগে নির্গত হয় তবে ফোয়ারার চারপাশে ভূমির কতটা ক্ষেত্রফল পানিতে ভিজবে?

আমরা জানি অনুভূমিক পাল্লা,

$R = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$; এখানে θ হলো অনুভূমিকের সাথে নির্গত পানির আনত কোণ।

এখন, R-এর মান সর্বোচ্চ হবে যখন, sin 2θ = 1 অর্থাৎ যখন 2θ = 90° বা, θ = 45° [চিত্র (i)]।



চিত্র (i)

$\therefore$ $R_{max} = \frac{v^2}{g}$; অর্থাৎ R_{max} ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার অঞ্চল পানিতে ভিজবে। এই অঞ্চলের ক্ষেত্রফল,

$$A = \pi R_{max}^2 = \pi\left(\frac{v^2}{g}\right)^2 = \frac{\pi v^4}{g^2}$$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : দুটি একই প্রক্ষেপণ বেগের প্রাসের ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ কোণ θ ও θ ± 90° হলে, দেখাও যে, এই দুই ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ সীমা সমান; কিন্তু বিপরীতমুখী।

দুটি প্রাসের প্রক্ষেপণ সীমা R_1 ও R_2 হলে লেখা যায়,

$$R_1 = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \text{ এবং } R_2 = \frac{u^2 \sin 2\,(90° \pm \theta)}{g} = \frac{u^2 \sin^2 (180° \pm 2\theta)}{g}$$

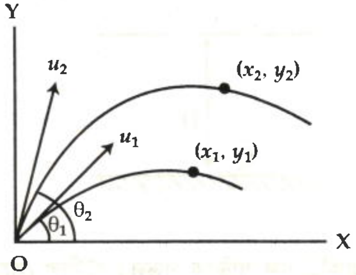
$$\therefore\ R_2 = \pm\frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\therefore\ R_1 = \pm R_2$$

সুতরাং এই দুই ক্ষেত্রে প্রক্ষেপণ সীমা সমান, কিন্তু বিপরীতমুখী।

কাজ : একটি প্রাসের সাপেক্ষে অন্য একটি প্রাসের গতিপথ সরলরেখা। — ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, u_1 ও θ_1 একটি প্রাসের যথাক্রমে প্রক্ষেপণ বেগ ও প্রক্ষেপণ কোণ এবং u_2 ও θ_2 যথাক্রমে অন্য একটি প্রাসের প্রক্ষেপণ বেগ ও প্রক্ষেপণ কোণ। t সময় পরে প্রথম ও দ্বিতীয় প্রাসের অবস্থান যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হলে,



$$x_1 = (u_1 \cos\theta_1)\, t$$

$$y_1 = (u_1 \sin\theta_1)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

এবং $$x_2 = (u_2 \cos\theta_2)\, t$$

$$y_2 = (u_2 \sin\theta_2)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

এখন প্রথম প্রাসের সাপেক্ষে দ্বিতীয় প্রাসের অবস্থান (x, y) হলে,

$$x = x_2 - x_1 = t(u_2 \cos\theta_2 - u_1 \cos\theta_1)$$

এবং $$y = y_2 - y_1 = t\,(u_2 \sin\theta_2 - u_1 \sin\theta_1)$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} = \frac{u_2 \sin\theta_2 - u_1 \sin\theta_1}{u_2 \cos\theta_2 - u_1 \cos\theta_1} = \text{K} = \text{ধ্রুবক (ধরি)}$$

$\therefore \quad y = \text{K}x$, এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ।

সুতরাং, একটি প্রাসের সাপেক্ষে অন্য একটি প্রাসের গতিপথ সরলরেখা।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৮

১। $49\ \text{ms}^{-1}$ বেগে ভূমির সাথে $60°$ কোণে একটি বস্তুকে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। এটা সর্বোচ্চ কত ওপরে উঠবে ? এতে কত সময় লাগবে ? কত সময় পর এটা ভূমিতে পতিত হবে ? এর অনুভূমিক পাল্লা কত হবে ?

[KUET Admission Test : 2014-15 (মান ভিন্ন)]

এখানে,
নিক্ষেপণ বেগ, $v_0 = 49\ \text{ms}^{-1}$
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 60°$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

সর্বাধিক উচ্চতা,

$$\text{H} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(49)^2 \times (\sin 60°)^2}{2 \times 9{\cdot}8} = 91{\cdot}87\ \text{m}$$

সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে t_m সময় লাগলে,

$$t_m = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{49 \times \sin 60°}{9{\cdot}8} = 4{\cdot}33\ \text{sec}$$

ভূমিতে আসার সময় T হলে,

$$\text{T} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2 \times 49 \times \sin 60°}{9{\cdot}8} = 8{\cdot}66\ \text{s}$$

পাল্লা, $$\text{R} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(49)^2 \times \sin(2 \times 60°)}{9{\cdot}8} = 212{\cdot}18\ \text{m}$$

উত্তর : সর্বোচ্চ উচ্চতা $91{\cdot}87$ m; সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে সময় লাগবে $4{\cdot}33$ sec; ভূমিতে পতিত হতে সময় লাগবে $8{\cdot}66$ s; অনুভূমিক পাল্লা $212{\cdot}18$ m

২। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা $79{\cdot}53$ m এবং বিচরণকাল $5{\cdot}3$ sec। নিক্ষেপণ বেগ ও নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯, ২০০৪]

এখানে,
$\text{R} = 79{\cdot}53\ \text{m}$
$\text{T} = 5{\cdot}3\ \text{sec}$
$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

আমরা জানি,

$$\text{T} = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad \text{(i)}$$

এবং $$\text{R} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{v_0^2\, 2\sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} \quad \ldots\ \ldots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{T}{R} = \frac{\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}}{\frac{v_0^2\, 2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}}$

বা, $\frac{5\cdot3}{79\cdot53} = \frac{1}{v_0\cos\theta_0}$

বা, $v_0\cos\theta_0 = 15$ ... ... (iii)

সমীকরণ (i) থেকে পাই,

$$T = \frac{2\,v_0\sin\theta_0}{9\cdot8}$$

$\therefore\ v_0\sin\theta_0 = \frac{9\cdot8}{2}\times T = \frac{9\cdot8}{2}\times 5\cdot3 = 25\cdot97$ ... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) থেকে পাই,

$$\tan\theta_0 = \frac{25\cdot97}{15} = 1\cdot7306 \qquad \therefore\ \theta_0 = 60°$$

সমীকরণ (iii)-এ θ_0-এর মান বসিয়ে পাই,

$$v_0\cos 60° = 15$$

$$v_0\times 0\cdot5 = 15$$

$$\therefore\ v_0 = \frac{15}{0\cdot5} = 30\ \text{ms}^{-1}$$

উত্তর : নিক্ষেপণ কোণ 60°; নিপেক্ষণ বেগ 30 ms^{-1}

৩। 30 m উচ্চতার কোনো স্তম্ভ হতে একটি প্রক্ষিপ্ত বস্তুকে 20 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটির বিচরণকাল নির্ণয় কর।

[ব. বো. ২০১০; DU unit-A Admission Test, 2019-20]

এখানে,
$y = 0$
$y_0 = 30\text{ m}$
$v_0 = 20\text{ms}^{-1}$
$\theta = 30°$
$g = 9\cdot8\text{ ms}^{-2}$

আমরা জানি,

$$y - y_0 = v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

বা, $-30 = (20\times\sin 30°)\,t - \frac{1}{2}\times 9\cdot8\times t^2$

বা, $4\cdot9t^2 - 10\,t - 30 = 0$

বা, $t = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2 - 4\times4\cdot9\times(-30)}}{2\times4\cdot9}$

$= \frac{+(10)\pm 26\cdot2}{9\cdot8}$

$t = 3\cdot69$ sec বা, $t = -1\cdot65$ sec

t-এর $-$ve মান গ্রহণযোগ্য নয়

$\therefore\ t = 3\cdot69$ sec

৪। v_0 প্রক্ষেপ বেগে ছোড়া একটি প্রাসের অর্জিত সর্বাধিক উচ্চতা H ও প্রক্ষেপণ সীমা R হলে দেখাও যে,

$$\mathbf{R^2 = 16\,H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)}$$

আমরা জানি,

প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$ [এখানে θ হলো প্রক্ষেপণ কোণ]

এবং প্রক্ষেপণ সীমা, $R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

এখন, $$\frac{R^2}{H} = \frac{\frac{(u^2 \sin 2\theta)^2}{g^2}}{\frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}} = \frac{(u^2 \sin 2\theta)^2 \times 2g}{u^2 \sin^2\theta \times g^2}$$

$$= \frac{(u^2\, 2\sin\theta\cos\theta)^2 \times 2}{u^2 \sin^2\theta \times g} = \frac{u^4 \times 4\sin^2\theta\cos^2\theta \times 2}{u^2\sin^2\theta \times g}$$

$$= \frac{u^2 \times 8\cos^2\theta}{g} = \frac{16u^2\cos^2\theta}{2g}$$

$$= \frac{16u^2(1-\sin^2\theta)}{2g} = 16\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}\right)$$

$$R^2 = 16H\left(\frac{u^2}{2g} - H\right)$$ (প্রমাণিত)

৫। দুটি বস্তুকে একই বেগে ভূমি থেকে প্রক্ষেপ করা হলো। এর একটির প্রক্ষেপণ কোণ 60° এবং অপরটির 30°। দেখাও যে এদের সর্বোচ্চ উচ্চতার অনুপাত 3 : 1। [KUET Admission Test : 2008-09]

60° কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা H_1 হলে,

$$H_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 60°}{2g}$$

এখানে v_0 প্রক্ষিপ্ত বস্তুর প্রক্ষেপণ বেগ এবং 30° কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতা H_2 হলে,

$$H_2 = \frac{v_0^2 \sin^2 30°}{2g}$$

এখন, $$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\frac{v_0^2\sin^2 60°}{2g}}{\frac{v_0^2\sin^2 30°}{2g}} = \frac{\sin^2 60°}{\sin^2 30°} = \left(\frac{\sin 60°}{\sin 30°}\right)^2 = \left(\frac{0{\cdot}866}{0{\cdot}5}\right)^2 = 3$$

$\therefore \quad H_1 : H_2 = 3 : 1$

৬। প্রক্ষেপণ কোণের যে মানের জন্য প্রক্ষেপণ সীমা সর্বাধিক হয় সেই কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বাদিক উচ্চতা ও প্রক্ষেপণ সীমার মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

আমরা জানি প্রক্ষেপণ সীমা, $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

প্রক্ষেপণ সীমা সর্বোচ্চ হবে যখন $\sin 2\theta = 1$ হয় অর্থাৎ $\theta = 45°$

$\therefore$ সর্বোচ্চ প্রক্ষেপণ সীমা, $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

এখন প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

$\therefore$ প্রক্ষেপণ কোণ 45° হলে, $H = \frac{v_0^2 \sin^2 45°}{2g} = \frac{u^2 \times \frac{1}{2}}{2g} = \frac{v_0^2}{4g}$

$\therefore \quad H = \frac{1}{4} \times \frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{4} \times R_{max}$

[MAT 24-25]

$\therefore$ $\boxed{R_{max} = 4H}$, অর্থাৎ সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমা ($\theta = 45°$ হলে) সর্বোচ্চ উচ্চতার চারগুণ হয়।

৭। একটি ক্রিকেট বলের ওজন 0·65 kg। একজন ফিল্ডার বলটিকে স্বল্পতম সময়ে 100 m দূরত্বে থাকা উইকেট রক্ষকের কাছে পৌঁছাতে চাইলে ন্যূনতম কত km/h গতিতে বলটি ছুড়তে হবে ? এই গতিতে ছুড়লে কতক্ষণ পর তা উইকেট রক্ষকের কাছে গিয়ে পৌঁছাবে ? [BUET Admission Test, 2017-18]

আমরা জানি অনুভূমিক দূরত্ব,

$$R = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

বা, $$v^2 = \frac{R \times g}{\sin 2\theta}$$

$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{R \times g}{\sin 2\theta}} = \sqrt{100 \times 9.8}$ [$\because$ v-এর মান সর্বনিম্ন হবে যদি $\sin 2\theta = 1$ হয়]

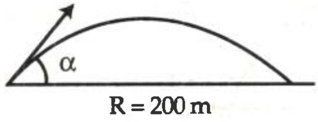
$= 31.30 \text{ ms}^{-1} = \frac{31.30 \times 60 \times 60}{1000} \text{ kmh}^{-1} = 112.7 \text{ kmh}^{-1}$

এবং $T = \frac{2v \sin \theta}{g}$

$= \frac{2 \times 31.30 \times \sin 45°}{9.8} = 4.52 \text{ sec}$

৮। কোনো একটি বস্তুকে ভূপৃষ্ঠ হতে কত কোণে 45 ms^{-1} বেগে ছুড়লে এটি 200 m দূরে গিয়ে পড়বে ?

[BUET Admission Test, 2015-16]



আমরা জানি,

$R = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$

বা, $200 \times 9.8 = (45)^2 \times \sin 2\alpha$

বা, $\sin 2\alpha = \frac{200 \times 9.8}{(45)^2} = 0.9679$

বা, $2\alpha = \sin^{-1} (0.9679)$

বা, $2\alpha = 75.44°$

$\therefore \quad \alpha = 37.72°$

৯। একটি পাথর একটি নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে 5 সেকেন্ডে ভূমিতে পতিত হয়। পাথরটিকে 3 সেকেন্ড পর থামিয়ে দিয়ে আবার পড়তে দেয়া হলো। বাকি দূরত্ব অতিক্রম করে পাথরটির ভূমিতে পৌঁছাতে কত সময় লাগবে ?

[RUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি, $h = ut + \frac{1}{2}gt^2$

$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 = 122.5 \text{ m} \quad (\because u = 0)$

আবার 3 sec এর অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$\frac{1}{2} \times 9.8 \times 3^2 = 44.1 \text{ m}$

$\therefore$ বাকি পথ $= (122.5 - 44.1) \text{ m} = 78.4 \text{ m}$

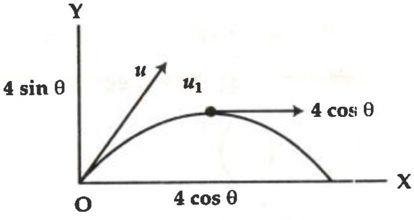
বাকি পথ অতিক্রমে প্রয়োজনীয় সময় t_1 হলে,

$\frac{1}{2}gt_1^2 = 78.4$

$\therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{78.4 \times 2}{9.8}} = 4 \text{ sec}$

কাজ : দেখাও যে সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমার ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ অবস্থানে গতিশক্তি প্রাথমিক গতিশক্তির অর্ধেক হয়।

ধরা যাক, m ভরের একটি বস্তুকে O বিন্দু থেকে অনুভূমিক তলের সাথে θ কোণে u প্রারম্ভিক বেগে প্রক্ষেপ করা হলো [চিত্র দ্রষ্টব্য]। সুতরাং প্রাসের প্রারম্ভিক গতিশক্তি $E_0 = \frac{1}{2}mu^2$।



এখন সর্বোচ্চ অবস্থানে প্রাসের গতিশক্তি,

$E = \frac{1}{2}m(u \cos \theta)^2$, এখানে $u \cos \theta$ হচ্ছে সর্বোচ্চ বিন্দুতে প্রাসের অনুভূমিক গতিবেগ।

$\therefore \quad \frac{E}{E_0} = \cos^2 \theta$

বা, $E = E_0 \cos^2 \theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

এখানে প্রক্ষেপণ কোণ 45° হলে,

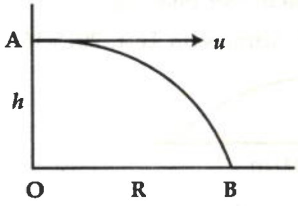
$$E = E_0 \cos^2 45°$$

$$\therefore \quad E = \frac{E_0}{2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

সুতরাং **সর্বাধিক প্রক্ষেপণ সীমার ক্ষেত্রে, সর্বোচ্চ অবস্থানে গতিশক্তি প্রাথমিক গতিশক্তির অর্ধেক হয়।**

অনুভূমিক প্রাস
Horizontal projectile

h উচ্চতা থেকে একটি বস্তুকে u বেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি মাটিকে B বিন্দুতে স্পর্শ করে। এক্ষেত্রে অনুভূমিক পাল্লা R হলে লেখা যায়,



$R = ut$, এখানে t হলো A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে মাটি স্পর্শ করার সময়-কাল। একে প্রাসের উড্ডয়নকাল বলা যেতে পারে।

বস্তুটির উল্লম্ব নিম্নগতি বিবেচনা করে লেখা যায়,

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{বা,}\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

[∵ এই বস্তুর ক্ষেত্রে বস্তুটির প্রাথমিক বেগ শূন্য]

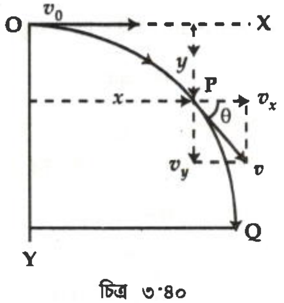
t-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$R = u \times \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2hu^2}{g}}$$

$$\boxed{\therefore\ R = \sqrt{\frac{2hu^2}{g}}}$$

৩.৯ অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতির সমীকরণ
Equation of motion of a horizontal projectile

ধরি একটি বস্তুকে O বিন্দু হতে v_0 বেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হলো [চিত্র ৩.৪০]। বায়ুর বাধা ও উচ্চতার সাথে g-এর পরিবর্তন অগ্রাহ্য করলে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে অনুভূমিক বেগ অভিন্ন এবং v_0 হবে। কিন্তু নিক্ষিপ্ত বস্তুর বেগের খাড়া উপাংশ না থাকায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের দরুন খাড়া নিচের দিকে বস্তুর বেগ সময়ের সমানুপাতে বৃদ্ধি পাবে। ধরি t সেকেন্ড পরে বস্তুটি অনুভূমিক দিকে x দূরত্ব ও খাড়া নিচের দিকে y দূরত্ব অতিক্রম করে P বিন্দুতে এল এবং P বিন্দুতে বস্তুটির বেগ v ও v-এর অনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশকের মান যথাক্রমে v_x ও v_y। তা হলে,



চিত্র ৩.৪০

$$v_x = v_0 = v\cos\theta \text{ ও}$$

$$v_y = 0 + gt = gt = v\sin\theta$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

এখানে অনুভূমিকের সাথে v-এর কৌণিক ব্যবধান θ

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

আবার, $x = v_0 \times t$ ... ... (3.44) [∵ অনুভূমিক দিকে ত্বরণ = 0]

ও $y = \frac{1}{2}gt^2$ ... ... (3.45) [∵ উল্লম্ব দিকে আদি বেগ = 0]

সমীকরণ (3.44) হতে t-এর মান সমীকরণ (3.45)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়—

$$y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.46)$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{2v_0^2}{g}y$$

উপরের সমীকরণে $\frac{2v_0^2}{g} = 4A$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

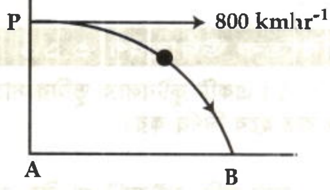
$$x^2 = 4Ay \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3.47)$$

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। কাজেই বাধাহীন পথে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতিপথ প্যারাবোলা (Parabola) বা অধিবৃত্ত রচনা করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.৯

১। ভূপৃষ্ঠ থেকে 2000 m উঁচুতে একটি বোমারু বিমান ঘণ্টায় 800 km অনুভূমিক বেগে গতিশীল। ভূপৃষ্ঠে A বিন্দুর ওপর এসে বিমানটি একটি বোমা ফেলে দিল। বোমাটি ভূপৃষ্ঠে অবস্থিত B লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করল। AB দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধরা যাক, P বিন্দুতে বোমাটি বিমান থেকে ফেলে দেওয়া হলো।



এখানে, $PA = 2000\text{ m}$

বোমাটির অনুভূমিক বেগ,

$$u = 800\text{ kmhr}^{-1} = \frac{800 \times 1000}{60 \times 60}\text{ ms}^{-1} = 222{\cdot}2\text{ ms}^{-1}$$

বোমাটি ভূপৃষ্ঠে এসে পড়তে t সময় লাগলে বোমাটির উল্লম্ব গতির জন্য লেখা যায়,

$$2000 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2 \times 2000}{9{\cdot}8}} = 20{\cdot}2\text{ s}$$

এখন অনুভূমিক দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণের উপাংশের মান শূন্য।

$$\therefore \quad AB = ut = 222{\cdot}2 \times 20{\cdot}2 = 4489\text{ m}$$
$$= 4{\cdot}489\text{ km}$$

২। একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 40° কোণে 12 ms⁻¹ বেগে প্রক্ষেপ করা হলো, (i) সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠতে বস্তুটির কত সময় লাগবে? (ii) 0·6 sec পরে বস্তুটির গতিবেগ কত? ($g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$)

এখানে,
$v = 12\text{ ms}^{-1}$
$\theta = 40°$
$t = 0{\cdot}6\text{ sec}$
$g = 9{\cdot}8\text{ ms}^{-2}$

এখানে প্রাথমিক বেগ 12 ms⁻¹, প্রাথমিক বেগের অনুভূমিক এবং উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে,

$$v_x = v\cos 40° = 12 \times 0{\cdot}766 = 9{\cdot}19\text{ ms}^{-1}$$

এবং $v_y = v\sin 40° = 12 \times 0{\cdot}643 = 7{\cdot}7\text{ ms}^{-1}$

গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে উল্লম্ব বেগ শূন্য হয়,

$$\therefore \quad 0 = v_y - gt \text{ বা, } t = \frac{v_y}{g} = \frac{7{\cdot}71}{9{\cdot}8} = 0{\cdot}79\text{ sec}$$

(ii) 0·6 sec পরে বেগের উল্লম্ব উপাংশ v_y' হলে

$$v_y' = v_y - gt = 7{\cdot}71 - 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}6$$
$$= 7{\cdot}71 - 5{\cdot}88 = 1{\cdot}83\text{ ms}^{-1}$$

এবং অনুভূমিক উপাংশ $v_x' = 9{\cdot}19\text{ ms}^{-1}$

$$\therefore \quad v = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{(9{\cdot}19)^2 + (1{\cdot}83)^2}$$
$$= \sqrt{84{\cdot}46 - 3{\cdot}35} = \sqrt{81{\cdot}1} = 9\text{ ms}^{-1}$$

এবং $\tan\theta = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{1{\cdot}83}{9{\cdot}19} = 0{\cdot}185,\ \theta = \tan^{-1}(0{\cdot}185) = 10{\cdot}5°$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : কয়েকটি বস্তুকে কোনো বিন্দু থেকে একই প্রক্ষেপণ বেগ u নিয়ে একই উল্লম্বতলে বিভিন্ন দিকে প্রক্ষেপ করা হলো। দেখাও যে, t সময় পর বস্তুগুলি একটি বৃত্তের পরিধির ওপর থাকবে।

ধরা যাক, কোনো একটি বস্তুকে θ প্রক্ষেপণ কোণে প্রক্ষেপ করা হলো। t সময় পরে বস্তুটির অবস্থান (x, y)।

সুতরাং, $x = (u\cos\theta)\,t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

এবং $y = (u \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2$

বা, $y + \frac{1}{2} g t^2 = (u \sin \theta) t$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) কে বর্গ ও যোগ করে পাওয়া যায়,

$$x^2 + (y + \frac{1}{2} g t^2)^2 = (u^2 \sin^2 \theta + u^2 \cos^2 \theta) t^2 = u^2 t^2$$

$$\therefore \quad x^2 + (y + \frac{1}{2} g t^2)^2 = u^2 t^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

সমীকরণ (iii) একটি বৃত্তের সমীকরণ। এটি প্রক্ষেপণ কোণ θ-এর ওপর নির্ভরশীল নয়। সুতরাং t সময় পরে বস্তুগুলো একটি বৃত্তের পরিধির ওপর থাকবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১০

১। একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30° কোণে 40 ms⁻¹ বেগে কিক করা হলো। 2 sec পরে ফুটবলের বেগের মান কত হবে নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১২; রা. বো. ২০১০, ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৬; RUET Admission Test, 2003-04; CKRUET 2020-21]

মনে করি, ফুটবলটি যে বিন্দু হতে কিক করা হলো সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া উপরের দিক Y অক্ষ ধনাত্মক।

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ, $\theta = 30°$
আদি বেগ, $v_0 = 40 \text{ ms}^{-1}$
সময়, $t = 2 \text{ sec}$
শেষ বেগ, $v = ?$

শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

আদি বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_{x_0} ও v_{y_0} হলে,

আমরা পাই, $v_x = v_{x_0} + a_x t = v_0 \cos \theta + a_x t$ [$\because$ অনুভূমিক ত্বরণ, $a_x = 0$]

$= v_0 \cos \theta = 40 \cos 30°$

$= 34.64 \text{ ms}^{-1}$

এবং $v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin \theta + a_y t$

বা, $v_y = 40 \sin 30° + (-9.8) \times 2$ [উল্লম্ব উপাংশ উর্ধ্বমুখী হওয়ায় $a_y = -g = -9.8 \text{ ms}^{-2}$]

$= 20 - 19.6 = 0.4 \text{ ms}^{-1}$

$\therefore \; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(34.64)^2 + (0.4)^2}$

$= \sqrt{1199.9 + 0.16} = \sqrt{1200} = 34.64 \text{ ms}^{-1}$

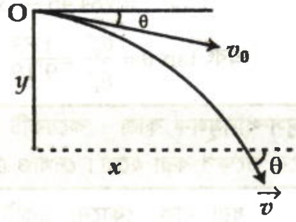
২। 170 m উঁচু দালানের ছাদ থেকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে নিচের দিকে একটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। এর আদিবেগ 40 ms⁻¹। [রা. বো. ২০০৫]

(ক) ভূমিতে আঘাত করতে কত সময় লাগবে?

(খ) দালানের পাদবিন্দু হতে কত দূরে এটি ভূমিতে আঘাত করবে?

(গ) ভূমিতে এটি কত কোণে আঘাত করবে?

মনে করি নিক্ষেপণ বিন্দু মূলবিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিকে Y-অক্ষ ধনাত্মক।



এখানে $x_0 = y_0 = 0$

উল্লম্ব সরণ $(y - y_0) = -170$ m (নিম্নমুখী)

নিক্ষেপণ কোণ, $\theta_0 = -30°$ (অনুভূমিকের সাথে নিচের দিকের কোণ)

(ক) $t = ?$ (খ) $(x - x_0) = ?$ (গ) $\theta = ?$

এখানে অনুভূমিক ত্বরণ $a_x = 0$, উল্লম্ব ত্বরণ, $a_y = -g = -9.8 \text{ ms}^{-2}$

(ক) আমরা জানি,

$$y - y_0 = v_{y_0} + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad = v_0 \sin \theta_0 t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

বা, $-170 = 40 \sin(-30°) \times t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$

বা, $-170 = -20t - 4.9t^2$

বা, $4.9t^2 + 20t - 170 = 0$

বা, $t = \dfrac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4 \times 4.9 \times (-170)}}{2 \times 4.9}$

বা, $t = 4.19$ sec বা, $t = -8.27$ sec

সুতরাং $t = 4.19$ sec

(খ) $x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

বা, $x - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = v_0 \cos \theta_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$= 40 \times \cos(-30°)\, t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$= 40 \times \cos 30° \times 4.19 + 0 \quad [\because \cos(-30°) = \cos 30°]$

$= 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4.19 = 145.15$ m

(গ) $v_x = v_{x_0} + a_x t$

$= v_0 \cos \theta_0 + a_x t = 40 \times \cos(-30°) + 0 = 34.64 \text{ ms}^{-1}$

আবার, $v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \sin \theta_0 + a_y t$

$= 40 \times \sin(-30°) + (-9.8) \times 4.19 = -61.06 \text{ ms}^{-1}$

$\tan \theta = \dfrac{v_y}{v_x}$

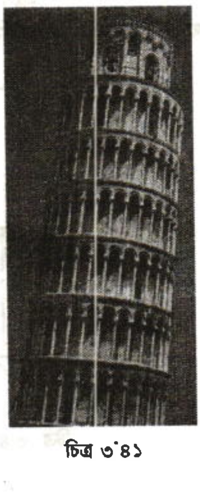
বা, $\tan \theta = \dfrac{-61.06}{34.64} = -1.76 \quad \therefore \theta = -60°$

উত্তর : (ক) 4.9 sec; (খ) 145.15 m; (গ) $-60°$

৩.১০ পড়ন্ত বস্তুর সূত্র
Laws of falling bodies

তুমি যদি কখনো ছাদের ওপর থেকে একটুকরা কাগজ ও একখণ্ড পাথর একই সাথে নিচে ফেলে দাও তা হলে কী দেখতে পাবে ? দেখবে যে, পাথরখণ্ডটি কাগজ অপেক্ষা আগে মাটিতে পৌঁছেছে।

আমরা জানি যে, বস্তুর এই খাড়াভাবে পতনের কারণ অভিকর্ষজ বা পৃথিবীর আকর্ষণ বা অভিকর্ষ। অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তুর ভরের ওপর নির্ভর করে না, তা হলে কাগজের টুকরা এবং পাথরখণ্ডটি একই সময়ে মাটিতে পৌঁছাল না কেন ? এক্ষেত্রে বাতাসের বাধা বস্তু দুটির ভিন্ন সময়ে মাটিতে পতনের ক্ষেত্রে দায়ী। ইতালীয় বিজ্ঞানী গ্যালিলিও পড়ন্ত বস্তুর গতি নিয়ে গবেষণা করেন এবং পরীক্ষালব্ধ কিছু সূত্র দেন। তিনি 1589 খ্রিস্টাব্দে পিসা শহরের বিখ্যাত 180 ফুট উঁচু হেলানো একটি স্তম্ভের ছাদ থেকে বিভিন্ন ধরনের ভারী বস্তু ফেলে দেখান যে, তারা প্রায় একই সময়ে মাটিতে পৌঁছায় [চিত্র ৩.৪১]। ভারী ও হালকা বস্তুর পতনের ক্ষেত্রে সময়ের এই সামান্য পার্থক্য বায়ুর বাধার জন্য ঘটে। পরবর্তীকালে বিজ্ঞানী নিউটন গিনি ও পালক পরীক্ষার সাহায্যে এই তথ্যের সত্যতা প্রমাণ করেন। গ্যালিলিও এ ধরনের মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর গতি সংক্রান্ত তিনটি সূত্র প্রদান করেন। সূত্রগুলো হলো :



চিত্র ৩.৪১

প্রথম সূত্র : একই উচ্চতায় স্থির অবস্থান থেকে মুক্তভাবে সকল পড়ন্ত বস্তু সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

ব্যাখ্যা : মনে করা যাক, m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণ বাধাহীনভাবে t সময়ে h_1 ও h_2 নিম্নমুখী দূরত্ব অতিক্রম করে। তাই এক্ষেত্রে $h_1 = h_2$

দ্বিতীয় সূত্র : স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময় (t)-এ প্রাপ্ত বেগ (v) ওই সময়ের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, একটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণরূপে বাধাহীনভাবে ভূমিতে পতিত হচ্ছে। এক্ষেত্রে t সময়ে বস্তুটির বেগ v হলে $\boxed{v \propto t}$।

বা, $\frac{v}{t}$ = ধ্রুবক বা, $\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2}$ = ধ্রুবক

এখানে v_1 ও v_2 হলো যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে বেগ।

তৃতীয় সূত্র : স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তু নির্দিষ্ট সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক একটি বস্তু উঁচু কোনো স্থির অবস্থান থেকে সম্পূর্ণ বাধাহীনভাবে ভূমিতে পতিত হচ্ছে। এক্ষেত্রে t সময়ে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব h হলে $\boxed{h \propto t^2}$

$\frac{h}{t^2}$ = ধ্রুবক বা, $\frac{h_1}{t_1^2} = \frac{h_2}{t_2^2}$ = ধ্রুবক

এখানে h_1 ও h_2 যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব।

জেনে রাখ : I. পড়ন্ত বস্তুর সূত্র দিয়েছেন গ্যালিলিও।
II. গিনি-পালক পরীক্ষা করেছেন নিউটন।
III. গিনি-পালক পরীক্ষা করা হয় 180 ফুট উঁচু হেলানো স্তম্ভের ছাদ থেকে।

পড়ন্ত বস্তুর সমীকরণ

কোনো বস্তু ওপর থেকে নিচে পড়ুক বা নিচ থেকে ওপরে নিক্ষেপ করা হোক না কেন, বস্তুর ওপর কেবল অভিকর্ষের ফলে ত্বরণ নিচের দিকে ক্রিয়া করলেই তাকে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তু হিসেবে গণ্য করা হয়। মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তু একমাত্রিক সুষম গতির উদাহরণ। উল্লম্ব অক্ষ Y বরাবর খাড়া ওপরের দিকে g ঋণাত্মক ধরা হয় এবং মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর জন্য নির্দিষ্ট স্থানে ভূপৃষ্ঠের কাছাকাছি অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ মোটামুটি ধ্রুব থাকে। মনে করি একটি বস্তু Y-অক্ষ বরাবর v_0 আদিবেগে উল্লম্বভাবে অভিকর্ষের প্রভাবে h উচ্চতা হতে নিচের দিকে মুক্তভাবে পড়ছে। পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে,

$$v = v_0 + gt \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.48)$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.49)$$

এবং $$v^2 = v_0^2 + 2gh \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.50)$$

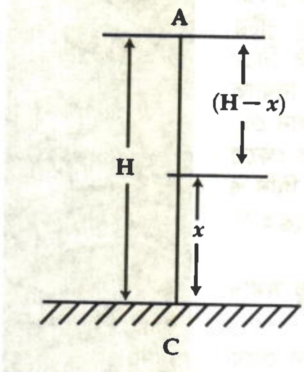
মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে আদিবেগ $v_0 = 0$, অতএব

$$v = gt$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

এবং $v^2 = 2gh$

উত্থানকালের সময় নির্ণয় :



চিত্র ৩.৪২

ধরা যাক $t = T_1$ সময়ে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিন্দু $y = H$-এ গমন করে [চিত্র ৩.৪২]। সেখানে শেষ বেগ $v = 0$ এবং $a = -g$ ধরা হয়। এক্ষেত্রে $v = v_0 - gt$ সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$$0 = v_0 - gT_1$$

$$\therefore \quad T_1 = v_0/g \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.51)$$

ইহা পতনকালের রাশিমালা নির্দেশ করে। অর্থাৎ পতনের সময়

$$T_1 = \frac{v_0}{g}$$

উত্থান ও পতনকালের সময় নির্ণয় :

ধরি $t = T$ সময়ে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিন্দুতে উঠে আবার প্রাথমিক অবস্থান $y = 0$ এ নেমে আসে।

এ অবস্থায় $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

$$0 = v_0 T - \frac{1}{2} g T^2$$

$$\frac{1}{2} g T^2 = v_0 T$$

$$\therefore \quad T = \frac{2v_0}{g} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.52)$$

উত্থানের সময় : $T_2 = T - T_1 = \frac{2v_0}{g} - \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{g}$

সুতরাং দেখা যায় যে, **উত্থান ও পতনের সময় পরস্পর সমান।**

উর্ধ্বমুখী বস্তুর সমীকরণ (Equation for a body moving upward) : একটি বস্তুকে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে বস্তুর বেগ ধীরে ধীরে কমতে থাকে এবং এক সময় বেগ মুহূর্তের জন্য শূন্য হয়। অতঃপর বস্তুটি নিচের দিকে ক্রমবর্ধমান বেগে নামতে থাকে এবং ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে বস্তুটির বেগ উৎক্ষেপণ বেগের সমান হয়। পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে দেখা যায় যে বস্তুর উত্থানকাল এবং পতনকাল ঠিক সমান। এ থেকে বোঝা যায় যে, বস্তু উর্ধ্বমুখী এবং নিম্নমুখী গতি সব বিষয়ে একই ধরনের, কিন্তু বিপরীতমুখী। সুতরাং খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি g মন্দনযুক্ত গতি। ওপরের দিককে ধনাত্মক ধরলে g সর্বদাই ঋণাত্মক। অতএব বস্তুর গতির সমীকরণগুলো হবে—

$$v = v_0 - gt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3{\cdot}53)$$

$$h = v_0 - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3{\cdot}54)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3{\cdot}55)$$

বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতা (Maximum height of a body) : একটি বস্তুকে উল্লম্বভাবে ওপরের দিকে v_0 বেগে নিক্ষেপ করা হলো। যদি বস্তুটি সর্বোচ্চ H উচ্চতায় ওঠে তবে লেখা যায়, $h = H$, তখন $v = 0$।

$$\therefore \quad 0 = v_0^2 - 2gH \text{ বা, } H = \frac{v_0^2}{2g} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3{\cdot}56)$$

প্রক্ষেপণ ও প্রত্যাবর্তন বেগ (Velocity of ejection and return) : কোনো বস্তুকে u বেগে খাড়া ওপরের দিকে ছুড়লে যদি বস্তুটি সর্বাধিক H উচ্চতায় পৌঁছায়, তবে প্রক্ষেপণ বেগ নিম্নোক্ত সমীকরণ থেকে পাই,

$$H = \frac{u^2}{2g}$$

$$\therefore \quad u = \sqrt{2gH}$$

আবার, বস্তুটি যখন সর্বাধিক উচ্চতা H থেকে নিচে পড়ে তখন ওর প্রাথমিক বেগ শূন্য হয়। সুতরাং বস্তুটির চূড়ান্ত বেগ v হলে প্রত্যাবর্তন বেগ পাই,

$$v^2 = u^2 + 2gh = 0 + 2gH$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{2gH} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3.57)$$

সুতরাং, প্রক্ষেপণ বেগের মান = প্রত্যাবর্তন বেগের মান; কিন্তু এদের অভিমুখ বিপরীতমুখী।

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১১

১। একটি উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি বল উর্ধ্বমুখে এবং অপর একটি বলকে একই বেগে নিচের দিকে ছোড়া হলো। দেখাও যে দুটি বলই একই বেগে ভূমিতে পড়বে।

ধরি, প্রথম বলের প্রাথমিক বেগ $= -u$ (ওপরের দিকে)

এবং দ্বিতীয় বলের প্রাথমিক বেগ, $= +u$ (নিচের দিকে)

দালানের উচ্চতা, h

ধরি বল দুটি যথাক্রমে, v_1 ও v_2 বেগে ভূমিতে পড়ল। দেখাতে হবে যে,

$$v_1 = v_2$$

এখন, $v_1^2 = (-u)^2 + 2gh = u^2 + 2gh$

এবং $v_2^2 = u^2 + 2gh$

$\therefore \quad v_1^2 = v_2^2$

বা, $v_1 = v_2$ অর্থাৎ বল দুটি একই বেগে ভূমিতে পড়বে।

২। একটি কুয়ার ভেতরে 60 m গভীরতায় পানি আছে। কুয়ার মুখে ঢিল ফেললে যদি 3·68 sec পরে পানির শব্দ শোনা যায়, তবে শব্দের গতিবেগ কত ? ($g = 9{\cdot}8$ ms^{-2})

মনে করি, t sec পরে ঢিলটি পানিতে পড়ল।

আমরা জানি,

$$s = ut + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 \qquad [\because u = 0]$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{2s}{g} = \frac{2 \times 60}{9{\cdot}8}$$

$$= \frac{120}{9{\cdot}8} = 12{\cdot}24$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{12{\cdot}24} = 3{\cdot}50 \text{ sec}$$

সুতরাং, শব্দ $3{\cdot}68 - 3{\cdot}50 = 0{\cdot}18$ sec সময়ে 60 m দূরত্ব অতিক্রম করে।

অতএব শব্দের বেগ, $v = \dfrac{60}{0{\cdot}18} = 333$ ms^{-1}

৩। 50 ms^{-1} প্রাথমিক বেগে একটি বস্তুকে ওপরের দিকে ছোড়া হলো।

(i) বস্তুটি কতক্ষণ ধরে ওপরে উঠবে? (ii) সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে? (iii) ভূমিতে পৌছাতে কত সময় লাগবে? (iv) কখন বস্তুটি 20 m উচ্চতায় থাকবে? (v) 3s পরে তার বেগ কত হবে?

[Admission Test : CU-A 2021-22; BUET 2013-14 (মান ভিন্ন)]

(i) ধরা যাক, ts ধরে বস্তুটি ওপরে উঠবে। সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ, $v = 0$

সুতরাং, $v = u - gt$ সমীকরণ থেকে পাই।

$$0 = u - gt = 50 - 9{\cdot}8 \times t \quad \text{বা,} \quad t = \frac{50}{9{\cdot}8} = 5{\cdot}1 \text{ s}$$

(ii) ধরা যাক, সর্বাধিক উচ্চতায় আরোহণ $= h$

সমীকরণ $v^2 = u^2 - 2gh$ ব্যবহার করে পাই,

$$0 = (50)^2 - 2 \times 9{\cdot}8 \times h \quad \text{বা,}\ h = \frac{(50)^2}{2 \times 9{\cdot}8} = 127{\cdot}55 \text{ m}$$

(iii) ধরা যাক, নিক্ষেপের পর ভূমিতে পৌছতে সময় লাগে T s

$$\therefore \quad T = \frac{2u}{g} = \frac{2 \times 50}{9{\cdot}8} = 10{\cdot}2 \text{ s}$$

(i) ধরা যাক t' সময়ে বস্তুটি 20 m উচ্চতায় থাকবে। $h = v_0t' - \frac{1}{2}gt'^2$ সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$$20 = 50 \times t' - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8\, t^2 \quad \text{বা,} \quad 4{\cdot}9\, t'^2 - 50\, t' + 20 = 0$$

$$\therefore \quad t' = \frac{50 \pm \sqrt{(50)^2 - 4 \times 4{\cdot}9 \times 20}}{2 \times 4{\cdot}9} = \frac{50 \pm 45{\cdot}9}{9{\cdot}8}$$

$$\therefore \quad t_1' = \frac{50 + 45{\cdot}5}{9{\cdot}8} = \frac{95{\cdot}5}{9{\cdot}8} = 9{\cdot}7 \text{ s}$$

এবং $t_2' = \dfrac{50 - 45{\cdot}9}{9{\cdot}8} = 0{\cdot}42$ s

t'-এর দুটি মান রয়েছে। এর কারণ বস্তুটি ওঠার সময় 20 m উচ্চতায় পৌছাবে 0·42 s-এ এবং বস্তুটি সর্বোচ্চ উচ্চতা হতে ফিরে আসার সময় একবার 20 m পৌছাবে। সেই সময় লাগে 9·7 s।

(v) ধরা যাক, 3 s পর বস্তুটির বেগ v।

$$\therefore \quad v = v_0 - gt = 50 - 9{\cdot}8 \times 3 = 20{\cdot}6 \text{ ms}^{-1}$$

৪। কোনো একটি বস্তুকে 39·2 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে ছোড়া হলো–(i) বস্তুটি কতক্ষণ ধরে ওপরে ওঠবে, (ii) কতদূর উঠবে এবং (iii) মধ্য পথে এর বেগ কত হবে? ($g = 9{\cdot}8$ ms^{-2})।

[BUET Admission Test : 2009-10 (মান ভিন্ন)]

(i) সর্বাধিক উচ্চতায় বস্তুর বেগ, $v = 0$

$v = u - gt$ সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$$0 = 39{\cdot}2 - 9{\cdot}8 \times t$$

বা, $t = \dfrac{39{\cdot}2}{9{\cdot}8} = 4$ s। অতএব, বস্তুটি 4 s ধরে ওপরে উঠবে।

(ii) সর্বাধিক উচ্চতা h হলে আমরা পাই,

$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$$

বা, $h = 39{\cdot}2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 4^2 = 156{\cdot}8 - 78{\cdot}4 = 78{\cdot}4$ m

অতএব, বস্তুটি $78{\cdot}4$ m ওপরে উঠবে।

(iii) মধ্যপথের উচ্চতা, $39{\cdot}2$ m

$v^2 = u^2 - 2gh$ সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$$v^2 = (39{\cdot}2)^2 - 2 \times 9{\cdot}8 \times 39{\cdot}2$$
$$= 1536{\cdot}64 - 768{\cdot}32 = 768{\cdot}32$$

$\therefore \quad v = \sqrt{768{\cdot}32} = 27{\cdot}72 \text{ ms}^{-1}$

৫। স্থিরাবস্থার একটি বেলুন থেকে একটি পাথর খণ্ড ফেলা হলো। গতির শেষ $\frac{1}{7}$ s-এ এটি $13{\cdot}9$ m অতিক্রম করে মাটিতে পড়ল। বেলুনের উচ্চতা এবং ভূমি স্পর্শ করার সময় পাথরটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, বেলুনের উচ্চতা $= h$, মোট পতনকাল $= t$s

$\left(t - \frac{1}{7}\right)$ s-এ অবতরণ $= h'$

আমরা জানি, $h = \frac{1}{2}gt^2$

প্রশ্নানুসারে,

$$h - h' = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g\left(t - \frac{1}{7}\right)^2$$

বা, $13{\cdot}9 = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times t^2 - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \left(t - \frac{1}{7}\right)^2$

বা, $13{\cdot}9 = 4{\cdot}9t^2 - 4{\cdot}9 \left(t - \frac{1}{7}\right)^2 = 4{\cdot}9t^2 - 4{\cdot}9t^2 + 1{\cdot}4t - 0{\cdot}1$

বা, $1{\cdot}4t = 13{\cdot}9 + 0{\cdot}1$

বা, $1{\cdot}4t = 14$

$\therefore \quad t = 10$s

বেলুনের উচ্চতা, $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times 10^2 = 490$ m

ধরি, ভূমি স্পর্শ করার সময় পাথরটির গতিবেগ $= v$

$\therefore \quad v = u + gt$ বা, $v = 0 + 9{\cdot}8 \times 10 = 98 \text{ ms}^{-1}$

হাতে-কলমে কাজ : তুমি ছাদের ওপর থেকে একটি কাগজ নিচে ফেলে দাও এবং তোমার বন্ধুকে গাছ থেকে একটি আম নিচে ফেলতে বল। উভয় পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে ত্বরণ কি সুষম হবে ? এর কারণ খুঁজে বের কর।

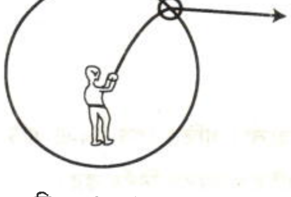
৩·১১ সুষম বৃত্তীয় গতি
Uniform circular motion

তুমি একটি সুতার এক প্রান্তে একটুকরা পাথর বেঁধে অন্য প্রান্ত আঙ্গুলে বেঁধে মাথার ওপর নিয়ে সমদ্রুতিতে ঘুরালে দেখবে পাথরটি একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। এখন যদি তুমি আঙ্গুল থেকে সুতাটি ছেড়ে দাও তা হলে তুমি কখনো দেখবে না যে, পাথরটি ঘুরতে ঘুরতে এক পর্যায়ে তোমার মাথার ওপর এসে পড়ছে। দেখতে পাবে পাথরটি যে স্থানে তোমার হাত থেকে ছুটে গেছে সেই স্থান থেকে বৃত্তাকার পথের সাথে স্পর্শকভাবে একদিকে ছিটকে যাবে [চিত্র ৩·৪৩(ক)]। নিচের চিত্রের দিকে লক্ষ করলে তুমি স্পষ্ট বুঝতে পারবে। মাথার ওপর যখন পাথরটি ঘুরছিল তখন প্রতি মুহূর্তে বেগের মান সমান হলে এ ধরনের গতি সুষম বৃত্তীয় গতি হয়।

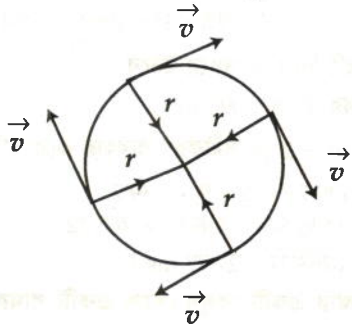
অর্থাৎ **বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুকণার গতিকে সুষম বৃত্তীয় গতি বলে।**

সুষম বৃত্তীয় গতিতে সময়ের সাথে বস্তুর বেগের মান অপরিবর্তিত থাকলেও বেগের অভিমুখ পরিবর্তিত হয়। ফলে বেগের পরিবর্তন হয়। আর কোনো বিন্দুতে এই বেগের দিক ওই বিন্দুতে বৃত্তাকার পথের স্পর্শক বরাবর। কাজেই

বেগের অভিমুখ পরিবর্তনের জন্য বস্তুর ওপর একটি বল তথা ত্বরণ ক্রিয়া করে। এই ত্বরণের অভিমুখ গতিপথের লম্ব বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রমুখী। এই ত্বরণ হলো কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণ। যদি ত্বরণের অভিমুখ অন্যদিকে হতো, তা হলে বৃত্তের স্পর্শক বরাবর অর্থাৎ কণাটির গতির অভিমুখে ত্বরণের উপাংশ থাকত; ফলে কণার দ্রুতির পরিবর্তন ঘটত।



চিত্র ৩.৪৩ (ক)



চিত্র ৩.৪৩(খ)

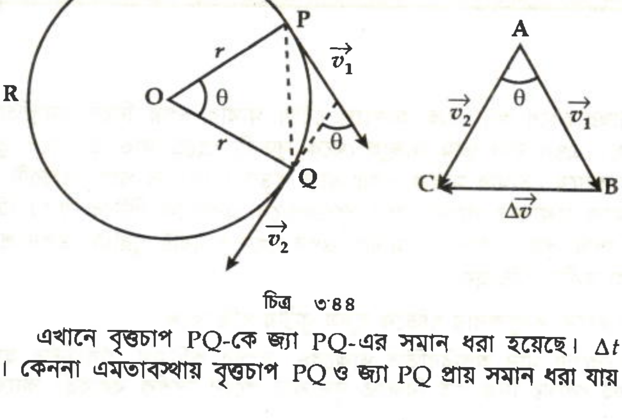
বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে কেন ? এর উত্তরে বলা যায়, কোনো বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথের পরিধি বরাবর ঘুরতে থাকলে তখন ওই বস্তুর গতি সুষম বৃত্তাকার গতি হয়। এরূপ গতিতে চলমান বস্তু সমদ্রুতিতে চললেও বৃত্তাকার পথের ওপর বিভিন্ন বিন্দুতে এর দিক ভিন্ন ভিন্ন হয়। বৃত্তাকার পথের বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক থেকে এর দিক পাওয়া যায় [চিত্র ৩.৪৩(খ)]। বিভিন্ন বিন্দুতে স্পর্শকের অভিমুখ বিভিন্ন বলে বেগের দিক সর্বদা পরবর্তিত হচ্ছে। অর্থাৎ বেগেরও পরিবর্তন হচ্ছে। সুতরাং বস্তুর ত্বরণ হচ্ছে। তাই বলা যায়, **বৃত্তকার পথে সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে।**

যেহেতু দ্রুতি স্থির অতএব কণার ত্বরণ সবসময় কেন্দ্রাভিমুখী হয়। সুতরাং বলা যায়, **কোনো বস্তুকণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার ওপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখী বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ বলে।**

কেন্দ্রমুখী ত্বরণের মান ও দিক

ধরি O কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং r ব্যাসার্ধের PQR বৃত্তাকার পথে একটি বস্তুকণা v সমদ্রুতিতে ঘুরে t সময়ে P অবস্থানে ও $(t + \Delta t)$ সময়ে Q অবস্থানে পৌঁছল এবং $\angle POQ = \theta$ [চিত্র ৩.৪৪]। কাজেই Δt সময়ে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $\Delta s = v\Delta t =$ বৃত্তচাপ PQ। P ও Q বিন্দুতে বস্তুকণাটির তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ উক্ত বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক অভিমুখী হবে। এই বেগদ্বয়ের উভয়ের মান v-এর সমান কিন্তু দিক ভিন্ন। Δt সেকেণ্ডে বেগের পরিবর্তন $(\vec{v_2} - \vec{v_1})$-কে $\Delta\vec{v}$ দ্বারা সূচিত করলে, $\Delta\vec{v}$-এর মান ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাওয়া যাবে। একই বিন্দু A হতে $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ ভেক্টর দুটি যথাক্রমে তীর চিহ্নিত AB ও AC সরলরেখা দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশ করে B ও C যোগ করি। তা হলে BC রেখা $\Delta\vec{v}$-কে মানে ও দিকে নির্দেশ করবে।

বর্ণনানুসারে OP, OQ ও PQ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ OPQ ও ত্রিভুজ ABC সদৃশকোণী। কেননা উভয়ই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং $\angle BAC = \angle POQ = \theta$ । কাজেই, $\angle ABC = \angle ACB = \varphi$ হলে,



চিত্র ৩.৪৪

$$\varphi = \left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$$

আবার সদৃশ ত্রিভুজের ধর্মানুসারে,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{OQ}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r} \text{ (প্রায়)}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

এখানে বৃত্তচাপ PQ-কে জ্যা PQ-এর সমান ধরা হয়েছে। Δt ক্ষুদ্র হলে, সম্পর্কটি প্রায় সঠিক বিবেচনা করা যায়। কেননা এমতাবস্থায় বৃত্তচাপ PQ ও জ্যা PQ প্রায় সমান ধরা যায়।

$\Delta t \to 0$ হলে, P ও Q-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব ও θ উভয়ই খুবই ক্ষুদ্র হবে অর্থাৎ P ও Q খুবই কাছাকাছি দুটি বিন্দু হবে এবং $\Delta \vec{v}$ ও $\vec{v_1}$ বা $\vec{v_2}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta \approx 90^\circ$ অর্থাৎ $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করবে। **ফলে কাজ শূন্য হবে।**

কাজেই তাৎক্ষণিক ত্বরণের মান,

$$a = \text{Lt}_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \frac{v^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.58)$$

$\therefore$ r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে v সমদ্রুতিতে আবর্তনরত বস্তুর ওপর সর্বদাই বৃত্তপথের কেন্দ্রের দিকে একটি ত্বরণ $a = \frac{v^2}{r}$ ক্রিয়া করে।

সমীকরণ (3.58) বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তুর কেন্দ্রমুখী ত্বরণের রাশিফল।

$\therefore$ বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত m ভরের বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত কেন্দ্রমুখী বল F হলে নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী, $F = ma$

বা, $F = m\frac{v^2}{r}$

বস্তুটির কৌণিক বেগ ω হলে, $v = \omega r$ হেতু

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r$$

জেনে রাখ : I. কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য হয়।

II. কেন্দ্রমুখী ত্বরণের দিক বৃত্তের কেন্দ্র বরাবর ক্রিয়া করে।

কেন্দ্রমুখী বলের ভেক্টর রূপ

$-m(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r} = -m\omega^2 \vec{r} = \frac{mv^2 \vec{r}}{r^2}$ এখানে $-$ve চিহ্নের অর্থ হলো কেন্দ্রমুখী ত্বরণের দিক বা বলের দিক ব্যাসার্ধ ভেক্টরের তথা অবস্থান ভেক্টরের বিপরীত দিকে ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে।

সুষম বৃত্তাকার গতির বৈশিষ্ট্য

১। এতে সমদ্রুতি বিদ্যমান;

২। এই গতিতে সমকৌণিক বেগ বিদ্যমান;

৩। এর কৌণিক ত্বরণ শূন্য;

৪। এই গতির কেন্দ্রমুখী ত্বরণ থাকে।

কাজ : কোনো বস্তুকে সুষম বৃত্তীয় গতিতে ঘোরাতে হলে অভিকেন্দ্র বলের প্রয়োজন হয় কেন ব্যাখ্যা কর।

নিউটনের প্রথম গতিসূত্র অনুসারে কোনো বস্তুর ওপর বাহ্যিক বল ক্রিয়া না করলে বস্তুটি স্থির থাকে অথবা সমবেগে গতিশীল থাকে। সুতরাং কোনো বস্তুকে বৃত্তাকার পথে চালানোর জন্য গতির অভিমুখের লম্বদিকে একটি বাহ্যিক বল বস্তুটির ওপর প্রয়োগ করতে হয়। এই বাহ্যিক বল ব্যাসার্ধ বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়াশীল হয়। কেন্দ্রাভিমুখী এই বলটিই হলো অভিকেন্দ্র বল। অতএব, কোনো বস্তুকে সমবৃত্তীয় গতিতে ঘোরানোর জন্য অভিকেন্দ্র বল প্রয়োজন হয়।

অনুধাবনমূলক কাজ : সুষম দ্রুতিতে সরল পথে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে না অথচ বৃত্তাকার পথে সুষম দ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে—ব্যাখ্যা কর।

সুষম বৃত্তীয় গতির সমীকরণ (Equation of uniform circular motion) :

আমরা জানি, সমত্বরণে সরলরেখা বরাবর চলমান বস্তুর গতির সমীকরণগুলো হলো—

$$\text{(i) } v = u + at, \quad \text{(ii) } s = ut + \frac{1}{2}at^2, \quad \text{(iii) } v^2 = u^2 + 2as \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.59)$$

সুতরাং বৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে ওপরের সমীকরণগুলোর প্রতিরূপ একইভাবে প্রতিষ্ঠা করা যায়। এক্ষেত্রে t সময়ে রৈখিক সরণ s এর পরিবর্তে কৌণিক সরণ θ, প্রাথমিক রৈখিক বেগ u-এর পরিবর্তে কৌণিক বেগ ω_0, চূড়ান্ত রৈখিক বেগ v-এর পরিবর্তে চূড়ান্ত কৌণিক বেগ ω এবং রৈখিক ত্বরণ 'a'-এর পরিবর্তে কৌণিক ত্বরণ α ধরা হয়। সুতরাং সুষম বৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে প্রতিরূপ সমীকরণগুলো হলো :

$$\text{(i) } \omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \text{(ii) } \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \quad \text{(iii) } \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad (3.60)$$

গাণিতিক উদাহরণ ৩.১২

১। হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে 5.2×10^{-11} m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে 2.2×10^6 ms^{-1} বেগে ঘুরছে। ইলেকট্রনের কেন্দ্রমুখী ত্বরণ নির্ণয় কর।

[BUET Admission Test, 2012-13 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি অভিলম্ব ত্বরণ,

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2.2 \times 10^6)^2}{5.2 \times 10^{-11}}$$

$$= \frac{2.2 \times 2.2 \times 10^{12} \times 10^{11}}{5.2}$$

$$= 9.31 \times 10^{22}\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,

$v = 2.2 \times 10^6\ \text{ms}^{-1}$

$r = 5.2 \times 10^{-11}\text{m}$

$a = ?$

২। বৃত্তাকার পথে 90 kmh^{-1} সমদ্রুতিতে চলমান কোনো গাড়ির কেন্দ্রমুখী ত্বরণ 5 ms^{-2} হলে বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত?

[ঢা. বো. ২০১২ (মান ভিন্ন); জাবি ২০১৬–১৭ (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি কেন্দ্রমুখী ত্বরণ,

$$a = \frac{v^2}{r}$$

বা, $r = \frac{v^2}{a} = \frac{(25)^2}{5}$

$$= \frac{25 \times 25}{5} = 125\ \text{m}$$

এখানে,

$v = 90\ \text{kmh}^{-1} = \frac{90 \times 1000}{3600}\ \text{ms}^{-1}$

$= 25\ \text{ms}^{-1}$

$a = 5\ \text{ms}^{-2}$

$r = ?$

৩। 50 g ভরের একটি বস্তুকে 30 cm দীর্ঘ একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে বৃত্তপথে প্রতি সেকেন্ডে 3 বার ঘুরানো হচ্ছে। কেন্দ্রমুখী বল নির্ণয় কর।

[ম. বো. ২০২২ (মান ভিন্ন)]

এখানে,

$\omega = 2\pi n\ \text{rad s}^{-1}$

$= 2\pi \times 3\ \text{rad s}^{-1}$

$= 6\pi\ \text{rad s}^{-1}$

আবার কেন্দ্রমুখী ত্বরণ,

$$a = \omega^2 r = (6\pi)^2 \times 0.3 = (6 \times 3.14)^2 \times 0.3$$

$$= 106.5\ \text{ms}^{-2}$$

আবার কেন্দ্রমুখী বল,

$$F = ma = m\omega^2 = 0.05 \times 0.065 = 5.32\ \text{N}$$

এখানে,

r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 30\ \text{cm} = 0.3\ \text{m}$

$m = 50\ \text{g} = 0.05\ \text{kg}$

$n = 3$

৪। কোনো বৈদ্যুতিক পাখার সুইচ অন করলে 10 বার পূর্ণ ঘূর্ণনের পর পাখাটির কৌণিক বেগ 20 rad/sec হয়। কৌণিক ত্বরণ কত ?

[Admission Test : CUET 2009-10; RUET 2004-05]

আমরা জানি,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

বা, $(20)^2 = 0 + 2\alpha \times 10 \times 2\pi \qquad [\because \theta = 2\pi n,\ n = 10]$

$$\therefore \alpha = \frac{10}{\pi}\ \text{rad/s}^2$$

এখানে,

$n = 10$

$\omega = 20\ \text{rad s}^{-1}$

উত্তর : কৌণিক ত্বরণ $\frac{10}{\pi}$ rad/s^2

৫। একটি চাকা 2.0 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 100 বার আবর্তন করছে। এর রৈখিক বেগ কত?

আমরা জানি,

$$v = \omega r$$

আবার,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi \times 100}{60} = 10.47$$

$$\therefore v = 10.47 \times 2.0 = 20.94\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,

$r = 2.0\ \text{m}$

N = 100 বার

$t = 60\ \text{s}$

$v = ?$

৬। একটি দেওয়াল ঘড়ির মিনিটের কাঁটার দৈর্ঘ্য 18 cm হলে এর কৌণিক বেগ এবং প্রান্তের রৈখিক বেগ নির্ণয় কর। [BUTex Admission Test, 2016-17]

এখানে,

$T = 1 \text{ hr} = 3600 \text{ s}$

$r = 18 \text{ cm} = 0{\cdot}18 \text{ m}$

$\omega = ?$

$v = ?$

আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3600} = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{3600} = 1{\cdot}74 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$$

আবার,

$$v = \omega r = 1{\cdot}74 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}18 = 3{\cdot}13 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$$

৭। একটি চাকা মিনিটে 500 বার ঘুরে। সুইচ বন্ধ করার 2 min পর চাকাটি বন্ধ হয়ে গেল। চাকাটির মন্দন কত ? থেমে যাওয়ার আগে চাকাটি কতবার ঘুরবে ? [CUET Admission Test, 2003-04]

এখানে,

$\omega_0 = 500 \text{ rev/min} = \dfrac{500 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 16{\cdot}67\,\pi \text{ rad s}^{-1}$

$\omega_f = 0$

$t = 2 \text{ min.} = 2 \times 60 = 120 \text{ s}$

আমরা জানি,

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

বা, $0 = 16{\cdot}67\,\pi + \alpha \times 120$

বা, $\alpha = -\,0{\cdot}4336 \text{ rad s}^{-1}$

আবার,

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right) t$$

বা, $\theta - \theta_0 = \dfrac{16{\cdot}67\,\pi + 0}{2} \times 120 = 1000\,\pi \text{ radian}$

$$= \frac{1000\,\pi}{2\,\pi} = 500 \text{ rev}$$

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$s = v \times t$ ... ... (1)

$v = v_0 + at$ ... ... (2)

$v = v_0 - at$ ... ... (3)

$a = \dfrac{dv}{dt}$ ... ... (4)

$s = v_0 t + \dfrac{1}{2} at^2$ ... ... (5)

$x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} at^2$ ... ... (6)

$v^2 = v_0^2 \pm 2as$ ... ... (7)

$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x (x - x_0)$ ... ... (8)

$s_t = v_0 + \dfrac{1}{2} a (2t - 1)$ ... ... (9)

$y = ax - bx^2$ ... ... (10)

$H = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$ ... ... (11)

$T = \dfrac{2v_0 \sin^2 \theta}{g}$ ... ... (12)

$R = \dfrac{v_0^2}{g} \sin^2 \theta$ ... ... (13)

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (14)$$

$$R = \sqrt{\frac{2hu^2}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (15)$$

$$x^2 = 4A_y \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (16)$$

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \text{ধ্রুবক} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (17)$$

$$\frac{h_1}{t_1^2} = \frac{h_2}{t_1^2} = \text{ধ্রুবক} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (18)$$

নিম্নমুখী গতি

$$v = v_0 + gt \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (19)$$

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (20)$$

$$v_0^2 = v_0^2 + 2gh \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (21)$$

$$v = gt \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (22)$$

$$h = \frac{1}{2} gt^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (23)$$

$$v^2 = 2gh \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (24)$$

ঊর্ধ্বমুখী গতি

$$v = v_0 - gt \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (25)$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (26)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (27)$$

সর্বাধিক উচ্চতা

$$v = \sqrt{2gH} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (28)$$

কেন্দ্রমুখী ত্বরণ

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (29)$$

কেন্দ্রমুখী বেগ

$$v = r\omega \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (30)$$

কেন্দ্রমুখী বল

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (31)$$

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (32)$$

সুষম বৃত্তীয় গতির সমীকরণ

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (33)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (34)$$

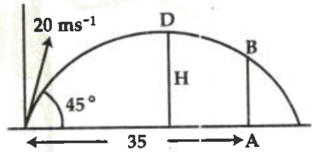
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (35)$$

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{t} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (36)$$

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2}\right) t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (37)$$

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। বাংলাদেশ জিম্বাবুয়ের মধ্যকার টেস্টে সাকিব একটি বলকে ব্যাটের সাহায্যে আঘাত করায় বলটি 45° কোণে এবং 20 ms^{-1} বেগে বোলারের উপর দিয়ে মাঠের বাইরে যেতে শুরু করে। মধ্য মাঠ থেকে একজন ফিল্ডার দৌড়াতে শুরু করল। ফিল্ডারটি বলের লাইনে পৌছানোর আগেই সেটি ছক্কাতে পরিণত হলো। মাঠের ভেতর বলটির অতিক্রান্ত দূরত্ব 35 m।



(ক) উদ্দীপকে বলটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে?

(খ) উদ্দীপকের ফিল্ডার উর্ধ্বে লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় বল ধরতে পারে। সে যদি সময়মতো বলের লাইনে পৌছাতে পারত তা হলে ক্যাচ নিতে সমর্থ হতো কী? উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

[মাদরাসা বোর্ড, ২০১৭ (মান ভিন্ন); ঢা. বো. ২০১৫]

(ক) ধরি উদ্দীপকের বলটি সর্বাধিক H উচ্চতায় উঠবে।

আমরা জানি,

$$H = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} = \frac{(20\times \sin 45°)^2}{2g}$$

$$= \frac{400\times 0.5}{2\times 9.8} = 10.2\text{ m}$$

এখানে,
$v_0 = 20\text{ ms}^{-1}$
$\theta = 45°$
$g = 9.8\text{ ms}^{-2}$
$x = 3.5\text{ m}$
$H = ?$

(খ) আমরা জানি, $x = v_0 \cos\theta t$

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta} = \frac{35}{20\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2.47\text{ sec}$$

এখন, $$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 20\times \sin 45° \times 2.47 - \frac{1}{2}\times 9.8\times(2.47)^2$$

$$= 5.03\text{ m}$$

উদ্দীপকে ফিল্ডার উর্ধ্বে লাফ দিয়ে 3 m উচ্চতায় বল ধরতে পারে।

যেহেতু $y = 5.03\text{ m} > 3\text{ m}$, সেহেতু উদ্দীপকের ফিল্ডার সময়মতো বলের লাইনে পৌছাতে পারলেও বলটি ক্যাচ ধরতে সমর্থ হতো না।

২। একজন শিকারী 75 m দূরে অবস্থিত 10 m উঁচু একটি দেওয়ালে বসে থাকা পাখিকে লক্ষ করে একটি বুলেট ছুড়ল। বুলেটটির নিক্ষেপণ কোণ 60° এবং নিক্ষেপণ বেগ $v_0 = 30\text{ ms}^{-1}$।

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত বুলেটটি কত সময় শূন্যে ছিল তা নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত বুলেটটি পাখিটিকে আঘাত করবে কি না—গাণিতিকভাবে যুক্তিসহকারে বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি,

বিচরণকাল, $$T = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

$$= \frac{2\times 30\times \sin 60°}{9.8}$$

$$= 5.3\text{ s}$$

এখানে,
$x_0 = y_0 = 0$
$v_0 = 30\text{ ms}^{-1}$
$x = 75\text{ m}$
$\theta = 60°$
$y = ?$
দেওয়ালের উচ্চতা, $h = 10\text{ m}$

(খ) আমরা জানি,

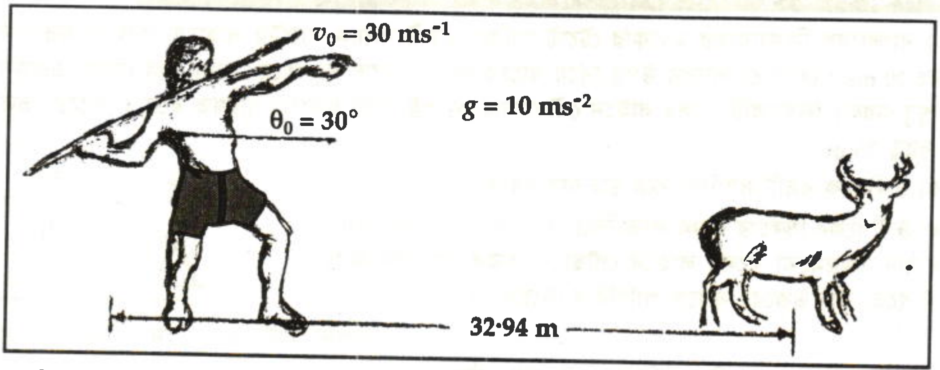
$$y = (\tan\theta)\,x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2$$

$$= \tan 60° \times 75 - \frac{9.8}{2(30\times\cos 60°)^2}\times(75)^2$$

$$= 129.9 - 122.5 = 7.4\text{ m}$$

যেহেতু বুলেটটির উল্লম্ব দূরত্ব $y = 7.4$ m এবং পাখিটির অবস্থান 10 m উচ্চতাবিশিষ্ট দেওয়ালের ওপর তাই বুলেটটি পাখিটিকে আঘাত করবে না।

৩।



শিকারী যখন বর্শাটি নিক্ষেপ করেন হরিণটি তখন স্থিরাবস্থা থেকে 10 ms^{-2} সমত্বরণে PQ বরাবর দৌড়াতে থাকে।

(ক) উদ্দীপকে বর্শাটি এর নিক্ষেপণ বিন্দু হতে সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে?

(খ) বর্শাটি কি হরিণটিকে আঘাত করবে? তোমার উত্তরের সপক্ষে গাণিতিক যুক্তি উপস্থাপন কর।

[চ. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি সর্বাধিক উচ্চতা,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(30)^2 \times (\sin 30°)^2}{2 \times 10} = 11{\cdot}25\ m$$

এখানে,
$v_0 = 30\ ms^{-1}$
$\theta = 30°$
$g = 10\ ms^{-2}$

(খ) বর্শাটির অনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

$$= \frac{(30)^2 (\sin 2 \times 30°)}{10}$$

$$= 77{\cdot}94\ m$$

বর্শাটির উড্ডয়নকাল, $T = \frac{2\,v_0 \sin\theta}{g}$

$$= \frac{2 \times 30 \times \sin 30°}{10} = 3\ sec$$

3 সে. পর শিকারী থেকে হরিণের দূরত্ব,

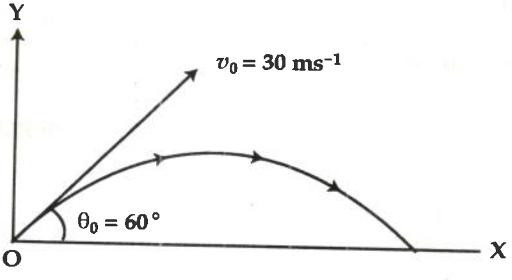
$$s = 32{\cdot}94 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$= 32{\cdot}94 + \frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = 77{\cdot}94\ m$$

এখানে,
$v_0 = 0$

এক্ষেত্রে পাল্লা এবং হরিণ কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব সমান। সুতরাং বর্শাটি হরিণকে আঘাত করবে।

৪।



(ক) প্রাসটির পাল্লা নির্ণয় কর।

(খ) প্রাসটির নিক্ষেপণ বিন্দু থেকে X-অক্ষ বরাবর 20 m দূরে 25 m উঁচু দেয়াল অতিক্রম করতে পারবে কী ?

[BUET Admission Test, 2018-19; য. বো. ২০১৬]

(ক) আমরা জানি প্রাসের পাল্লা,

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(30)^2 \times \sin 120°}{9·8}$$
$$= 79·53 \text{ m}$$

এখানে,
$v_0 = 30 \text{ ms}^{-1}$
$\theta = 60°$
$g = 9·8 \text{ ms}^{-2}$

(খ) 20 m দূরে প্রাসটির উল্লম্ব দূরত্ব যদি দেয়ালের উচ্চতা 25 m-এর বেশি হয় তা হলে দেয়ালটি অতিক্রম করতে পারবে, কম হলে পারবে না।

আমরা জানি প্রাসের উল্লম্ব দূরত্ব,

$$y = \tan\theta_0 \, x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$$

এখানে,
$x = 20 \text{ m}$
$u = 25 \text{ m}$

$$y = \tan 60° \times 20 - \frac{9·8 \times (20)^2}{2(30 \times \cos 60°)^2} = 25·93 \text{ m}$$

যেহেতু উল্লম্ব দূরত্ব দেয়ালের উচ্চতার চেয়ে বেশি, সুতরাং প্রাসটি অতিক্রম করতে পারবে।

৫। গোলরক্ষকের 80 m সামনে থেকে একজন ফুটবল খেলোয়াড় অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 25 ms⁻¹ বেগে বল কিক করেন। একই সময়ে গোলকিপার বলটি ধরার জন্য বলের দিকে 10 ms⁻¹ সমবেগে দৌড়ে যান। [$g = 9·8 \text{ ms}^{-2}$]

(ক) কিক করার 0·5 s পরে বলের বেগ কত ?

(খ) বলটি ভূমিতে পড়ার আগে গোলকিপার বলটি ধরতে পারবেন কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [রা. বো. ২০১৫; BUET Admission Test, 2018-19 (values diff.)]

(ক) মনে করি, যে বিন্দু থেকে ফুটবলটি কিক করা হয় সেটি মূল বিন্দু এবং খাড়া ওপরের দিক Y-অক্ষ ধনাত্মক।

শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

আদিবেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_{x0} ও v_{y0} হলে,

$$v_x = v_{x0} + a_x t$$
$$= v_0 \cos\theta_0 + a_x t$$
$$= 25 \times \cos 30° + 0$$
$$= 21·65 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
$v_0 = 20 \text{ ms}^{-1}$
$\theta = 30°$
$g = 9·8 \text{ ms}^{-2}$
$t = 0·5 \text{ s}$
$v = 10 \text{ ms}^{-1}$

এবং

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \sin\theta_0 + a_y t$$
$$= 25 \times \sin 30° - 9·8 \times 0·5$$
$$= 7·6 \text{ ms}^{-1}$$

(খ) বলটি যে সময় শূন্যে থাকবে অর্থাৎ বলের উড্ডয়নকাল,

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$$
$$= \frac{2 \times 25 \times \sin 30°}{9·8} = 2·55 \text{ sec}$$

এ সময় গোলরক্ষক কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s = vt = 10 \times 2·55 = 25·5 \text{ m}$$

বলটির অনুভূমিক পাল্লা,

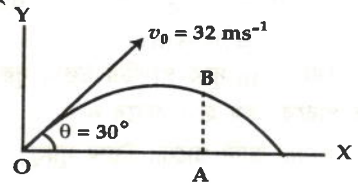
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$
$$= \frac{(25)^2 \times \sin 60°}{9·8}$$
$$= 55·23 \text{ m}$$

অর্থাৎ মাটি স্পর্শ করার পূর্বে গোলকিপার যদি বলের দিকে কমপক্ষে (80 — 55·23) m = 24·77 m দূরত্ব অতিক্রম করতে পারেন তা হলে তিনি বলটি ধরতে পারবেন। যেহেতু গোলকিপার বল মাটি স্পর্শ করার পূর্বে 25·5 m দূরত্ব অতিক্রম করতে সক্ষম, কাজেই তিনি বলটি ধরতে পারবেন।

৬। দুই বন্ধু সুমন ও রানা দেখল যে, ভূপৃষ্ঠস্থ O বিন্দু হতে একটি বস্তুকে $32\ ms^{-1}$ বেগে $30°$ কোণে নিক্ষেপ করায় 85 m দূরে অবস্থিত 2 m উঁচু AB দেওয়ালের ওপর দিয়ে বস্তুটি ভূপৃষ্ঠে পতিত হয়।

(ক) O বিন্দু হতে নিক্ষেপণের 1·2 s পর নিক্ষিপ্ত বস্তুটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপক অনুসারে নিক্ষেপণ কোণের সর্বনিম্ন কী পরিবর্তন করলে প্রাসটি AB দেওয়ালে বাধা পাবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।



[ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) 1·2 s পর বস্তুর বেগ $\vec{v}$ হলে, আমরা জানি বেগের অনুভূমিক উপাংশ,

$$v_x = v_0 \cos\theta = 32 \times \cos 30°$$
$$= 32 \times 0{\cdot}866 = 27{\cdot}71\ ms^{-1}$$

এবং উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$
$$= 32 \times \sin 30° - 9{\cdot}8 \times 1{\cdot}2$$
$$= 32 \times 0{\cdot}5 - 9{\cdot}8 \times 1{\cdot}2 = 4{\cdot}24\ ms^{-1}$$

এখানে,
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 30°$
আদিবেগ, $v_0 = 32\ ms^{-1}$
সময়, $t = 1{\cdot}2$ sec

∴ বেগের মান $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$$= \sqrt{(27{\cdot}71)^2 + (4{\cdot}24)^2}$$
$$= 28{\cdot}03\ ms^{-1}$$

ধরি বেগের দিক অনুভূমিকের সাথে θ কোণ করে

$$\therefore \tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4{\cdot}24}{27{\cdot}71}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{4{\cdot}24}{27{\cdot}71} = 8{\cdot}698°$$

(খ) মনে করি বস্তুটিকে θ কোণে নিক্ষেপ করলে বস্তুটি ঠিক AB দেওয়ালের ওপর দিয়ে চলে যায়।

উদ্দীপক হতে পাই,
নিক্ষেপণ বেগ, $v_0 = 32\ ms^{-1}$
নিক্ষেপণ কোণ, $\theta = 30°$
AB দেওয়ালের দূরত্ব, $x = 85$ m
AB দেওয়ালের উচ্চতা, $y = 2$ m

আমরা জানি,

$$y = (\tan\theta)x - \frac{gx^2}{(2v_0 \cos\theta)^2}$$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - \dfrac{9{\cdot}8 \times (85)^2}{2 \times (32\cos\theta)^2}$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - \dfrac{34{\cdot}573}{\cos^2\theta}$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - (34{\cdot}573) \times \sec^2\theta$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - 34{\cdot}573\ (1 + \tan^2\theta)$

বা, $2 = \tan\theta \times 85 - 34{\cdot}573 - 34{\cdot}573 \tan^2\theta$

বা, $34{\cdot}573 \tan^2\theta - 85 \tan\theta + 36{\cdot}573 = 0$

বা, $\tan\theta = \dfrac{-(-85) \pm \sqrt{(-85)^2 - 4 \times 34{\cdot}573 \times 36{\cdot}573}}{2 \times 34{\cdot}573}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{85 \pm 46{\cdot}55}{69{\cdot}146}$

বা, $\tan\theta = 1{\cdot}90$ অথবা $\tan\theta = 0{\cdot}556$

∴ $\theta = 62{\cdot}24°$ অথবা $\theta = 29{\cdot}07°$

অতএব নিক্ষেপণ কোণ সর্বনিম্ন $(30° - 29{\cdot}07°) = 0{\cdot}93°$ কমালে প্রাসটি AB দেওয়ালে বাধা পাবে।

৭। ক্রিকেট খেলার মাঠে রিপন ব্যাট দিয়ে বলকে আঘাত করায় বলটি $30\ ms^{-1}$ বেগ প্রাপ্ত হয় এবং সর্বোচ্চ অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করে। সঙ্গে সঙ্গে একজন ফিল্ডার ক্যাচ ধরার জন্য $10\ ms^{-1}$ বেগে দৌড় শুরু করে এবং $40\ m$ অতিক্রম করে। [$g = 9.8\ ms^{-2}$]

(ক) 2 s পর বলটির বেগ কত ?

(খ) বলটি মাটিতে পড়ার আগে ফিল্ডার ক্যাচ ধরতে পেরেছে কি না ? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০১৯; রা. বো. ২০১৫ (মান ভিন্ন)]

(ক) আমরা জানি,

প্রাসের তাৎক্ষণিক বেগ,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{(v_0 \sin\theta - gt)^2 + (v_0 \cos\theta)^2}$$

2 sec পর বলটির বেগ,

$$v = \sqrt{(30 \sin 45° - 9.8 \times 2)^2 + (30 \cos 45°)^2}$$

$$= \sqrt{2.60243 + 450} = \sqrt{452.60243}$$

$$= 21.27\ ms^{-1}$$

এখানে,
$v_0 = 30\ ms^{-1}$
$v = 10\ ms^{-1}$
$s = 40\ m$
$t = 2\ s$
$\theta = 45°$

(খ) বলটির বিচরণ কাল,

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{2 \times 30 \sin 45°}{9.8} = 4.33\ s$$

আবার ফিল্ডারের ক্ষেত্রে,

$$s = vt$$

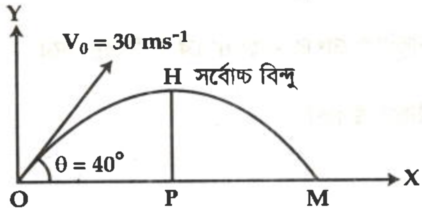
$$\therefore\ t = \frac{s}{v} = \frac{40}{10} = 4\ s$$

অর্থাৎ $T > t$, কাজেই বলটি মাটিতে পড়ার পূর্বেই ফিল্ডার উক্ত স্থানে পৌঁছে যাবে এবং ক্যাচ ধরতে পারবে।

৮। ভূমি থেকে v_0 গতিতে একটি বস্তু θ_0 কোণে নিক্ষেপ করা হলো। ভূমি থেকে বস্তুটির সর্বোচ্চ উচ্চতা HP।

(ক) নিক্ষিপ্ত বস্তুটি কত বেগে M বিন্দুতে পতিত হবে, গাণিতিকভাবে বের কর।

(খ) OP > PH কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও। [য. বো. ২০১৯]



এখানে,
$v_0 = 30\ ms^{-1}$
$\theta = 40°$
$v = ?$

(ক) বস্তুটি ভূমিতে আঘাত করার মুহূর্তে এর উল্লম্ব বেগ v হলে,

$$v_y = v_{y0} + gt,\ v_{y0} = v_0 \sin 40° = 19.28\ ms^{-1}$$

যেহেতু বস্তুটির গতি নিম্নমুখী সুতরাং, $v_{y0} = -19.28\ ms^{-1}$ এবং অনুভূমিক বেগ,

$$v_x = v_{x0} = 30 \cos 40° = 22.98\ ms^{-1}$$

সুতরাং বস্তুটির লব্ধি বেগ, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.98)^2 + (19.28)^2}$

$$= \sqrt{528 + 371.7} = 30\ ms^{-1}$$

(খ) পাল্লা, $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta = \frac{30 \times 30}{9.8} \times \sin 80° = 90.44\ m$

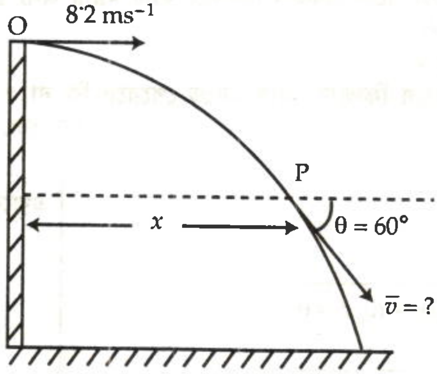
এখন, $OP + PM = R$

$$\therefore\ OP = \frac{R}{2}\ \ \therefore\ OP = \frac{90.44}{2} = 45.22\ m$$

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $PH = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{900 \times 0.413}{2 \times 9.8} = 18.97\ m$

সুতরাং, $OP > PH$

১।



চিত্রে একটি বিল্ডিং-এর ওপর হতে অনুভূমিকভাবে একটি বলকে ছুড়ে দেয়া হলো। করিম বলটির গতিপথের দিকে তাকিয়ে ধারণা করল যে, 2 sec পরে θ-এর মান 62° হলে বলটি কর্তৃক অতিক্রান্ত উল্লম্ব দূরত্ব বিল্ডিং হতে বলটির অনুভূমিক দূরত্বের সমান হবে।

(ক) P বিন্দুতে বলটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) করিমের ধারণা কী সঠিক ছিল ? গাণিতিক যুক্তির সাহায্যে যাচাই কর। [অভিন্ন 'খ' সেট ২০১৮]

(ক) ধরি, P বিন্দুতে বলটির বেগের মান v

তা হলে v-এর অনুভূমিক উপাংশ,

$$v_x = v\cos\theta = u\cos\alpha$$

এখানে, $\theta = 60°$, $\alpha = 0°$ (অনুভূমিকের সাথে নিক্ষিপ্ত বলের কোণ α), $u = 8.2\ \text{ms}^{-1}$

$\therefore$ $v\cos\theta = u\cos\alpha$ হতে পাই,

$$v\cos 60° = 8.2\cos 0°$$

বা, $v = 16.4\ \text{ms}^{-1}$

$\therefore$ P বিন্দুতে বলটির বেগ, $v = 16.4\ \text{ms}^{-1}$

(খ) ধরি, 2s পর বলটির বেগ হবে v এবং তা অনুভূমিক রেখার সাথে θ' কোণ উৎপন্ন করে।

এখন v-এর অনুভূমিক উপাংশ,

$v_x = v\cos\theta' = u\cos\alpha = u$ এবং v-এর উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_y = v\sin\theta' = u\sin\alpha = 0$$

তা হলে অনুভূমিক সরণ,

$$x = v_x t = v\cos\theta' t$$

এবং উল্লম্ব সরণ,

$$y = v_y t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

শর্তানুযায়ী, $x = y$ এবং $t = 2\text{s}$

$$\therefore\quad v\cos\theta' t = \frac{1}{2}gt^2$$

বা, $v\cos\theta' \times 2 = \frac{1}{2}\times g\times(2)^2$

বা, $\cos\theta' = \frac{g}{v}$ ... ... (i)

2s পরে বেগ,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(u\cos\alpha)^2 + (u\sin\alpha - gt)^2}$$
$$= \sqrt{(8.2\times\cos 0°)^2 + (8.2\times\sin 0° - 9.8\times 2)^2}$$
$$= 21.25\ \text{ms}^{-1}$$

(i)নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\cos\theta' = \frac{g}{v}$$

বা, $\cos\theta' = \frac{9.8}{21.25}$

বা, $\theta' = \cos^{-1}\frac{9.8}{21.25}$

বা, $\theta' = 62.50°$

করিমের ধারণা অনুযায়ী $\theta = 62°$ কিন্তু গাণিতিকভাবে পাওয়া গেল $62.5°$

সুতরাং করিমের ধারণা সঠিক ছিল না।

১০। একটি ফুটবল প্রশিক্ষণকালে দুজন খেলোয়াড় উভয়ই $10\ ms^{-1}$ বেগে যথাক্রমে $30°$ এবং $60°$ কোণে ফুটবল কিক করলেন। একজন গোলকিপার বল দুটিকে মাটিতে পড়বার ঠিক আগের মুহূর্তে ধরার জন্য দাঁড়িয়েছিলেন।

(ক) ১ম খেলোয়াড়ের ক্ষেত্রে 1 sec পরে বলটির বেগের মান কত?

(খ) গোলকিপার স্থান পরিবর্তন না করে ভিন্ন সময়ে বল দুটি ধরতে সক্ষম হবে—এর সত্যতা গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [কু. বো. ২০১৭]

(ক) ১ম খেলোয়াড়ের ক্ষেত্রে,

1 sec পরে ফুটবলের প্রাপ্ত বেগ v হলে, v-এর অনুভূমিক উপাংশ,

$$v_x = u\cos\alpha = 10\cos 30° = 10\times 0.866 = 8.66\ ms^{-1}$$

এখানে, $u = 10\ ms^{-1}$, $\alpha = 30°$

v-এর উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_y = u\sin\alpha - gt = 10\sin 30 - 9.8\times 1 = 5 - 9.8 = -4.8\ ms^{-1}$$

$$\therefore\ v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{(8.66)^2 + (-4.8)^2} = \sqrt{73+23} = 9.90\ ms^{-1}$$

উত্তর : $9.90\ ms^{-1}$

(খ) আমরা জানি, একই আদি বেগ ও পরস্পর পূরক কোণের জন্য দুটি বিচরণ পথ আছে যাদের পাল্লা একই। পথ দুটির বিচরণকাল T_1 এবং T_2 হলে,

$$T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$$

যখন $\alpha = 30°$, $u = 10\ ms^{-1}$ তখন, $T_1 = \frac{2\times 10\times\frac{1}{2}}{9.8} = 1.02\ s$

যখন $\alpha = 60°$, $u = 10\ ms^{-1}$ তখন, $T_2 = \frac{2\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{9.8} = 1.77\ sec.$

ধরি, গোলকিপার নিক্ষেপণ বিন্দু হতে অনুভূমিকভাবে x দূরত্বে আছে।

তা হলে,

$$x = u\cos\alpha t = 10\cos 30°\times 1.02 = 8.83\ m$$

এখানে, $u = 10\ ms^{-1}$, $\alpha = 30°$, $t = T_1 = 1.02\ s$

আবার ধরি, গোলকিপার নিক্ষেপণ বিন্দু হতে অনুভূমিকভাবে x' দূরত্বে আছে।

তা হলে,

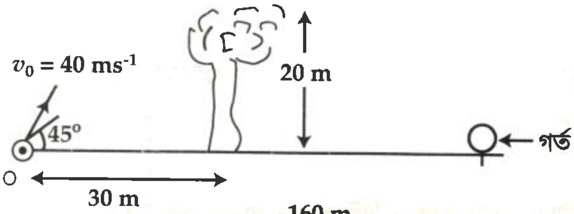
$$x' = u\cos\alpha t = 10\cos 60°\times 1.77 = 8.85\ m$$

এখানে, $u = 10\ ms^{-1}$, $\alpha = 60°$, $t = T_2 = 1.77\ s$

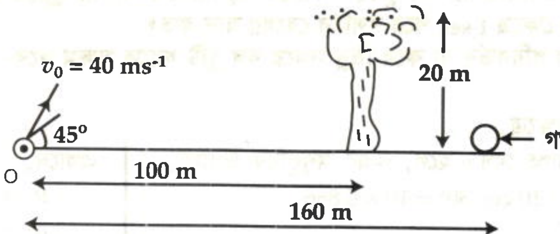
যেহেতু 8.83 এবং 8.85 খুবই নিকটবর্তী দূরত্ব, ফলে $x = x'$

সুতরাং গোলকিপার স্থান পরিবর্তন না করে ভিন্ন সময়ে বল দুটি ধরতে সক্ষম হবে।

১১। একজন গলফ খেলোয়ার চিত্র (i) ও চিত্র (ii) পরিস্থিতিতে বল গর্তে ফেলার জন্য O বিন্দু থেকে বলকে আঘাত করে।



চিত্র (i)



চিত্র (ii)

(ক) 2 সেকেন্ড পর বলের বেগ কত?

(খ) উদ্দীপকের কোন চিত্রের বলটি গর্তে পড়বে—গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মন্তব্য কর। [য. বো. ২০১৭]

(ক) কু. বোর্ড ২০১৭-এর অনুরূপ

$$v = \sqrt{(20\sqrt{2})^2 + (20\sqrt{2} - 9{\cdot}8 \times 2)^2}$$
$$= 29{\cdot}6 \text{ ms}^{-1}$$

(খ) ১নং চিত্রে : গাছে বাধা পাবে কি না—তা যাচাইকরণ।

আমরা জানি,

$$y = x \tan \alpha \left(1 - \frac{x}{R}\right) \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এখানে,

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$
$$= \frac{u^2}{g} = \frac{(40)^2}{9{\cdot}8} = 163{\cdot}27 \text{ m}$$

এখানে,
$v = 40$ ms^{-1}
$\alpha = 45°$
$x = 30$ m

(i)নং সমীকরণ হতে পাই,

$$y = 30 \tan 45° \left(1 - \frac{30}{163{\cdot}27}\right)$$
$$= 24{\cdot}5 \text{ m} > 20 \text{ m}$$

সুতরাং নিক্ষেপণ বিন্দু হতে 30 m দূরে 24·5 m উঁচু দিয়ে বলটি গিয়ে 163·27 m দূরে ভূমিতে আঘাত করবে।

২নং চিত্রে, একই সমীকরণ (i)-এ প্রয়োগ করে পাই,

$$y = 100 \tan 45° \left(1 - \frac{100}{163{\cdot}27}\right)$$
$$= 38{\cdot}75 \text{ m} > 20 \text{ m}$$

ফলে বলটি গাছ দ্বারা বাধাপ্রাপ্ত হবে না এবং বলটি উভয় ক্ষেত্রে 163·27 m অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করবে।

যেহেতু নিক্ষেপণ বিন্দু হতে গর্তের দূরত্ব 160 m যা অনুভূমিক দূরত্ব অপেক্ষা কম। ফলে বল দুটি গর্ত ছেড়ে 3·27 m সামনে পড়বে।

অর্থাৎ, কোনো চিত্রে বল গর্তে পড়বে না।

১২। একজন ফুটবল খেলোয়াড় গোলপোস্টের 25m সামনে হতে ভূমির সাথে 20° কোণে এবং 20 ms^{-1} বেগে ফুটবলকে কিক করে। গোলপোস্টের উচ্চতা 2m।

(ক) 1 sec পর বলটির বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উক্ত বল হতে গোল হওয়ার সম্ভাবনা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর। [দি. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি প্রাসের তাৎক্ষণিক বেগ,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(u\cos\alpha)^2 + (u\sin\alpha - gt)^2}$$
$$= \sqrt{(20\cos 20°)^2 - (20\sin 20° - 9.8 \times 1)^2}$$
$$= 19 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
অনুভূমিক দূরত্ব, $x = 25$ m
নিক্ষেপণ কোণ, $\alpha = 20°$
$u = 20$ ms^{-1}
v এর অনুভূমিক উপাংশ
$v_x = u\cos\alpha$ এবং উল্লম্ব উপাংশ $v_y = u\sin\alpha - gt$

(খ) আমরা জানি,

$$y = x\tan\alpha\left(1 - \frac{x}{R}\right) \quad \ldots (i)$$

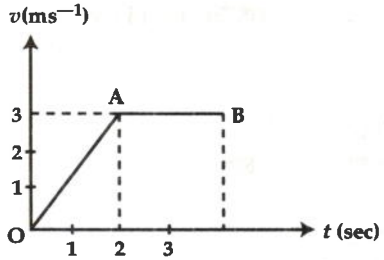
এবং
$$R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{(20)^2\sin 40°}{9.8} = 26.24 \text{ m}$$

তা হলে, (i)নং সমীকরণ হতে,

$$y = 25\tan 20°\left(1 - \frac{25}{26.24}\right) = 0.42 \text{ m}$$

গোলপোস্টের উচ্চতা 2 m যা $y = 0.42$ m হতে বেশি। সুতরাং গোল হওয়ার সম্ভাবনা রয়েছে।

১৩। নিচে বেগ বনাম সময়ের লেখচিত্র দেখানো হলো—



(ক) উদ্দীপক অনুসারে বস্তুটির OA অংশের ত্বরণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের লেখচিত্র অনুসারে বস্তুটির OA এবং AB অংশের দূরত্ব এক না ভিন্ন গাণিতিকভাবে যাচাই কর। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) গ্রাফ হতে,

$t_0 = 0 \qquad v_0 = 0$
$t = 2$s $\qquad v = 3$ ms^{-1}

তা হলে ত্বরণ,

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = 1.5 \text{ ms}^{-2}$$

(খ) OA অংশের দূরত্ব,

$$s_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 1.5 \times 2^2 = 3 \text{ m}$$

AB অংশের দূরত্ব,

$$s_2 = vt = 3 \times (4 - 2) = 6 \text{ m}$$

$\therefore \quad s_1 \neq s_2$. সুতরাং OA এবং AB অংশদ্বয়ের দূরত্ব ভিন্ন।

১৪। দুটি গাড়ি A ও B যথাক্রমে $v_A = 0$ এবং $v_B = 22.5\ ms^{-1}$ বেগে যাত্রা শুরু করে ১ম 15 sec যথাক্রমে $a_A = 1\ ms^{-2}$ এবং $a_B = -1\ ms^{-2}$ ত্বরণে চলে। পরবর্তীকালে গাড়ি দুটি আরও 15 sec সমবেগে চলমান ছিল।

(ক) যাত্রা শুরুর কত সময় পর গাড়ি দুটির বেগ সমান হবে?

(খ) কোন গাড়িটি অধিকতর দূরত্ব অতিক্রম করবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মন্তব্য কর। [সি. বো. ২০১৭]

এখানে,

A গাড়ির জন্য	**B গাড়ির জন্য**
$v_A = 0$	$v_B = 22.5\ ms^{-1}$
$a_A = 1\ ms^{-2}$	$a_B = -1\ ms^{-2}$

(ক) ধরি, A ও B গাড়ি দুটির বেগ t সময় পর v হবে।

তা হলে, A গাড়ির জন্য, $v = v_A + a_A t$

B গাড়ির জন্য, $v = v_B + a_B t$

শর্তানুযায়ী,

$$v_A + a_A t = v_B + a_B t$$

বা, $a_A t - a_B t = v_B - v_A$

বা, $t = \frac{v_B - v_A}{a_A - a_B} = \frac{22.5 - 0}{1 - (-1)} = 11.25\ s$

$\therefore$ 11.25 sec পর গাড়ি দুটির বেগ সমান হবে।

(খ) আমরা জানি,

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = u + at$$

A গাড়ির জন্য,

$$s'_A = v_A t + \frac{1}{2}a_A t^2$$

$$= 0 \times 15 + \frac{1}{2} \times 1 \times (15)^2 \quad [\text{এখানে, } t = 15\ sec]$$

$$= 112.5\ m$$

15 sec পর বেগ v_d হলে,

$$v_d = 0 + 1 \times 15 = 15\ ms^{-1}$$

A গাড়ি $v_d = 15\ ms^{-1}$ সমবেগে আরও 15 s চলে।

এক্ষেত্রে অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s''_A = v_d t = 15 \times 15 = 225\ m$$

$\therefore$ A গাড়ি কর্তৃক মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s_A = s'_A + s''_A = 112.5 + 225 = 337.5\ m$$

B গাড়ির জন্য,

$$s'_B = v_B t + \frac{1}{2}a_B t^2$$

$$= 22.5 \times 15 + \frac{1}{2} \times (-1) \times 15^2 = 225\ m$$

15 sec পর বেগ v হলে,

$$v = v_B + at = 22.5 + (-1) \times 15 = 7.5\ ms^{-1}$$

পরবর্তী 15 sec B গাড়িটি $7.5\ ms^{-1}$ সমবেগে চলছে।

সুতরাং অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s''_B = vt = 7.5 \times 15 = 112.5\ m$$

$\therefore$ B গাড়ি কর্তৃক মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s_B = s'_B + s''_B = 112.5 + 225 = 337.5\ m$$

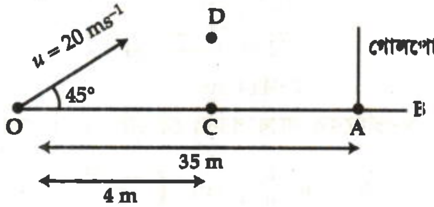
যেহেতু $s_A = s_B$

সুতরাং A ও B উভয় গাড়ি একই দূরত্ব অতিক্রম করেছে।

১৫। ফিফা ফুটবল ওয়ার্ল্ড কাপ কোয়ালিফায়িং ম্যাচে বাংলাদেশ-তাজিকিস্তানের মধ্যকার খেলায় বাংলাদেশ টিমের 'জাহিদ হাসান এমিলি' তাজিকিস্তানের গোলপোস্টের 35 m সামনে থেকে বলে কিক করলেন। বলটি ভূমির সাথে 45° কোণে 20 ms⁻¹ বেগে গোল পোস্টের দিকে উড়ে গেল। কিকের অবস্থান হতে 4 m দূরে তাজিকিস্তানের 2 জন খেলোয়াড় বলটিকে প্রতিরোধ করার জন্য দাঁড়িয়েছিল। গোলরক্ষক গোলপোস্টের যে প্রান্তে দাঁড়িয়েছিল বলটি তার বিপরীত প্রান্ত দিয়ে পোস্টের দিকে ধেয়ে গেল। গোলপোস্টের উচ্চতা 2·4 m।

(ক) প্রতিরোধকারী খেলোয়াড়ের মাথার উপরে উড়ন্ত বলটির বেগ কত? নির্ণয় কর।

(খ) এমিলির কিক হতে গোল হবে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণ কর। [দি. বো. ২০১৬]



(ক) উদ্দীপক অনুযায়ী চিত্রে এমিলির অবস্থান O বিন্দু। গোলপোস্টের অবস্থান AB। তাজাকিস্তানের অপর দুজন খেলোয়াড়ের অবস্থান C ও D। গোলকিপারের অবস্থান B।

ধরি, C, D বিন্দুতে দাঁড়িয়ে থাকা খেলোয়াড় দ্বয়ের ওপর দিয়ে বল যেতে t সময় নেয়।

তা হলে, $OC = u\cos\alpha t$

বা, $4 = 20\cos 45° \times t$

বা, $t = 0·283$ sec.

এখানে,
কিকের বেগ, $v = 20\ ms^{-1}$
$\alpha = 45°$
$OC = 4\ m$

t সময় পরে বেগ v হলে v-এর অনুভূমিক উপাংশ,

$$v_x = u\cos\alpha = 20\cos 45° = 14·14\ ms^{-1}$$

v-এর উল্লম্ব উপাংশ,

$$v_y = u\sin\alpha - gt = 20\sin 45° - 9·8 \times 0·283$$
$$= 11·37\ ms^{-1}$$

নির্ণেয় বেগ,

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$
$$= \sqrt{(14·14)^2 + (11·37)^2}$$
$$= 18·14\ ms^{-1}$$

(খ) ধরি, OA = 35 m দূরত্ব অতিক্রম করতে t সময় লাগে এবং একই সময়ে বলটির উল্লম্ব সরণ হয় y

তা হলে, $OA = u\cos\alpha t$

বা, $35 = 20\cos 45°\ t$

$\therefore\ t = 2·48$ sec.

আবার $t = 2·48$ sec সময় পরে উল্লম্ব সরণ,

$$y = u\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= 20\sin 45° \times 2·48 - \frac{1}{2} \times 9·8 \times (2·48)^2$$
$$= 4·86\ m > 2·4\ m$$

গোলপোস্টের উচ্চতা 2·4 m ফলে এমিলির কিক করা বলটি গোলপোস্টের বারের ওপর দিয়ে চলে যাবে। সুতরাং গোল হবে না।

১৬। বিজ্ঞান মেলাকে আকর্ষণীয় করার জন্য প্রবেশ পথের দুপাশে পানির ফোয়ারা স্থাপন করা হলো। তাদের মধ্যে একটির পানির ফোঁটাগুলো 5 ms⁻¹ বেগে এবং 60° কোণে ছড়িয়ে পড়ছে। অপর ফোয়ারার পানির ফোঁটাগুলো 6 ms⁻¹ বেগে এবং 30° কোণে ছড়িয়ে পড়ছে।

(ক) 0·6 sec সময়ে ১ম ফোয়ারার পানির ফোঁটার বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের কোন ফোয়ারার পানির ফোঁটাগুলো বেশি অঞ্চল জুড়ে ছড়িয়ে পড়বে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০১৯]

(ক) প্রথম ফোঁটার ক্ষেত্রে,

$v_0 = 5\ ms^{-1}$, $\theta_0 = 60°$

6 sec পর বেগ,

$v_x = v_0 \cos\theta_0 = 5 \times \cos 60° = 2.5\ ms^{-1}$

আবার, $v_y = v_0 \sin\theta_0 — gt$

$= 5 \times \sin 60° — 9.8 \times 0.6$

$= — 1.5498\ ms^{-1}$

আমরা জানি,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$= \sqrt{(2.5)^2 + (—1.5498)^2}$

$= 2.9414\ ms^{-1}$

অনুভূমিকের সাথে পানির ফোঁটার বেগ θ কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-1.55}{2.5}\right) = —31.8°$$

অর্থাৎ উক্ত মুহূর্তে ১ম ফোয়ারার পানির ফোঁটা অনুভূমিকের সাথে 31.8° কোণে নিচের দিকে $2.94\ ms^{-1}$ বেগে গতিশীল।

(খ) এখানে, প্রথম ফোয়ারার পানির ফোঁটার নিক্ষেপন বেগ, $v_{0_1} = 5\ ms^{-1}$

নিক্ষেপন কোণ, $\theta_{0_1} = 60°$

দ্বিতীয় ফোয়ারার পানির ফোঁটার নিক্ষেণ বেগ, $v_{0_2} = 6\ ms^{-1}$

নিক্ষেপন কোণ, $\theta_{0_2} = 30°$

প্রথম ও দ্বিতীয় ফোয়ারার পানির ফোঁটা যথাক্রমে পাল্লা, R_1 ও R_2 পর্যন্ত অনুভূমিক দুরত্ব অতিক্রম করলে,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{v_{0_1}^2 \sin 2\theta_{0_1}/g}{v_{0_2}^2 \sin 2\theta_{0_2}/g} = \frac{v_{0_1}^2 \sin 2\theta_{0_1}}{v_{0_2}^2 \sin 2\theta_{0_2}}$$

$$= \frac{5^2 \times \sin(2 \times 60°)}{6^2 \times \sin(2 \times 30°)}$$

$$= 0.694$$

$\therefore \frac{R_1}{R_2} < 1$

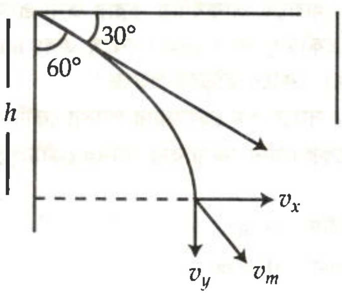
$\therefore R_1 < R_2$

অর্থাৎ দ্বিতীয় ফোয়ারার পানির ফোঁটাগুলো প্রথমটি অপেক্ষা বেশি অঞ্চল জুড়ে ছড়িয়ে পড়বে।

১৭। একদিন এক প্রীতি ম্যাচ খেলার সময় প্রিতম ব্যাট নিয়ে আঘাত করায় বলটি পার্শ্ববর্তী একটি উঁচু ভবনের ছাদে পড়ল। ডাক্তারের নিষেধ থাকায় প্রিতম 96 m এর বেশি উঁচুতে উঠতে অস্বীকৃতি জানিয়ে ছাদে বল আনতে গেল না। প্রিতম ছাদে উঠে বলটিকে উলম্বের সাথে 60° কোণে $5\ ms^{-1}$ বেগে নিচে ফেলে দিল। বলটি ছুঁড়ে মারার 3 sec পরে ভূমি থেকে 2 m উঁচুতে প্রিতম বলটি ধরে ফেলল।

(গ) বলটি কত বেগে প্রিতমের হাতে আঘাত করেছিল?

(ঘ) উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে প্রিতম ছাদে উঠতে পারবে কি না? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও। [সি. বো. ২০–১৯]



এখানে,

$t = 3\ sec$

$v_0 = 5\ ms^{-1}$

(ক) $v_x = v_0 \cos\theta$

$= 5 \cos 30° = 4.30\ ms^{-1}$

$v_y = v_0 \sin\theta — gt$

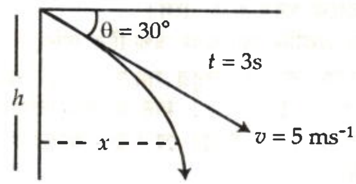
$= 5 \sin 30° — 9.8 \times 3$

$= —31.9\ ms^{-1}$

$v_m = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(4.30)^2 + (—31.9)^2}$

$= 32.20\ ms^{-1}$

(খ)



উদ্দীপক অনুযায়ী,

$$(h-2) = -v \sin\theta \times t + \frac{1}{2}gt^2$$
$$= -5\sin 30° \times 3 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times (3)^2$$
$$= -5 \times \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 9$$

এখানে,
$v = 5 \text{ ms}^{-1}$
$t = 35$

$\therefore \quad h = 38.6 \text{ m}$

$\therefore \quad h < 96$ m, সুতরাং সে উঠতে পারত।

সার-সংক্ষেপ

বস্তু : নির্দিষ্ট আকার ও আয়তনযুক্ত কোনো পদার্থ যা একটি নির্দিষ্ট স্থান দখল করে থাকে, তাকেই বস্তু বলে।

কণা : যে বস্তুর ভর আছে, কিন্তু আয়তন নেই অর্থাৎ যে বস্তুর ভর একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত থাকে তাকে কণা বলে। কণা হলো শূন্য মাত্রিক একটি বস্তু।

দৃঢ় বস্তু : একটি বস্তু অসংখ্য কণা দ্বারা গঠিত। যখন কোনো বস্তু এমন হয় যে ওই বস্তু মধ্যস্থ যেকোনো দুটি কণার মধ্যবর্তী দূরত্ব কোনোভাবেই পরিবর্তন করা যায় না তখন সেই বস্তুকে দৃঢ় বস্তু বলা হয়।

স্থিতি : সময়ের সঙ্গে যদি কোনো বস্তুর অবস্থান পরিবর্তন না হয়, তবে বস্তুটির অবস্থাকে বলা হয় স্থিতি এবং বস্তুটিকে বলা হয় স্থিতি বস্তু।

গতি : সময়ের সঙ্গে যদি কোনো বস্তুর অবস্থান পরিবর্তিত হয় তবে সময়ের সঙ্গে বস্তুটি অবস্থান পরিবর্তনকেই বস্তুটির গতি বলা হয়। বস্তুটিকে গতিশীল বস্তু বলা হয়।

নির্দেশতন্ত্র : কোনো বস্তুর অবস্থান কিংবা গতি ও স্থিতি বর্ণনার জন্য অপর কোনো বস্তু বা বিন্দুর সাহায্য নিতে হয়। এই দ্বিতীয় বস্তুটিকে বলা হয় নির্দেশ বস্তু। নির্দেশ বস্তুর সঙ্গে যুক্ত স্থানাঙ্ক সংস্থাকে বলা হয় নির্দেশতন্ত্র।

মূল বিন্দু বা প্রসঙ্গ বিন্দু : পৃথিবী পৃষ্ঠে বা মহাবিশ্বে কোনো বস্তুর অবস্থান নির্দেশ করার জন্য একটি বিন্দুকে স্থির করতে হয়। ওই বিন্দুকে মূল বিন্দু বা প্রসঙ্গ বিন্দু বলা হয়।

প্রসঙ্গ কাঠামো : যে বস্তুর সাথে তুলনা করে অন্য বস্তুর অবস্থান স্থিতি ও গতি নির্ণয় করা হয় তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো : যে বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান একটি মাত্র স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো : কোনো একটি বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান দুটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হলে উক্ত বস্তুটিকে দ্বিমাত্রিক বস্তু বলে। প্রসঙ্গ বিন্দু এবং অক্ষ দুটি মিলে যে কাঠামো তৈরি হয় তাকে দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো : কোনো একটি বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করলে ওই স্থানাঙ্কসমূহকে ত্রিমাত্রিক কাঠামো বলে। সুতরাং মূল বিন্দু O এবং তিনটি অক্ষ মিলে যে কাঠামো তৈরি হয় তার নাম ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো।

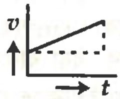
জড় প্রসঙ্গ কাঠামো : যে প্রসঙ্গ কাঠামোর কোন ধরনের ত্বরণ বা মন্দন থাকে না অর্থাৎ যে প্রসঙ্গ কাঠামো স্থির বা সমবেগে সরল রেখায় গতিশীল সেই প্রসঙ্গ কাঠামোকে জড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো : জড় প্রসঙ্গ কাঠামোর সাপেক্ষে ত্বরণ বা মন্দনসহ অসম বেগে গতিশীল প্রসঙ্গ কাঠামোকে অজড় প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

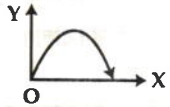
পরম স্থিতি : প্রসঙ্গ বস্তু যদি স্থির হয় তবে তার সাপেক্ষে যে বস্তু স্থিতিশীল রয়েছে সেও প্রকৃত পক্ষে স্থির। ওই ধরনের স্থিতিকে আমরা পরম স্থিতি বলি।

পরম গতি	:	প্রসঙ্গ বস্তুটি যখন পরম স্থিতিতে থাকে তখন তার সাপেক্ষে অন্য কোনো বস্তু গতিশীল থাকলে তাকে পরম গতি বলে।
আপেক্ষিক গতি	:	দুটি চলমান বস্তুর একটির সাপেক্ষে অপরটির গতিকে আপেক্ষিক গতি বলে।
সরণ	:	কোনো নির্দিষ্ট দিকে কোনো বস্তুর সময়ের সাথে অবস্থান পরিবর্তনকে বস্তুটির সরণ বলে। সরণ ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক উভয়ই আছে।
দ্রুতি	:	কোনো গতিশীল বস্তু একক সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ওই বস্তুর দ্রুতি বলে। দ্রুতি স্কেলার রাশি।
গড় দ্রুতি	:	কোনো বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।
তাৎক্ষণিক দ্রুতি	:	সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বলে।
গড়বেগ	:	যেকোনো সময় ব্যবধানে কোনো বস্তুর মোট সরণকে ওই সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকেই বস্তুটির গড়বেগ বলে।
তাৎক্ষণিক বেগ	:	সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা সংক্ষেপে বেগ বলে।
মধ্য বেগ	:	কোনো একটি স্থিতিশীল বস্তুর আদিবেগ ও মোট বেগের অভিমুখ একই হলে তাদের যোগফলের অর্ধেককে মধ্য বেগ বলে।
আপেক্ষিক বেগ	:	দুটি চলমান বস্তুর একটির সাপেক্ষে অপরটির অবস্থানের পরিবর্তনের হারকে আপেক্ষিক বেগ বলে।
সমবেগ	:	কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বলের মান ও দিক ধ্রুব থাকলে ওই বস্তুর বেগও ধ্রুব থাকে। এই ধ্রুব বেগকে সমবেগ বলে।
অসম বেগ	:	যদি ভিন্ন ভিন্ন সময়ে বস্তুর বেগ ভিন্ন ভিন্ন হয় তবে তাকে অসম বেগ বলে।
তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ	:	কোনো একটি গতিশীল বস্তুর সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বেগ পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা সংক্ষেপে ত্বরণ বলে।
সমত্বরণ	:	ত্বরণ যদি সব সময় ধ্রুব হয় তবে তাকে সমত্বরণ বলে।
অসম ত্বরণ	:	সময়ের সাথে যখন সরণ ত্বরণ ভিন্ন ভিন্ন হয় তখন তাকে অসম ত্বরণ বলে।
অবস্থান	:	কোনো বস্তু একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত হলে সেই বিন্দু থেকে বস্তুর দূরত্বকে অবস্থান বলে।
প্রাস	:	ভূপৃষ্ঠ থেকে বা ভূপৃষ্ঠের কাছাকাছি কোনো বিন্দু থেকে যেকোনো দিকে তির্যকভাবে নিক্ষেপ করা হলে তাকে প্রাস বলে।
প্রক্ষেপণ বিন্দু	:	যে বিন্দু দিয়ে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় সেই বিন্দুকেই প্রক্ষেপণ বিন্দু বলে।
প্রক্ষেপণ পথ	:	যে বক্র পথে প্রাসের গতি হয় তাকে প্রাসের প্রক্ষেপণ পথ বলে।
প্রক্ষেপণ বেগ	:	যে প্রারম্ভিক বেগে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় সেই বেগকে প্রক্ষেপণ বেগ বলে।
প্রক্ষেপণ কোণ	:	অনুভূমিক তলের সঙ্গে যে কোণে প্রাস প্রক্ষিপ্ত হয় তাকে প্রক্ষেপণ কোণ বলে।
প্রক্ষেপণ সীমা বা পাল্লা	:	প্রাসের প্রক্ষেপন বিন্দু হতে পতন বিন্দুর মধ্যবর্তী অনুভূমিক দূরত্বকে প্রক্ষেপণ পাল্লা বা পাল্লা বলে।
উড্ডয়মান কাল	:	প্রক্ষেপণ বিন্দু থেকে প্রক্ষেপন বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের ওপর এসে পড়তে প্রাসটির যে সময় লাগে তাকে উড্ডয়নকাল বলে। একে চলনকালও বলে।
পড়ন্ত বস্তুর সূত্রাবলি :		
প্রথম সূত্র	:	একই উচ্চতায় স্থির অবস্থান থেকে মুক্তভাবে সকল পড়ন্ত বস্তু সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।
দ্বিতীয় সূত্র	:	স্থির অবস্থানকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক।
তৃতীয় সূত্র	:	স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তু নির্দিষ্ট সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তা ওই সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।
সুষম বৃত্তীয় গতি	:	বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোনো বস্তু কণার গতিকে সুষম বৃত্তীয় গতি বলে।
কেন্দ্রমুখী বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ	:	কোনো বস্তু কণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার ওপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখী বা অভিকেন্দ্র ত্বরণ বলে।

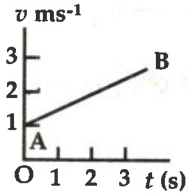
বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

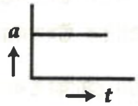
১। $v = u + at$ সমীকরণটি পাশের $v - t$ লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। 

এর ঢাল = ত্বরণ।

২। প্রাসের ক্ষেত্রে লেখচিত্র হলো— 

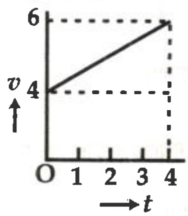
। প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$

৩। 

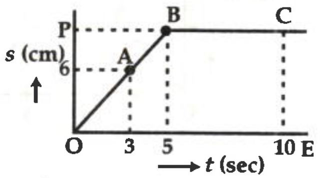
অসম বেগের এই লেখচিত্রের আলোকে ত্বরণকে 

এই লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। 

10 ms^{-1} দুটি বেগ হলে A ও B বিন্দুতে বেগের পরিবর্তন 18 ms^{-1}। $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, $s_{th} = v_0 + \frac{1}{2}a(2t - 1)$, $h = v_0 - \frac{1}{2}g(2t - 1)$ কোনোটিই পরিবর্তনশীল ত্বরণের গতিশীল বস্তুর জন্য প্রযোজ্য নয়।

৪। 

লেখচিত্র হতে ত্বরণের মান পাওয়া যায়, ঢাল থেকে $= \frac{2}{4} = 0.5$ ms^{-2} এবং এর সমীকরণ $v = v_0 + at$।

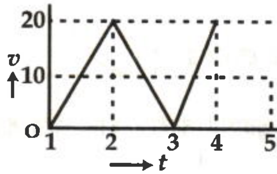
৫। 

পাশের লেখচিত্রে—

(ক) A বিন্দুতে বেগ $= \frac{6}{3} = 2$ cms^{-1}

(খ) BC রেখা অংশ বস্তুর স্থির অবস্থা নির্দেশ করে।

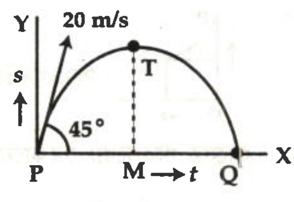
(গ) 10 s-এর অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে OPBCE এর ক্ষেত্রফল।

৬। 

(ক) লেখচিত্র অনুযায়ী $t = 0$ থেকে $t = 5$ সে. এ বস্তুটি কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে $s = vt = 10 \times 5 = 50$ m

(খ) $t = 0$ থেকে $t = 5$ সে. এ বস্তুটির বেগ = 10 ms^{-1}

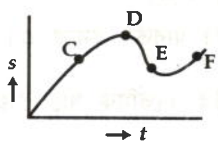
৭। বাতাসের বাধা উপেক্ষা করে একটি পাথরকে পাশের চিত্র অনুযায়ী P বিন্দু হতে তির্যকভাবে ছুঁড়ে দেওয়া হলো। পাথরটির গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দু T এবং পাথরটি ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে Q বিন্দুতে পৌঁছায়।



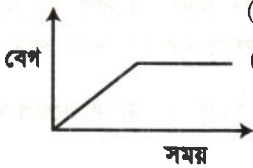
(ক) পাথরটির সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা হবে 40·8 m. PM = 20·4 m

(খ) পাথরটির বেগের উল্লম্ব উপাংশ T বিন্দুতে শূন্য। Q বিন্দুতে পৌঁছাতে সময় 2·885 sec

৮। (ক) নিম্নের লেখচিত্রের E বিন্দুতে বস্তুকণাটির তাৎক্ষণিক বেগের মান ঋণাত্মক হবে।



(খ)



(i) এই চিত্রে বস্তুর আদি বেগ শূন্য।

(ii) বস্তু কখনো থামবে না।

৯। প্রাসের সর্বোচ্চ অবস্থানে বেগ ও ত্বরণের মধ্যবর্তী কোণ $\pi/2$

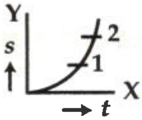
১০। পাল্লা সর্বনিম্ন হলে নিক্ষেপণ কোণ $0°$ হবে। সর্বোচ্চ উচ্চতায় প্রাসের গতিপথ একমাত্রিক।

১১। প্রাসের নিক্ষেপণ কোণ $\tan^{-1}(4)$ হলে এর সর্বাধিক উচ্চতা ও অনুভূমিক পাল্লার মান পরস্পরের সমান হবে।

১২। স্থির অবস্থান থেকে বিনা বাধায় পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ ওই সময়ের সমানুপাতিক।

১৩। একটি প্রাসকে E গতিশক্তিতে $45°$ কোণে নিক্ষেপ করা হলো। সর্বোচ্চ বিন্দুতে স্থিতিশক্তি হবে, $\frac{E}{2}$।

১৪। অনুভূমিক বরাবর নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ পরাবৃত্তাকার বা প্যারাবোলা।
অনুভূমিক বরাবর ত্বরণ শূন্য তাই বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে।



১৫। সমত্বরণে চললে উল্লিখিত চিত্রের ক্ষেত্রে লেখচিত্রটি একটি প্যারাবোলা হবে।
প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতায় বেগ শূন্য।

১৬। একটি ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক বেগ $\frac{\pi}{30}$ rad s^{-1} এবং ঘণ্টার কাঁটার কৌণিক বেগ $\frac{\pi}{6}$ rad s^{-1}

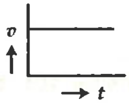
১৭। সর্বাধিক পাল্লার জন্য প্রাসকে অনুভূমিকের সাথে $45°$ কোণে নিক্ষেপ করতে হবে।

১৮। প্রাসের গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে ত্বরণের অনুভূমিক উপাংশ শূন্য।

১৯। একটি গতিশীল বস্তুর সরণের সমীকরণ $x = (4t^2 + 3t)$ m, 2 sec পর বস্তুটির বেগ 19 ms^{-1}

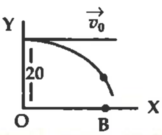
২০। প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগ ও ত্বরণ পরস্পর লম্ব হয় অর্থাৎ মধ্যবর্তী কোণ $\pi/2$ হয়। বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য হয়।

২১। কোনো বস্তু t সেকেন্ডে h উচ্চতা হতে ভূমিতে পড়লে $\frac{t}{2}$ সে. পর বস্তুটি ভূমি হতে $\frac{3h}{4}$ উচ্চতায় ছিল।

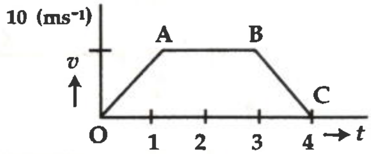
২২। একটি বস্তুর বেগ ধ্রুব কিন্তু শূন্য নয়। সে ক্ষেত্রে লেখচিত্রটি হবে  সমবেগ।

২৩। প্রাসের গতিপথ অধিবৃত্তাকার বা প্যারাবোলা। বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে একটি কণা ঘুরছে। তার ত্বরণের অভিমুখ বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে। চিত্রে O থেকে A বিন্দুতে যেতে ত্বরণ 10 ms^{-2}।

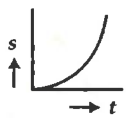
$x^2 = 80\,y$ এবং



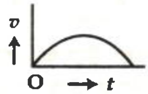
B(x, y) থেকে প্রাপ্ত $v_0 = 20$ ms^{-1}

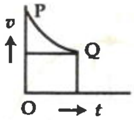


Hints : $2y\frac{{v_0}^2}{g} = x^2 = 80\,y$

২৪। স্থির অবস্থা হতে t সময়ে চলমান বস্তুর ক্ষেত্রে, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণের লেখচিত্র, 

২৫। একটি বস্তু স্থির অবস্থা হতে অসমত্বরণে এমনভাবে গতিশীল যাতে তার ত্বরণের সর্বোচ্চ মান ধীরে ধীরে হ্রাস পেয়ে শূন্য হয়। পাশের বেগ বনাম সময় লেখচিত্র ইহা নির্দেশ করে।





PQ লেখচিত্র v-এর সমীকরণ, $v = at$

২৬। প্রাসের গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে ত্বরণের অনুভূমিক উপাংশ শূন্য।

২৭। প্রাসের সর্বোচ্চ উচ্চতার রাশিমালা হলো, $\frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$

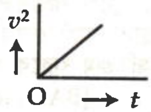
২৮। প্রাসের নিক্ষেপণ বিন্দু ও পতন বিন্দুর মধ্যবর্তী অনুভূমিক দূরত্বকে পাল্লা বলে।

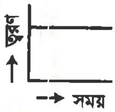
২৯। একটি কণা 2·0 m ব্যাসার্ধ্যের বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 30 বার আবর্তন করলে এর রৈখিক বেগ হবে 2π ms^{-1}

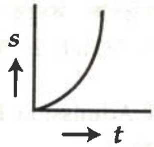
৩০। একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে $45°$ কোণে প্রক্ষেপ করা হলে বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা উল্লম্ব উচ্চতার দ্বিগুণ হবে।

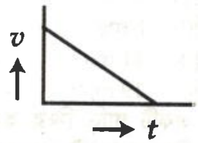
৩১। প্রাসের বিচরণ কালের সমীকরণ হলো, $T = \dfrac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$

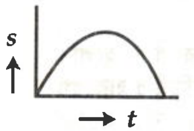
৩২। খাড়াভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বোচ্চ উচ্চতার সমীকরণ হলো, $H = \dfrac{{v_0}^2}{2g}$

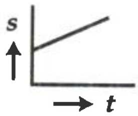
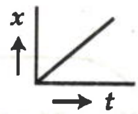
৩৩। স্থির অবস্থা হতে সমত্বরণে গতিশীল কোনো বস্তুকণার v^2 বনাম t লেখচিত্র হলো 

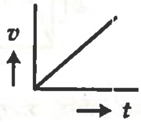
৩৪। সোজাপথে চলমান একটি গতিশীল গাড়ির সুষম ত্বরণ বৃদ্ধি পাশের লেখচিত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়। 

৩৫। যখন $t = 0$ তখন স্থির অবস্থান থেকে একটি বস্তু চলতে শুরু করে ধ্রুব ত্বরণে চলতে থাকে। পাশের লেখচিত্রটি সঠিকভাবে সময়ের সাথে সরণের পরিবর্তন নির্দেশ করে। 

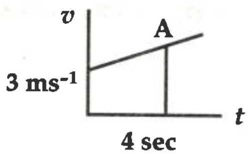
৩৬। v বেগে একটি বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো এবং t সময় পর ভূমিতে ফিরে এলো। (ক) এক্ষেত্রে বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হলো : 

(খ) এক্ষেত্রে সরণ বনাম সময় লেখচিত্র হলো : 

৩৭। x বনাম t লেখচিত্রে সমবেগ প্রকাশের লেখচিত্র হলো :  বা, 

৩৮। $x = \frac{1}{3}t^2 + 3t$ সমীকরণটি একটি বস্তুর ধরন নির্দেশ করলে বেগ বনাম সময়ের লেখচিত্র হবে 

৩৯। সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের গতি একমাত্রিক। প্রাসের X-অক্ষের ত্বরণ $a_x = 0$, Y-অক্ষের ত্বরণ $a_y = -g$। অনুভূমিকের দিকে প্রাসের ত্বরণ না থাকায় অনুভূমিক দিকে বেগের উপাংশ ধ্রুব থাকে।

৪০। 

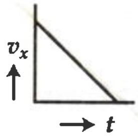
(ক) গ্রাফটির ঢাল ত্বরণ $a = \frac{v}{t}$ নির্দেশ করে।

(খ) A বিন্দুতে বেগ হবে $v = u + at = 3 + 2 \times 4 = 11 \text{ ms}^{-1}$

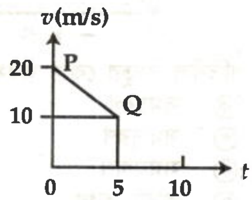
৪১। একই নিক্ষেপণ বেগ ও একই পাল্লার জন্য একটি নিক্ষেপণ কোণ $30°$ হলে অপর কোণ হবে $60°$।

ব্যাখ্যা : $\theta = 90° - \alpha$ হলে R একই হয়,

$\therefore \quad \theta = 90° - 30° = 60°$

৪২। খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হচ্ছে 

৪৩। $x = 12t - 1.2\,t^2$ হলে $t = 3$ sec সময়ে বেগ 4.8 ms^{-1} এবং ত্বরণ -2.4 ms^{-2}

৪৪। PQ লেখচিত্রের জন্য $v = at$ প্রযোজ্য। 

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

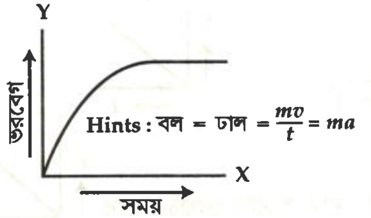
১। $20\ ms^{-1}$ বেগে গতিশীল একটি বস্তুর বেগ $2\ ms^{-1}$ হারে হ্রাস পায়। থেমে যাওয়ার আগে বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ? [BAU Admission Test, 2012-13]

ⓚ 50 m
ⓚ 200 m
ⓖ 100 m
ⓖ 120 m

২। একটি গতিশীল বস্তুর সরণের সমীকরণ $x = (4t^2 + 3t)$m। 2s পর বস্তুটির বেগ হবে— [রা. বো. ২০১৫; BUET Admission Test, 2008-09 (মান ভিন্ন)]

ⓚ $3\ ms^{-1}$
ⓚ $8\ ms^{-1}$
ⓖ $11\ ms^{-1}$
ⓖ $19\ ms^{-1}$

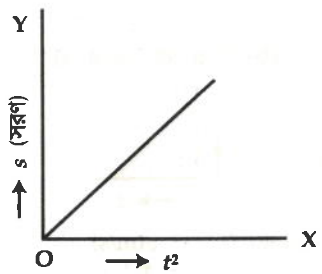
৩। একটি গাড়ি স্থির অবস্থা হতে ত্বরণশীল হলো। নিচের গ্রাফটি সময়ের বিপরীতে গাড়িটির ভরবেগ নির্দেশ করছে— [ঢা. বো. ২০১৫]



কোনো নির্দিষ্ট সময়ে গ্রাফটির ঢাল গাড়িটির কী নির্দেশ করে ?

ⓚ বেগ
ⓚ গতিশক্তি
ⓖ প্রযুক্ত বল
ⓖ গতিশক্তি পরিবর্তনের হার

৪।



লেখটি গতিশীল বস্তুর কোন অবস্থা নির্দেশ করে ?

ⓚ সমবেগ
ⓚ সমত্বরণ
ⓖ সমমন্দন
ⓖ অসম ত্বরণ

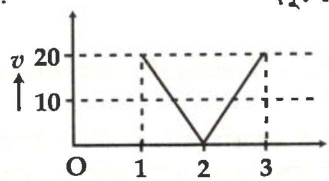
৫। একটি বস্তু স্থির অবস্থা হতে $4\ ms^{-2}$ সমত্বরণে যাত্রা শুরু করলো। 6 s পর বস্তুটির বেগ কত হবে? [JU Admission Test, 2017-18, 2011-12]

ⓚ $24\ ms^{-1}$
ⓚ $12\ ms^{-1}$
ⓖ $16\ ms^{-1}$
ⓖ $18\ ms^{-1}$

৬। একটি বন্দুকের গুলি কোনো দেওয়ালের মধ্যে 0·05 m প্রবেশ করার পর অর্ধেক বেগ হারায়। গুলিটি দেওয়ালের মধ্যে আর কতদূর প্রবেশ করতে পারবে ? [Admission Test : KUET 2017-18, 2012–13 (মান ভিন্ন); RUET 2015-16 (মান ভিন্ন); DU, RU 2015-16 (মান ভিন্ন); JU 2016-17 (মান ভিন্ন); BSMRSTU 2019-20 (মান ভিন্ন)]

ⓚ 0·02 m
ⓚ 0·33 m
ⓖ 1·67 m
ⓖ 0·022 m
ⓤ 0·52m

নিচের লেখচিত্র $v - t$ লক্ষ কর এবং ৭নং ও ৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [কু. বো. ২০১৫]



৭। $t = 0$ থেকে $t = 5$ সে.–এ বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব কত হবে?

ⓚ 30 m
ⓚ 40 m
ⓖ 50 m
ⓖ 60 m

৮। $t = 0$ থেকে $t = 5$ সে.–এ বস্তুটির সরণ কত?

ⓚ 30 m
ⓚ 40 m
ⓖ 50 m
ⓖ 60 m

৯। প্রাসের গতিপথের যেকোনো বিন্দুতে ত্বরণের অনুভূমিক উপাংশ— [সি. বো. ২০১৯; চ. বো. ২০১৫]

ⓚ শূন্য
ⓚ g
ⓖ $\frac{g}{2}$
ⓖ $-g$

১০। একটি হাতঘড়ির মিনিটের কাঁটার কৌণিক বেগ কত?

[চ. বো. ২০১৬ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১৫; Admission Test : DU 2015-16; JnU 2016-17; IU 2014-15; DU (প্রযুক্তি) 2019-20; JU 2019-20]

ক $\frac{\pi}{3600}$ rads^{-1}

খ $\frac{\pi}{1800}$ rads^{-1}

গ $\frac{\pi}{30}$ rads^{-1}

ঘ 2π rads^{-1}

১১। অনুভূমিক বরাবর নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথ—

[দি. বো. ২০১৫; Admission Test : DU 2019-20; CU 2018-19]

ক উপবৃত্তাকার

খ পরাবৃত্তাকার

গ বৃত্তাকার

ঘ সরলরৈখিক

১২। 15 cm দীর্ঘ একটি ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটার প্রান্তের রৈখিক বেগ কত?

[রা. বো. ২০১৯ (মান ভিন্ন); সি. বো. ২০১৫; Medical Admission Test, 2013-14(মান ভিন্ন); Admission Test : PUST 2015-16; RUET 2014-15; BRU 2016-17; BAU 2012-13]

ক 2.18×10^{-3} cms^{-1}

খ 0.22×10^{-4} cms^{-1}

গ 1.31×10^{-3} ms^{-1}

ঘ 1.31×10^{-3} cms^{-1}

১৩। একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটার কম্পাঙ্ক কত?

[ঢা. বো. ২০১৬]

ক 2.78 Hz

খ 2.78×10^{-1} Hz

গ 2.78×10^{-2} Hz

ঘ 2.78×10^{-4} Hz

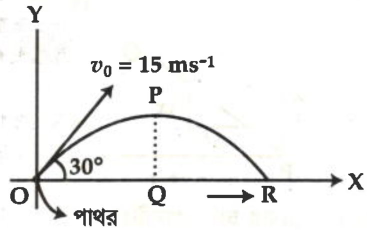
১৪। A ও B দুটি গাড়ি যথাক্রমে 10 kmh^{-1} ও 20 kmh^{-1} বেগে একই দিকে চলছে। A-এর সাপেক্ষে B-এর আপেক্ষিক বেগ— [রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১৯ (মান ভিন্ন); ব. বো. ২০১৫]

ক 10 kmh^{-1} সামনের দিকে

খ 20 kmh^{-1} সামনের দিকে

গ 20 kmh^{-1} পিছনের দিকে

ঘ 30 kmh^{-1} সামনের দিকে



উদ্দীপকের আলোকে ১৫নং ও ১৬নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৫। OQ = কত? [ব. বো. ২০১৯]

ক 9.94 m

খ 9.95 m

গ 9.96 m

ঘ 9.97 m

১৬। উদ্দীপকে পাথরটি—

i. P বিন্দুতে পৌঁছতে 0.765 sec সময় লাগে

ii. OP এবং OQ দৈর্ঘ্য সমান নয়

iii. P বিন্দুতে বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii

খ i ও iii

গ ii ও iii

ঘ i, ii ও iii

১৭। প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতায় রাশিমালা—

[কু. বো. ২০১৬; Admission Test : RU 2017-18; CU unit-A 2020-21]

ক $\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$

খ $\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

গ $\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

ঘ $\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$

১৮। প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে শূন্য হবে—

[রা. বো. ২০১৬; BAM Admission Test, 2017-18]

i. বেগের অনুভূমিক অংশ

ii. বেগের উল্লম্ব উপাংশ

iii. ত্বরণের অনুভূমিক উপাংশ

নিচের কোনটি সঠিক?

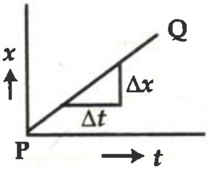
ক i ও ii

খ ii ও iii

গ i ও iii

ঘ i, ii ও iii

১৯। [য. বো. ২০১৬]



চিত্রে PQ রেখার ঢাল কোনটি?

(ক) $\frac{\Delta t}{\Delta x}$

(খ) $\frac{dx}{dt}$

(গ) $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

(ঘ) $\frac{x}{t}$

২০। প্রাসের নিক্ষেপণ বিন্দু ও পতন বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব হলো— [য. বো. ২০১৬]

(ক) সরণ

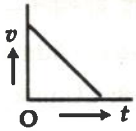
(খ) দূরত্ব

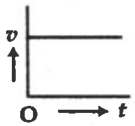
(গ) পাল্লা

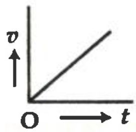
(ঘ) অভিক্ষেপ

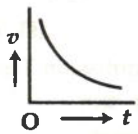
২১। সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ (v) বনাম সময় (t)-এর লেখচিত্র কোনটি?

[ঢা. বো. ২০১৯; য. বো. ২০১৬]

(ক) 

(খ) 

(গ) 

(ঘ) 

২২। পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে গ্যালিলিও এর সূত্র—

[য. বো. ২০১৬]

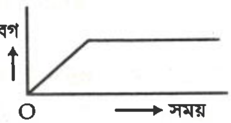
(ক) $v \propto t^2$

(খ) $v \propto \frac{1}{t}$

(গ) $v \propto t$

(ঘ) $h \propto t$

২৩। [চ. বো. ২০১৬]



উপরের সময় বনাম বেগ লেখচিত্র অনুসারে—

i. বস্তুটির আদি বেগ শূন্য

ii. বস্তুটির ওপর ক্রিয়াশীল বল সর্বদা সমান

iii. বস্তুটি কখনই থামবে না

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii

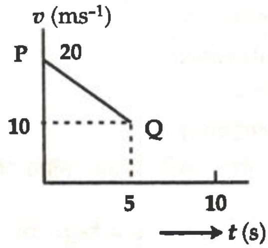
(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

উদ্দীপক হতে ২৪ ও ২৫নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

[চ. বো. ২০১৬]



২৪। PQ লেখচিত্রের জন্য প্রযোজ্য সমীকরণ কোনটি?

(ক) $s = vt$

(খ) $v = at$

(গ) $v = v_0 + at$

(ঘ) $v = v_0 - at$

২৫। PQ রেখা বরাবর গতিশীল কণার ত্বরণ—

(ক) $20\ ms^{-2}$

(খ) $10\ ms^{-2}$

(গ) $4\ ms^{-2}$

(ঘ) $2\ ms^{-2}$

২৬। পরিবর্তনশীল ত্বরণে গতিশীল কোনো বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয়ে ব্যবহৃত হয়—

[ব. বো. ২০১৬]

(ক) $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

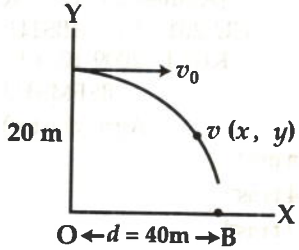
(খ) $s_{th} = v_0 + \frac{1}{2} a\,(2t - 1)$

(গ) $h_{th} = v_0 + \frac{1}{2} g\,(2t - 1)$

(ঘ) কোনোটিই নয়

চিত্রানুযায়ী M ভরের একটি বস্তুকে v_0 আদিবেগে অনুভূমিকভাবে B বিন্দুর লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত করার জন্য নিক্ষেপ করায় চলার পথের সমীকরণ $x^2 = 80y$ পাওয়া গেল। এখানে $g = 10\ ms^{-2}$।

নির্দেশনার আলোকে ২৭নং ও ২৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [ব. বো. ২০১৬]



২৭। v_0 = কত?
ⓚ $10\ ms^{-1}$
ⓚ $20\ ms^{-1}$
ⓖ $40\ ms^{-1}$
ⓖ $60\ ms^{-1}$

২৮। নিক্ষিপ্ত বস্তুটি লক্ষ্যবস্তু—
ⓚ B-এর আগে ভূমিতে পড়বে
ⓚ B হতে দূরে ভূমিতে পড়তে
ⓖ B-এর উপর লম্বভাবে পড়বে
ⓖ B-এর উপর তির্যকভাবে পড়বে

নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং ২৯নং ও ৩০নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
কোনো বস্তুর অবস্থান $x = (12\ ms^{-1})\ t - (1.2\ ms^{-1})\ t^2$, যেখানে সময় t-এর উপর অবস্থান x নির্ভরশীল। [সি. বো. ২০১৬]

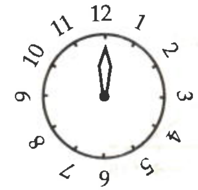
২৯। $t = 3$ sec সময়ে বস্তুটির বেগের মান কত হবে? [JU Admission Test, 2018-19 (মান ভিন্ন)]
ⓚ $4.4\ ms^{-1}$
ⓚ $4.8\ ms^{-1}$
ⓖ $10.8\ ms^{-1}$
ⓖ $25.2\ ms^{-1}$

৩০। বস্তুটির ত্বরণ কত হবে? [Admission Test : CU 2018-19 (মান ভিন্ন); BRU 2016-17 (মান ভিন্ন); DU (প্রযুক্তি) 2020-21; DU (7 colleges) 2020-21]
ⓚ $-2.4\ ms^{-2}$
ⓚ $-4.8\ ms^{-2}$
ⓖ $9.6\ ms^{-2}$
ⓖ $12\ ms^{-2}$

৩১। একটি পাখা প্রতি মিনিটে 30 বার ঘুরছে। এর কৌণিক বেগ কত ? [রা. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); কু. বো. ২০২৩ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০১৭; Admission Test : IU 2017-18; DU (প্রযুক্তি) 2020-21]
ⓚ π rad s^{-1}
ⓚ 2π rad s^{-1}
ⓖ 15π rad s^{-1}
ⓖ 60π rad s^{-1}

৩২। একটি ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার কৌণিক কম্পাঙ্ক কত হবে ? [BUET Admission Test, 2013-14]
ⓚ 1.0 rev/s
ⓚ 0.104
ⓖ 0.5 rev/s
ⓖ 60.0 rev/s

নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং ৩৩নং ও ৩৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [সি. বো. ২০১৫]



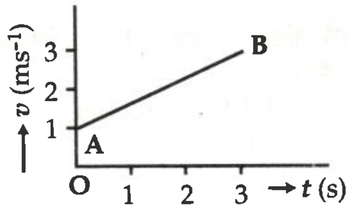
চিত্রে প্রদর্শিত ঘড়ির কাঁটাটি ঘণ্টার কাঁটা নির্দেশ করেছে, যার দৈর্ঘ্য 15 cm।

৩৩। ঘড়ির কাঁটাটির রৈখিক বেগ কত?
ⓚ $0.22 \times 10^{-4}\ ms^{-1}$
ⓚ $0.22 \times 10^{4}\ cms^{-1}$
ⓖ $1.31 \times 10^{-3} ms^{-1}$
ⓖ $2.18 \times 10^{-3}\ cms^{-1}$

৩৪। কাঁটাটির কৌণিক বেগ–
(i) ব্যাসার্ধের সমানুপাতিক
(ii) রৈখিক বেগ ও ব্যাসার্ধের অনুপাতের সমান
(iii) আবর্তন কালের ব্যস্তানুপাতিক
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii
ⓚ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓖ i, ii ও iii

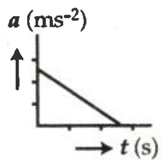
৩৫। 0.01 m দৈর্ঘ্যের একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটার প্রান্তীয় বিন্দুর রৈখিক বেগের মান কত ? [রা. বো. ২০১৯]
ⓚ $1.54 \times 10^{-5}\ ms^{-1}$
ⓚ $1.64 \times 10^{-5}\ ms^{-1}$
ⓖ $1.74 \times 10^{-5}\ ms^{-1}$
ⓖ $1.84 \times 10^{-5}\ ms^{-1}$

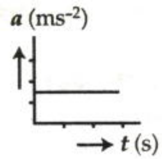
৩৬। মুক্তভাবে পড়ন্ত কোনো বস্তুর $1s$, $2s$, $3s$-এ অতিক্রান্ত দূরত্বের অনুপাত— [চ. বো. ২০১৫ Admission Test : JU 2019-20; RU 2015-16]
ⓚ 1 : 2 : 3
ⓚ 1 : 4 : 9
ⓖ 1 : 3 : 9
ⓖ 1 : 3 : 5

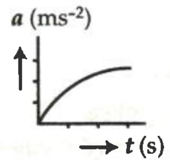


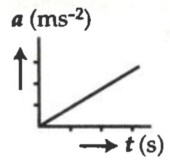
উপরের লেখচিত্রের আলোকে ৩৭নং ও ৩৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [চ. বো. ২০১৫]

৩৭। উদ্দীপকের আলোকে নিচের কোন লেখচিত্রটি সঠিক?

ক 

খ 

গ 

ঘ 

৩৮। লেখচিত্রের AB অংশে অতিক্রান্ত দূরত্ব—

ক 2m
খ 3m
গ 4m
ঘ 6m

৩৯। একটি প্রক্ষেপককে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে 3 ms^{-1} বেগে প্রক্ষেপ করা হলে সর্বোচ্চ উচ্চতায় প্রক্ষেপকটির বেগ কত হবে ?

[DU Admission Test, 2016-17]

ক $\frac{\sqrt{3}}{2}\ ms^{-1}$
খ $3\ ms^{-1}$
গ $\frac{3}{2}\ ms^{-1}$
ঘ $0\ ms^{-1}$

৪০। একটি কণা 2·0 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 30 বার আবর্তন করে। এর রৈখিক বেগ কত ? [Admission Test : DU 2014-15; CU 2015-16; MBSTU 2015-16; KUET 2009-10; KU 2014-15; BSFMSTU 2019-20; Agri (cluster) 2020-21]

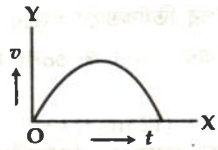
ক $\pi\ ms^{-1}$
খ $4\pi\ ms^{-1}$
গ $2\pi\ ms^{-1}$
ঘ $0{\cdot}5\pi\ ms^{-1}$

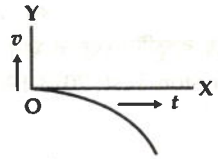
৪১। স্থির অবস্থান থেকে 100 kg ভরের একটি গাড়ি অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 20 m দূরত্বের একটি আনত তল বেয়ে নামছে। গাড়িটির বেগ—

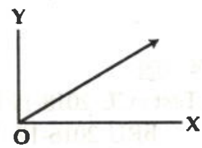
[রা. বো. ২০১৫]

ক $0{\cdot}8\ ms^{-1}$
খ $14\ ms^{-1}$
গ $98\ ms^{-1}$
ঘ $196\ ms^{-1}$

৪২। প্রাসের ক্ষেত্রে লেখচিত্র হচ্ছে— [য. বো. ২০১৫]

i. 

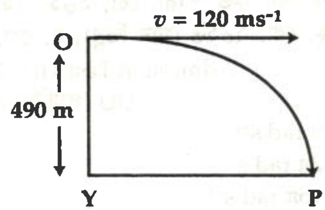
ii. 

iii. 

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপকটি পড়ে ৪৩নং ও ৪৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও: [য. বো. ২০১৫]



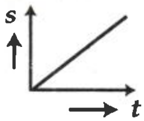
৪৩। একটি বোমারু বিমান ভূমি হতে 490 m উচ্চতায় ভূমির সমান্তরালে 120 ms^{-1} বেগে বোমা ফেলে দিল। ভূপৃষ্ঠের ওপর P একটি বিন্দু। বোমাটি কখন P বিন্দুতে আঘাত হানবে?

ⓚ 0·24 sec
ⓛ 4·08 sec
ⓖ 10 sec
ⓘ 29·38 sec

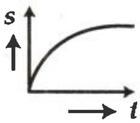
৪৪। Y ও P-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

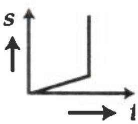
ⓚ 120 m
ⓛ 490 m
ⓖ 1200 m
ⓘ 4900 m

৪৫। নিচের কোন লেখচিত্রটি দূরত্ব বনাম সময় লেখচিত্র হতে পারে না ? [সকল বোর্ড ২০১৮]

ⓚ 

ⓛ 

ⓖ 

ⓘ 

৪৬। সর্বোচ্চ উচ্চতায় একটি প্রাসের দ্রুতি প্রারম্ভিক দ্রুতির অর্ধেক। প্রক্ষেপণ কোণ—

[JU Admission Test, 2019-20]

ⓚ 60°
ⓛ 15°
ⓖ 30°
ⓘ 45°

৪৭। একই ভরের দুটি বস্তুকে একই বেগে অনুভূমিক তলের সাথে 60° ও 30° কোণে ছোড়া হলো। কোনটি সমান হবে ?

ⓚ ভ্রমণকাল
ⓛ প্রক্ষেপণ সীমা
ⓖ সর্বাধিক উচ্চতা
ⓘ এদের সবগুলোই

৪৮। একজন লোক একটি পাথরকে উল্লম্বভাবে সর্বোচ্চ h m উচ্চতা পর্যন্ত ছুড়তে পারে। ওই একই লোক অনুভূমিক দিকে সর্বোচ্চ কত দূরত্ব পর্যন্ত ছুড়তে পারবে ?

ⓚ $\frac{h}{2}$ m
ⓛ h m
ⓖ $2h$ m
ⓘ $3h$ m

৪৯। একটি ক্রিকেট বলকে 49 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে কত সময় পর তা আবার পূর্বের অবস্থানে ফিরে আসবে ?

[Admission Test : BAU 2016-17; SAU 2017-18]

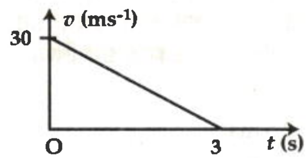
ⓚ 20 s
ⓛ 49 s
ⓖ 15 s
ⓘ 10 s

৫০। একটি বস্তুকে 50 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে নিক্ষেপ করা হলে সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে কত সময় লাগবে ?

[KUET Admission Test, 2014-15]

ⓚ 1·8 s
ⓛ 3·6 s
ⓖ 9·8 s
ⓘ 36 s

৫১। খাড়া ওপর দিকে নিক্ষিপ্ত একটি কণার বেগ-সময় লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। কণাটি সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় উঠবে ?



ⓚ 30 m
ⓛ 45 m
ⓖ 60 m
ⓘ 90 m

৫২। একটি বস্তুকে মিনারের শীর্ষ থেকে ফেলা হলে বস্তুটি 3 sec-এ মিনারের অর্ধেক উচ্চতা অতিক্রম করে। কতক্ষণ পরে বস্তুটি ভূমিতে পৌঁছাবে ?

ⓚ 3·6 s
ⓛ 4·24 s
ⓖ 3·71 s
ⓘ 6 s

৫৩। প্রক্ষেপণ কোণ কত হলে একটি প্রাসের ক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতা ও অনুভূমিক পাল্লা সমান হবে ?

[Admission Test : JU 2017-18; JnU 2008-09]

ⓚ $\theta = \tan^{-1} 2$
ⓛ $\theta = \tan^{-1} 3$
ⓖ $\theta = \tan^{-1} 4$
ⓘ $\theta = \tan^{-1} 5$

৫৪। একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে প্রক্ষেপ করা হলো, বস্তুটির অনুভূমিক পাল্লা— [BUET Admission Test, 2013-14]

(ক) উল্লম্ব উচ্চতার সমান
(খ) উল্লম্ব উচ্চতার দ্বিগুণ
(গ) উল্লম্ব উচ্চতার তিনগুণ
(ঘ) উল্লম্ব উচ্চতার চারগুণ

৫৫। একটি প্রাসের গতির সর্বোচ্চ বিন্দুতে এর বেগ এবং ত্বরণের অভিমুখ— [Admission Test : DU 2013-14; KU 2019-20; JU unit-A 2019-20]

(ক) পরস্পরের সমান্তরাল
(খ) পরস্পরের সঙ্গে 45° কোণে আনত
(গ) পরস্পরের সমকোণে
(ঘ) পরস্পরের বিপরীত

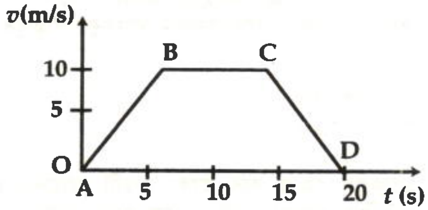
৫৬। রাডার স্টেশন থেকে চাঁদের দূরত্ব $3{\cdot}8 \times 10^8$ m হলে রাডার সংকেত চাঁদে যাওয়া ও ফেরত আসার জন্য প্রয়োজনীয় সময়— [BUET Admission Test, 2012-13]

(ক) 1·3 s
(খ) 2·5 s
(গ) 8·0 s
(ঘ) 8·0 min

৫৭। একটি বস্তুকণা X-অক্ষ বরাবর গমন করছে এবং কোনো মুহূর্তে এর সরণ, $x(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$। কণাটির ত্বরণ যখন শূন্য তখন এর বেগ কত ? (সকল রাশি S. I. এককে প্রকাশিত)

(ক) 3·5 ms^{-1}
(খ) 2·5 ms^{-1}
(গ) 4·5 ms^{-1}
(ঘ) 5 ms^{-1}

উদ্দীপকের আলোকে ৫৮ ও ৫৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [ঢা. বো. ২০১৭; RU Admission Test, 2020-21]



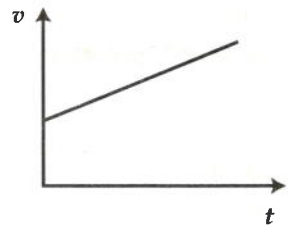
৫৮। CD রেখার ত্বরণ কত ?

(ক) 2·0 ms^{-2}
(খ) 0·5 ms^{-2}
(গ) —0·5 ms^{-2}
(ঘ) —2 2·0 ms^{-2}

৫৯। শেষ 10 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব কত ?

(ক) 75 m
(খ) 150 m
(গ) 200 m
(ঘ) 350 m

৬০। [কু. বো. ২০১৭]



একটি কণায় v — t লেখচিত্র দেখানো হলো। উপরের লেখচিত্র প্রকাশ করতে পারে

i. $v = v_0 + at$
ii. $a < 0$
iii. $F > 0$

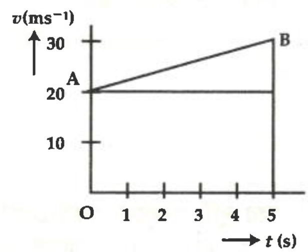
ওপরের সমীকরণ হতে কোনটি সঠিক ?

(ক) i ও ii
(খ) ii ও iii
(গ) ii
(ঘ) iii

৬১। একটি বস্তুর বেগ $v(t) = (6t^3 + 2t)$ ms^{-1}। 2 sec পর বস্তুটির সরণ কত ? [রা. বো. ২০১৭]

(ক) 20 m
(খ) 26 m
(গ) 28 m
(ঘ) 56 m

নিচের লেখচিত্রের আলোকে ৬২ ও ৬৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [দি. বো. ২০১৭]



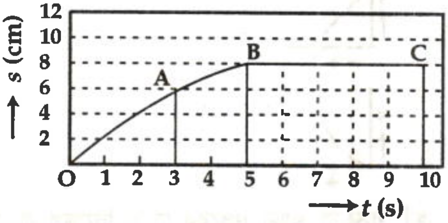
৬২। AB অংশের ত্বরণ—

(ক) 2 ms^{-2}
(খ) 5 ms^{-2}
(গ) 8 ms^{-2}
(ঘ) 10 ms^{-2}

৬৩। 5 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব—
ক 50 m
খ 100 m
গ 125 m
ঘ 150 m

৬৪। সর্বাধিক পাল্লার জন্য প্রাসকে অনুভূমিকের সাথে কত কোণে নিক্ষেপ করতে হবে? [সি. বো. ২০১৫; DU H(Econ) Admission Test, 2017-18; CU unit-A 2020-21]
ক 30°
খ 45°
গ 60°
ঘ 90°

নিচের অনুচ্ছেদ অনুসারে ৬৫নং ও ৬৬নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [সি. বো. ২০১৫]
একটি বস্তুর সরণ (s) বনাম সময় (t) লেখচিত্র নিম্নে প্রদর্শিত হলো—



৬৫। লেখচিত্রের A বিন্দুতে বস্তুটির বেগ কত?
ক $2\ cms^{-1}$
খ $3\ cms^{-1}$
গ $6\ cms^{-1}$
ঘ $18\ cms^{-1}$

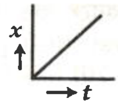
৬৬। লেখচিত্রের BC রেখা অনুযায়ী বস্তুটির গতি হচ্ছে—
ক সমবেগ
খ সমত্বরণ
গ সমমন্দন
ঘ স্থিরাবস্থা

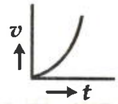
৬৭। একটি পাথরখণ্ডকে ভূপৃষ্ঠ থেকে খাড়া ওপরের দিকে তুলতে থাকলে এর ওপর কয়টি বল ক্রিয়া করে? [সি. বো. ২০১৫]
ক 1
খ 2
গ 3
ঘ 4

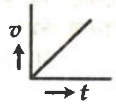
৬৮। একটি বস্তুকে v_0 আদিবেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। নিচের কোন রাশিটি এর সর্বোচ্চ উচ্চতা নির্দেশ করে? [সি. বো. ২০১৭]
ক $H = \frac{v_0^2}{2g}$
খ $H = \frac{v_0}{g}$
গ $H = \frac{v_0^2}{g}$
ঘ $H = \frac{v_0}{2g}$

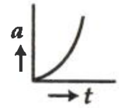
৬৯। 70 m উঁচু দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর ছেড়ে দিলে ভূমিতে পৌঁছতে এর কত সময় লাগবে? [সকল বোর্ড ২০১৪; BSMRSTU, 2018-19 (মান ভিন্ন)]
ক 1·9 sec
খ 3·57 sec
গ 3·8 sec
ঘ 14·28 sec

৭০। একটি পাথরকে একটি উঁচু জায়গা থেকে নিচে ফেলে দেওয়া হলো। নিচের কোন চিত্রটি এর গতিকে প্রকাশ করে ? [DU Admission Test, 2017-18]

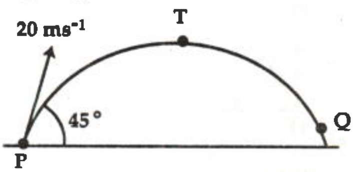
ক 

খ 

গ 

ঘ 

উদ্দীপকটি পড়ে পরবর্তী ৭১ ও ৭২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
বাতাসের বাধার অনুপস্থিতিতে একটি পাথরকে চিত্রানুযায়ী P বিন্দু হতে তির্যকভাবে ছুড়ে দেওয়া হলো। পাথরটির গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দু T এবং পাথরটি ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে Q বিন্দুতে পৌঁছায়।



৭১। পাথরটির সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা কত ? [ঢা. বো. ২০১৫; CU Admission Test, 2018-19]
ক $81·6\ ms^{-1}$
খ $40·8\ ms^{-1}$
গ $28·8\ ms^{-1}$
ঘ $2·04\ ms^{-1}$

৭২। পাথরটির বেগের উল্লম্ব উপাংশ— [ঢা. বো. ২০১৫]
ক T বিন্দুতে শূন্য
খ T বিন্দুতে Q বিন্দুর তুলনায় বেশি
গ Q বিন্দুতে T বিন্দুর তুলনায় বেশি
ঘ Q এবং T বিন্দুতে সমান

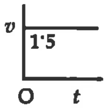
৭৩। প্রক্ষেপকের বিচরণকালের সমীকরণ কোনটি ? [রা. বো. ২০১৭; CU-A Admission Test : 2021-22]

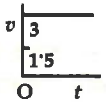
ⓚ $T = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$
ⓚ $T = \frac{v_0 \cos\theta_0}{g}$
ⓖ $T = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$
ⓓ $T = \frac{2v_0 \cos\theta_0}{g}$

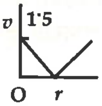
৭৪। একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে 20 ms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করলে কত দূরে গিয়ে পড়বে? [Admisstion Test : RU-G_1 2017-18; IU 2017-18 (মান ভিন্ন)]

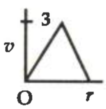
ক 10 m
খ 40·8 m
গ 5m
ঘ 20 m

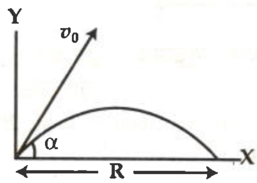
৭৫। 1·5 ms^{-1} বেগে এবং 60° কোণে নিক্ষিপ্ত প্রাসের বেগের অনুভূমিক উপাংশ বনাম সময় লেখচিত্র হবে— [ব. বো. ২০১৫]

ক 

খ 

গ 

ঘ 

৭৬। 

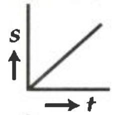
প্রক্ষিপ্ত বিন্দু ও বিচরণ পথের শেষ প্রান্ত বিন্দুর মধ্যবর্তী অনুভূমিক দূরত্বকে অনুভূমিক পাল্লা বলে। অনুভূমিক পাল্লা

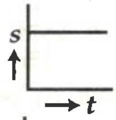
$R = v_0{}^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{g}$ … … … (i)

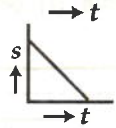
(i) নং সমীকরণটিতে R-এর মান সর্বোচ্চ হবে—
(i) $\sin 2\alpha$-এর মান সর্বোচ্চ হলে
(ii) $\alpha = 45°$ হলে
(iii) $\alpha = \left(\frac{\pi}{4}\right)$ হলে

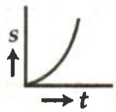
নিচের কোনটি সঠিক ?
ক i
খ i ও ii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

৭৭। $s = \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণে s সরণ, t সময় এবং a ত্বরণ নির্দেশ করে। নিচের কোন লেখচিত্রটি সঠিক ? [চ. বো. ২০১৭]

ক 

খ 

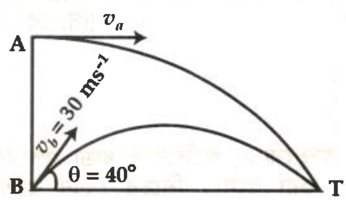
গ 

ঘ 

৭৮। একটি বস্তুকে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করলে সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছার সময়— [রা. বো. ২০১৬; Admission Test : BSMRSTU 2017-18; CVASU 2018-19]

ক $t = \frac{v_0}{2g}$
খ $t = \frac{2v_0}{g}$
গ $t = \frac{v_0}{g}$
ঘ $t = v_0 g$

নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং ৭৯ ও ৮০নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রানুযায়ী A ও B বিন্দু থেকে দুটি বস্তু নিক্ষেপ করা হলো। [সকল বোর্ড ২০১৮]

৭৯। B বিন্দু থেকে নিক্ষিপ্ত বস্তুটির 1 সে. পর বেগের উল্লম্ব উপাংশ—
ক 9·48 ms^{-1}
খ 16·18 ms^{-1}
গ 19·28 ms^{-1}
ঘ 25·98 ms^{-1}

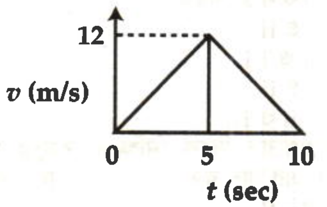
৮০। যদি লক্ষ্যবস্তু T তে আঘাত করতে প্রাস দুটি একই সময় নেয় তবে—

ⓚ $v_a = v_b \sin\theta$
ⓚ $v_b = v_a \sin\theta$
ⓖ $v_a = v_b \cos\theta$
ⓖ $v_b = v_a \cos\theta$

৮১। একটি বস্তুকে 196 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। 10 s পর এর বেগ কত হবে ? [Admission Test : JU 2017-18; IU 2015-17 (মান ভিন্ন); DU 2004-05 (মান ভিন্ন)]

ক) 98 ms^{-1}
খ) 78 ms^{-1}
গ) 68 ms^{-1}
ঘ) 88 ms^{-1}

৮২। নিচের লেখচিত্র অনুযায়ী $t = 0$ হতে $t = 10s$ সময়ে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং গড় বেগ কত হবে ? [ঢা. বো. ২০১৯]



ক) 60 m এবং 6 ms^{-1}
খ) 50 m এবং $\frac{1}{6}$ ms^{-1}
গ) 40 m এবং 60 ms^{-1}
ঘ) 30 m এবং 10 ms^{-1}

৮৩। একটি বস্তু r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে v সমদ্রুতিতে ঘুরছে। এক্ষেত্রে—

(i) বস্তুটির ত্বরণ নেই
(ii) বস্তুটির ত্বরণ আছে
(iii) বস্তুটির কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{v}{r}$

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক) i
খ) i ও ii
গ) ii ও iii
ঘ) i, ii ও iii

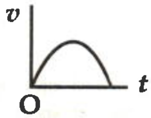
৮৪। বৃত্তাকার পথে 72km/h সমদ্রুতিতে চলমান কোনো গাড়ির কেন্দ্রমুখী ত্বরণ 1 ms^{-2} হলে, বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত ? [Admission Test : DU 2017-18; CUET 2011-12; BSMRSTU 2017-18; JKKNIU 2018-19 (মান ভিন্ন)]

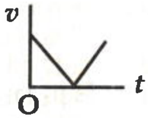
ক) 400 m
খ) 300 m
গ) 150 m
ঘ) 200 m

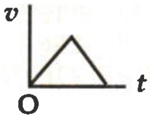
৮৫। 1 rps = ? [ম. বো. ২০২২; ঢা. বো. ২০১৫]

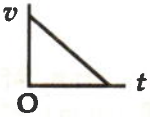
ক) $\frac{\pi}{2}$ $rads^{-1}$
খ) π $rads^{-1}$
গ) 2π $rads^{-1}$
ঘ) 4π $rads^{-1}$

৮৬। খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর v -- t লেখচিত্র কোনটি ? [রা. বো. ২০১৫]

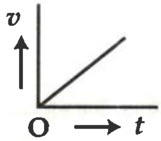
ক) 

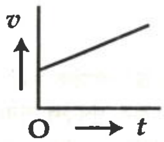
খ) 

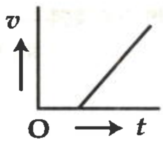
গ) 

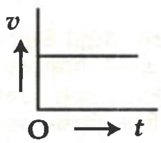
ঘ) 

৮৭। কোন লেখচিত্রটি স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর চলার পথ নির্দেশ করে ? [ঢা. বো. ২০১৯; দি. বো. ২০১৫]

ক) 

খ) 

গ) 

ঘ) 

৮৮। একটি বল $19 \cdot 6$ ms^{-1} গতিতে সোজা ওপরে ছোড়া হলো। এটা সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় পৌঁছাতে পারবে? [Medical Admission Test, 2015-16; Admission Test : RU 2017-18; CU 2014-15 (মান ভিন্ন); JnU 2009-10 (মান ভিন্ন); CU 2018-19 (মান ভিন্ন); RUET 2013-14 (মান ভিন্ন); KUET 2005-06 (মান ভিন্ন)]

ⓚ 9·8 m
ⓚ 4·9 m
ⓖ 1 m
ⓖ 19·6 m

৮৯। একটি বস্তুকে $4 \cdot 9$ ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে ছোড়া হলো। বস্তুটি কতক্ষণ শূন্যে থাকবে? [Medical Admission Test, 2015-16; Admission Test : BSMRSTU 2017-18 (মান ভিন্ন); IU 2017-18 (মান ভিন্ন); DU 2016-17; JU 2016-17 (মান ভিন্ন); KU 2019-20 (মান ভিন্ন); CoMU 2016-17 (মান ভিন্ন); KUET 2011-12(মান ভিন্ন)]

ⓚ 2 sec
ⓚ 1 sec
ⓖ 3 sec
ⓖ 4 sec

৯০। অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা 100 m। সর্বোচ্চ উচ্চতা কত? [ঢা. বো. ২০১৯; Admission Test : IU 2019-20; BSMRSTU 2018-19 (মান ভিন্ন)]

ⓚ 14·43 m
ⓚ 17·68 m
ⓖ 25·00 m
ⓖ 43·00 m

৯১। প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ উচ্চতায়— [ঢা. বো. ২০১৯]

ⓚ বেগ শূন্য
ⓚ স্থিতিশক্তি শূন্য
ⓖ বেগ ও ত্বরণের ডট গুণফল শূন্য
ⓖ বেগ ও ত্বরণের ক্রস গুণফল শূন্য

৯২। t সময় পরে $x = 6t$ এবং $y = 8t - 5t^2$ হলে ওই মুহূর্তে প্রাসের নিক্ষেপণ বেগ হবে— [রা. বো. ২০১৯]

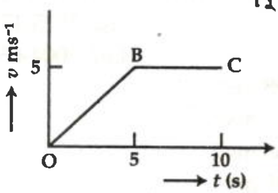
ⓚ 10 ms^{-1}
ⓚ 5 ms^{-1}
ⓖ 6 ms^{-1}
ⓖ 8 ms^{-1}

নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং ৯৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও : একটি বস্তুকে 180 m উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে ছেড়ে দেয়া হলো। একই সময়ে অন্য একটি বস্তুকে 60 ms^{-1} বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো।

৯৩। কখন বস্তুদ্বয় পরস্পর মিলিত হবে? [রা. বো. ২০১৯; Admission Test : KUET 2012-13; CKRUET 2020-21]

ⓚ 1 sec
ⓚ 2 sec
ⓖ 3 sec
ⓖ 4 sec

৯৪। একটি বস্তুর গতিপথের লেখচিত্র নিম্নরূপ— [কু. বো. ২০১৯]



i. OB অংশে বস্তুটি সমত্বরণে চলে
ii. BC অংশে ত্বরণ শূন্য
iii. 10 sec-এ বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব 62·5 m

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii
ⓚ ii ও iii
ⓖ i ও iii
ⓖ i, ii ও iii

৯৫। খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্ব R-এর মান কত? [য. বো. ২০১৯]

ⓚ $R = R_{max}$
ⓚ $R = \frac{v_0}{2}$
ⓖ $R = \frac{v_0}{g}$
ⓖ $R = 0$

৯৬। সুষম বৃত্তাকার গতির বৈশিষ্ট্য— [য. বো. ২০১৯]

i. সমকৌণিক বেগ বিদ্যমান
ii. কৌণিক ত্বরণ শূন্য
iii. কেন্দ্রমুখী ত্বরণ থাকে না

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii
ⓚ ii ও iii
ⓖ i ও iii
ⓖ i, ii ও iii

৯৭। প্রাসের ক্ষেত্রে— [য. বো. ২০১৯]

i. প্রাসের ওপর একমাত্র ক্রিয়াশীল বল অভিকর্ষ বল
ii. প্রাসের গতির ক্ষেত্রে g-এর মান স্থির ধরা হয়
iii. প্রাসের গতিপথ ত্রিমাত্রিক

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii
ⓚ ii ও iii
ⓖ i ও iii
ⓖ i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে ৯৮ ও ৯৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [চ. বো. ২০১৯]

ভূমির সাথে 30° কোণে এবং 50 ms^{-1} বেগে ওপরের দিকে একটি বস্তুকে নিক্ষেপ করা হলো।

৯৮। নিক্ষেপ করার 2 sec পর বস্তুটির বেগ কত? [রা. বো. ২০১৯ (মান ভিন্ন)]
(ক) 62.6 ms^{-1}
(খ) 43.63 ms^{-1}
(গ) 31.89 ms^{-1}
(ঘ) 5.4 ms^{-1}

৯৯। উদ্দীপকের প্রাসটির—
i. অনুভূমিক পাল্লা 220.92 m
ii. সর্বাধিক উচ্চতা 63.77 m
iii. সর্বাধিক উচ্চতায় বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii
(খ) i ও iii
(গ) ii ও iii
(ঘ) i, ii ও iii

১০০। তির্যকভাবে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর গতি কীরূপ? [ব. বো. ২০১৯]
(ক) একমাত্রিক অসমত্বরণ সম্পন্ন
(খ) একমাত্রিক সমত্বরণ সম্পন্ন
(গ) দ্বিমাত্রিক অসমত্বরণ সম্পন্ন
(ঘ) দ্বিমাত্রিক সমত্বরণ সম্পন্ন

একটি গাড়ি স্থির অবস্থান থেকে 2 ms^{-2} সমত্বরণে চলতে শুরু করে। এ তথ্যের আলোকে ১০১ ও ১০২নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [সি. বো. ২০১৯]

১০১। 2 s পরে এটি কত দূর যাবে?
(ক) 1m
(খ) 2m
(গ) 4m
(ঘ) 8m

১০২। 4 s পরে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব 2 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্বের কত গুণ?
(ক) 16 গুণ
(খ) 8 গুণ
(গ) 4 গুণ
(ঘ) 2 গুণ

45 m উচ্চতায় অবস্থিত নল হতে সমান সময় ব্যবধানে পানির ফোঁটা ভূমিতে পতিত হচ্ছে। প্রথম ফোঁটা যখন ভূমিতে পড়ে তখন চতুর্থ ফোঁটা নল হতে পড়ার উপক্রম হয়। ($g = 10\ ms^{-2}$)

উদ্দীপকটি হতে ১০৩ ও ১০৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও : [দি. বো. ২০১৯]

১০৩। প্রথম ফোঁটা ভূমিতে পড়ার মুহূর্তে তৃতীয় ফোঁটা ভূমি হতে কত উচ্চতায় থাকবে?
(ক) 10m
(খ) 15m
(গ) 20m
(ঘ) 25m

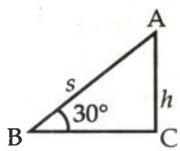
১০৪। প্রথম ফোঁটা ভূমিতে পড়ার মুহূর্তে তৃতীয় ফোঁটা ও দ্বিতীয় ফোঁটার বেগের অনুপাত—
(ক) 4 : 1
(খ) 2 : 1
(গ) 1 : 2
(ঘ) 1 : 4

১০৫। 100 m দীর্ঘ একটি ট্রেন 45 kmh^{-1} বেগে চলে 1 km দীর্ঘ একটি ব্রিজ অতিক্রম করে। ব্রিজটি অতিক্রম করতে ট্রেনটির কত সময় লাগবে? [Admission Test : BUTex 2014-15; BUET 2009-10; BSMRSTU 2019-20 (মান ভিন্ন)]
(ক) 10 s
(খ) 20 s
(গ) 40 s
(ঘ) 88 s

১০৬। $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$-এর ক্ষেত্রে s বনাম t লেখচিত্র অঙ্কন করলে লেখচিত্রটি কী হবে? [BuTex Admission Test, 2014-15]
(ক) অধিবৃত্ত
(খ) পরাবৃত্ত
(গ) উপবৃত্ত
(ঘ) আয়তাকার পরাবৃত্ত

১০৭। একটি বেলুন 4.9 ms^{-1} বেগে সোজা ওপরে উঠছে। যখন বেলুনটির উচ্চতা 200 m, তখন বেলুন থেকে একটা পাথর ফেলা হলো। পাথরটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে?
(ক) 1.225 m
(খ) 6.25 m
(গ) 4.115 m
(ঘ) 3.225 m

১০৮। ভূমির সাথে 30° কোণে আনত একটি মসৃণ তল AB-এর সর্বোচ্চ বিন্দু A থেকে একটি মসৃণ বস্তু গড়িয়ে 10 sec পরে সর্বনিম্ন বিন্দু B-তে আসল। ভূমি হতে A-এর উচ্চতা হলো— [CUET Admission Test, 2012-13; 2014-15]



(ক) 212.25 m
(খ) 122.5 m
(গ) 368.48 m
(ঘ) কোনোটিই নয়

১০৯। একটি ট্রেন 50 kmh^{-1} বেগে চলা অবস্থায় ব্রেক কষে 60 cms^{-2} মন্দন সৃষ্টি করা হলো। ট্রেনটি কতদূর গিয়ে থামবে?
[CUET Admission Test, 2014-15]
Ⓚ 160·55 m
Ⓚh 150·55 m
Ⓖ 277·89 m
Ⓖh 158 m

১১০। একটি বস্তুকে 400 m উচ্চতা থেকে নিচে ছোড়া হলো এবং একই সময়ে একটি বস্তুকে 50 ms^{-1} বেগে নিচ হতে খাড়া ওপরে ছোড়া হলো। কত উচ্চতায় বস্তু দুটি মিলিত হবে?
[Admission Test : KUET 2012-13; JKKNIU 2018-19 (মান ভিন্ন); JUST 2011-12 (মান ভিন্ন); CKRUET 2020-21]
(ক) 180 m
(খ) 160 m
(গ) 120 m
(ঘ) 80 m

১১১। কোনো একটি বস্তুকে ভূপৃষ্ঠ হতে কত কোণে 45 ms^{-1} বেগে ছুড়লে 250 m দূরে গিয়ে পড়বে?
[BUET, KUET, CUET, RUET Admission Test, 2015-16]
(ক) 39·72°
(খ) 37·72°
(গ) 35·72°
(ঘ) 36·72°

১১২। 22 ms^{-2} মন্দন সৃষ্টিকারী বল প্রয়োগ করে একটি গাড়িকে 44 m দূরে থামানো হলে ওই গাড়িটির আদি বেগ কত? [Admission Test : RUET 2012-13; RU 2013-14; MBSTU 2015-16 (মান ভিন্ন)]
(ক) 40 ms^{-1}
(খ) 36 ms^{-1}
(গ) 22 ms^{-1}
(ঘ) 11 ms^{-1}
(ঙ) 44 ms^{-1}

১১৩। একটি দেয়াল ঘড়ির মিনিটের কাঁটার দৈর্ঘ্য 20 cm হলে এর প্রান্তের রৈখিক বেগ কত?
[RUET Admission Test, 2014-15]
(ক) $3{\cdot}49 \times 10^{-4}$ ms^{-1}
(খ) $9{\cdot}34 \times 10^{-4}$ ms^{-1}
(গ) $3{\cdot}94 \times 10^{-3}$ ms^{-1}
(ঘ) $8{\cdot}34 \times 10^{-4}$ ms^{-1}
(ঙ) কোনোটিই নয়

১১৪। একজন ক্রিকেটার একটি বলকে সর্বোচ্চ 100 m অনুভূমিক দূরত্বে ছুড়তে পারে। একই বলকে ক্রিকেটার মাটি থেকে ওপরের দিকে কত উচ্চতায় ছুড়তে পারবে?
[Admission Test : BUET 2007-08; BRU 2016-17; JUST 2015-16]
(ক) 50 m
(খ) 75 m
(গ) 100 m
(ঘ) 125 m

১১৫। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে ভূপৃষ্ঠ থেকে 50 ms^{-1} বেগে বুলেট ছোড়া হলো। বুলেটটি 600 m দূরে অবস্থিত দেওয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে? [Admission Test : KUET 2018-19; JU 2018-19 (মান ভিন্ন)]
(ক) 13·65 m
(খ) 25·23 m
(গ) 15·825 m
(ঘ) 46·24 m
(ঙ) 29·94 m

১১৬। যদি কোনো প্রাসের সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা R হয় তবে তার আরোহিত সর্বোচ্চ উচ্চতা হবে—
(ক) 4 R
(খ) R/2
(গ) R/4
(ঘ) 2 R

১১৭। গাড়ি A সোজা রাস্তায় 60 kmh^{-1} সমবেগে চলছে। অন্য একটি গাড়ি B একই পথে 70 kmh^{-1} সমবেগে A গাড়িটিকে অনুসরণ করছে। যখন গাড়ি দুটির মধ্যকার দূরত্ব 2·5 km হয় তখন B গাড়িটির গতিবেগ 20 kmh^{-1} হারে হ্রাস পেতে থাকে। কত দূরত্ব ও সময় পর B গাড়িটি A গাড়িটিকে ধরতে পারবে?
[CUET 2015-16; Medical 2022-23]
(ক) 37·5 km and 0·25 hr
(খ) 32·5 km and 0·50 hr
(গ) 30 km and 0·50 hr
(ঘ) 60 km and 0·25 hr

১১৮। 100 m দীর্ঘ একটি ট্রেন 45 kmh^{-1} বেগে চলে 1 km দীর্ঘ একটি ব্রিজ অতিক্রম করে। ব্রিজটি অতিক্রম করতে ট্রেনটির কত সময় লাগবে?
[BuTex 2014-15, 2013-14; Medical 2022-23]
(ক) 10 s
(খ) 20 s
(গ) 40 s
(ঘ) 88 s

১১৯। একটি বাস তার ভ্রমনের শুরুতে অর্ধেক অংশ 15 ms^{-2} ত্বরণে এবং অবশিষ্ট অংশে 5 ms^{-2} মন্দনে চলে পুরো পথ জুড়ে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব 120 m হলে চলার সর্বোচ্চ বেগ কত? [BUET 2022-23]
ক $20\sqrt{2}\,ms^{-1}$
খ $30\sqrt{2}\,ms^{-1}$
গ $30\sqrt{3}\,ms^{-1}$
ঘ $20\sqrt{3}\,ms^{-1}$

১২০। একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি কত অনুভূমিক দূরত্ব অতিক্রম করবে? [Medical 2023-24]
ক খাড়া উচ্চতা
খ খাড়া উচ্চতার চারগুণ
গ খাড়া উচ্চতার তিনগুণ
ঘ খাড়া উচ্চতার দ্বিগুণ

১২১। একটি বলকে ভূমির সাথে 45° কোণে নিক্ষেপ করা হলে x দূরত্বে একটি দেয়ালকে কোনো মতে অতিক্রম করে ও দেওয়াল থেকে y দূরত্বে ভূমিতে পড়ে। দেওয়ালের উচ্চতা কত? [BUET 2022-23]
ক $\frac{y}{(x+y)x}$
খ $\frac{x}{(x+y)y}$
গ $\frac{xy}{x-y}$
ঘ $\frac{xy}{x+y}$

১২২। ভূমির সাথে 60° আনত একটি প্রক্ষেপকের অনুভূমিক পাল্লা ও সর্বোচ্চ উচ্চতার অনুপাত কত? [BUET 2022-23]
ক $3:2$
খ $\sqrt{3}:4$
গ $4:\sqrt{3}$
ঘ $4:3$

১২৩। ঘড়ির কাঁটার গতি কোন প্রকারের গতি ? [Medical 2018-19]
ক বক্রচলন গতি
খ ঘূর্ণন গতি
গ চলন ঘূর্ণন গতি
ঘ পর্যাবৃত্ত গতি

১২৪। একটি বস্তুকণার মোট শক্তি পরিমাপ করে স্থিতাবস্থার তিনগুণ পাওয়া গেল। বস্তুটির দ্রুতি কত? [AFMC 2022-23]
ক $\frac{\sqrt{3}}{2}c$
খ $\frac{2}{\sqrt{3}}c$
গ $2\frac{\sqrt{3}}{2}c$
ঘ $\frac{3}{2}\sqrt{2}c$

১২৫। টর্কের মান কখন শূন্য হয়? [IU 2017-18]
ক ঘূর্ণন কম হলে
খ ঘূর্ণন অপরিবর্তিত থাকলে
গ ঘূর্ণন শূন্য হলে
ঘ ঘূর্ণন বেশি হলে

১২৬। স্থিতাবস্থা থেকে কোনো বস্তুকণা সুষম ত্বরণে অনুভূমিক সরলরেখা বরাবর যাত্রা শুরু করল। চতুর্থ ও তৃতীয় সেকেন্ডে তার অতিক্রান্ত দূরত্বের অনুপাত হবে— [Medical 24-25]
ক $26:9$
খ $4:3$
গ $7:5$
ঘ $2:1$

১২৭। স্থিতিশীল অবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে একটি বস্তু 5 সেকেন্ডে 187·5 মিটার পথ অতিক্রম করলে বস্তুটির ত্বরণ কত? [Medical 24-25]
ক $15\,ms^{-2}$
খ $25\,ms^{-2}$
গ $7{\cdot}5\,ms^{-2}$
ঘ $5\,ms^{-2}$

১২৮। একটি বস্তু 4·9 ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হলে এটি কত সময় শূন্যে থাকবে? [Medical 24-25]
ক 2s
খ 1s
গ 4s
ঘ 3s

১২৯। একটি পাথরকে 4·9 ms^{-1} বেগে সোজা উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। কত সময় পর পাথরটি ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসবে? [Dental 24-25]
ক 2 seconds
খ 4·9 seconds
গ 1 second
ঘ 9·8 seconds

১৩০। ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টরের মান শূন্য হবে যদি— [ব. বো. ২০২৪]
i. ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টরের মান শূন্য হয়
ii. বলের মান শূন্য হয়
iii. অবস্থান ভেক্টর ও বলের মধ্যবর্তী কোণ 90° হয়

নিচের কোনটি সঠিক?
ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

১৩১। কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার নিচের কোনটির সমান? [চ. বো. ২০২৪]

ⓚ টর্কের
ⓚ বলের
ⓖ জড়তার ভ্রামকের
ⓖ কৌণিক ত্বরণের

১৩২। 10 gm ভরের একটি বল 100 cms^{-1} বেগে একটি উল্লম্ব দেয়ালে অনুভূমিকভাবে আঘাত করে একই বেগে ফিরে গেল। দেয়াল কর্তৃক প্রযুক্ত বলের ঘাত কত dyne-sec? [ঢা. বো. ২০২৪]

ⓚ 0
ⓚ 100
ⓖ 1000
ⓖ 2000

১৩৩। h উচ্চতা থেকে ভূমিতে পড়ার ক্ষেত্রে শেষ বেগ v হলে প্রয়োজনীয় সময় নিচের কোনটি?

[ম. বো. ২০২৪]

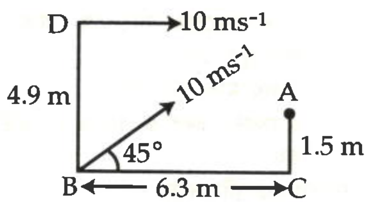
ⓚ $\frac{2v}{g}$
ⓚ $\frac{v}{2g}$
ⓖ $\frac{v}{g}$
ⓖ $\frac{v^2}{2g}$

উত্তর :

১। (গ)	২। (ঘ)	৩। (গ)	৪। (খ)	৫। (ক)	৬। (গ)	৭। (ক)	৮। (ক)	৯। (ক)	১০। (খ)
১১। (খ)	১২। (ক)	১৩। (ঘ)	১৪। (ক)	১৫। (ক)	১৬। (ঘ)	১৭। (খ)	১৮। (খ)	১৯। (গ)	২০। (গ)
২১। (গ)	২২। (গ)	২৩। (খ)	২৪। (ঘ)	২৫। (ঘ)	২৬। (ঘ)	২৭। (খ)	২৮। (ঘ)	২৯। (খ)	৩০। (ক)
৩১। (ক)	৩২। (খ)	৩৩। (ঘ)	৩৪। (গ)	৩৫। (গ)	৩৬। (ক)	৩৭। (খ)	৩৮। (ঘ)	৩৯। (গ)	৪০। (গ)
৪১। (খ)	৪২। (ক)	৪৩। (গ)	৪৪। (গ)	৪৫। (ঘ)	৪৬। (ঘ)	৪৭। (খ)	৪৮। (গ)	৪৯। (ঘ)	৫০। (খ)
৫১। (খ)	৫২। (খ)	৫৩। (গ)	৫৪। (খ)	৫৫। (গ)	৫৬। (খ)	৫৭। (খ)	৫৮। (ক)	৫৯। (ক)	৬০। (ক)
৬১। (গ)	৬২। (ক)	৬৩। (গ)	৬৪। (খ)	৬৫। (ক)	৬৬। (ঘ)	৬৭। (খ)	৬৮। (ক)	৬৯। (গ)	৭০। (গ)
৭১। (খ)	৭২। (ক)	৭৩। (ক)	৭৪। (খ)	৭৫। (ক)	৭৬। (ঘ)	৭৭। (ঘ)	৭৮। (গ)	৭৯। (ক)	৮০। (গ)
৮১। (ক)	৮২। (ক)	৮৩। (গ)	৮৪। (ক)	৮৫। (গ)	৮৬। (গ)	৮৭। (ক)	৮৮। (ঘ)	৮৯। (খ)	৯০। (গ)
৯১। (গ)	৯২। (ক)	৯৩। (গ)	৯৪। (ক)	৯৫। (ঘ)	৯৬। (ক)	৯৭। (ক)	৯৮। (খ)	৯৯। (ঘ)	১০০। (ঘ)
১০১। (গ)	১০২। (গ)	১০৩। (ঘ)	১০৪। (খ)	১০৫। (ঘ)	১০৬। (খ)	১০৭। (ক)	১০৮। (খ)	১০৯। (ক)	১১০। (ঘ)
১১১। (খ)	১১২। (ঙ)	১১৩। (ক)	১১৪। (ক)	১১৫। (খ)	১১৬। (গ)	১১৭। (খ)	১১৮। (ঘ)	১১৯। (খ)	১২০। (খ)
১২১। (ঘ)	১২২। (গ)	১২৩। (গ)	১২৪। (গ)	১২৫। (ঘ)	১২৬। (গ)	১২৭। (ক)	১২৮। (খ)	১২৯। (গ)	১৩০। (ক)
১৩১। (ক)	১৩২। (ঘ)	১৩৩। (খ)							

(খ) সৃজনশীল প্রশ্ন

১।



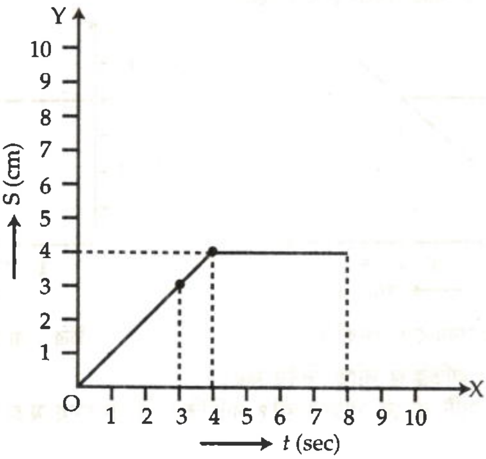
A বিন্দুকে আঘাত করার জন্য B ও D বিন্দুতে অবস্থানরত দুই বন্ধু একই সময়ে চিত্রের ন্যায় ঢিল নিক্ষেপ করে। [$g = 9.8\ ms^{-2}$]

(ক) B বিন্দুতে অবস্থানরত বন্ধুর নিক্ষিপ্ত ঢিলটির 0·2s পর বেগ কত হিসাব কর।

(খ) কোন বন্ধুর নিক্ষিপ্ত ঢিলটি A বিন্দুকে আগে স্পর্শ করবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

[কু. বো. ২০১৬]

২। একটি বস্তুর সরণ (s) বনাম সময় (t)-এর লেখচিত্র দেখানো হলো :



(ক) লেখচিত্রের AB অংশে বস্তুর ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

(খ) লেখচিত্রের BC রেখাটি বস্তুটির সমবেগ না স্থিরাবস্থা নির্দেশ করবে? গাণিতিকভাবে যাচাই কর।

[রা. বো. ২০১৬]

৩। কমলাপুর রেল স্টেশন থেকে একটি ট্রেন $0\text{·}5\ ms^{-2}$ সমত্বরণে চলতে আরম্ভ করল। একই সময়ে একটি খরগোশ $5\ ms^{-1}$ সমবেগে ট্রেনটির সমান্তরাল পথে যাত্রা শুরু করল। এক পর্যায়ে ট্রেনটি খরগোশটিকে অতিক্রম করে।

(ক) খরগোশটি কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করার পর ট্রেনটি খরগোশটিকে পেছনে ফেলবে ?

(খ) উদ্দীপকের ঘটনাটি নিউটনের গতির তৃতীয় সমীকরণটিকে সমর্থন করে কি ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও।

৪। তানিয়া একটি বস্তুকে 180 m উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে ফেলে দিল। একই সময়ে তার বন্ধু জয়িতা একটি বস্তুকে $60\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করল। নিক্ষিপ্ত বস্তুটি সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠে আবার ভূমিতে পতিত হয়।

(ক) উদ্দীপকের দুই বন্ধুর বস্তু দুটি কখন এবং কোথায় মিলিত হবে ?

(খ) গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও যে, ভূমি হতে সর্বাধিক উচ্চতায় উঠাতে বস্তুর যে সময় লাগে সর্বাধিক উচ্চতা হতে ভূমিতে পৌঁছাতে সেই একই সময় লাগে।

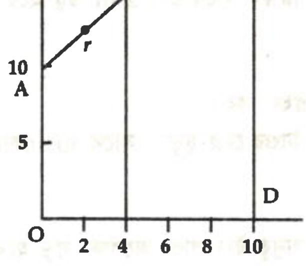
৫। 142 cm এবং 122 cm ব্যাসের দুটি বৈদ্যুতিক পাখা বানানো হলো। প্রথমটি মিনিটে 150 বার ও দ্বিতীয়টি মিনিটে 180 বার ঘুরে। সুইচ বন্ধ করার 2s পর উভয় পাখা থেমে যায়।

(ক) প্রথম পাখাটির প্রান্তবিন্দুতে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কত ?

(খ) সুইচ বন্ধ করার পর থেমে যাবার আগ পর্যন্ত উভয় পাখাই কী সমান সংখ্যকবার ঘুরে থেমেছে—যাচাই কর।

[কু. বো. ২০১৭]

৬।

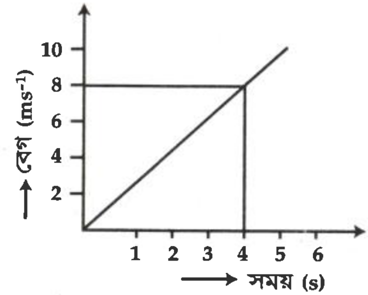


(ক) AB-এর মধ্যবিন্দুর ত্বরণ নির্ণয় কর।

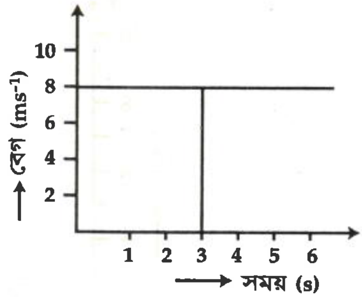
(খ) ABC অংশের অতিক্রান্ত দূরত্ব লেখচিত্রের মাধ্যমে ও গতির সমীকরণের মাধ্যমে সমান পাওয়া যাবে কি না—গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর।

[মাদরাসা বোর্ড ২০১৮]

৭। একটি বাস চলতে শুরু করার সাথে সাথে বাসের 16m পিছন থেকে একজন যাত্রী বাসটি ধরার জন্য দৌড় দেয়। যাত্রী ও বাসের সময় বনাম বেগ লেখচিত্র নিচে দেওয়া হলো :



চিত্র : বাসের সময়-বেগ লেখচিত্র।

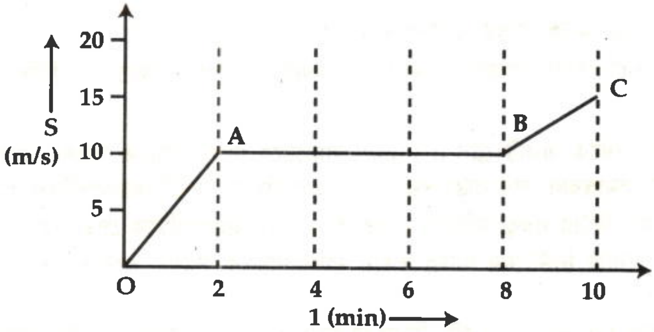


চিত্র : যাত্রীর সময়-বেগ লেখচিত্র।

(ক) বাসটি কর্তৃক 4s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের যাত্রী বাসটি ধরতে পারবে কী? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [কু. বো. ২০১৯]

৮।

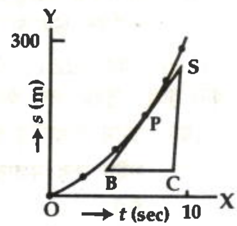


লেখচিত্রে একটি গাড়ির যাত্রাকালীন প্রথম 10 মিনিটে বেগের পরিবর্তন দেখানো হয়েছে।

(ক) গড় বেগের ভৌত সংজ্ঞানুযায়ী গাড়িটির গতিকালীন প্রথম চার মিনিটে গড় বেগ নির্ণয় কর।

(খ) 'গাড়িটির 10 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব লেখচিত্রের অন্তর্ভূক্ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান'—উক্তিটির যথার্থতা গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০১৯]

৯। লেখচিত্রে স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা শুরু করে 10 sec-এ দূরত্ব দেখানো হয়েছে।



(ক) স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা শুরু করে একটি বস্তু 10 সেকেন্ডে 300 m দূরত্ব অতিক্রম করে। বস্তুটির ত্বরণ কত ?

(খ) উদ্দীপকের লেখচিত্রের কী কী বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয় ? বিশ্লেষণ কর।

১০। ফ্রান্স ও জার্মানির মধ্যকার ফুটবল ম্যাচের এক পর্যায়ে ফ্রান্সের খেলোয়াড় জিদান গোলপোস্ট হতে 10·97 m দূরে রক্ষিত একটি ফুটবলে কিক করায় বলটি অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 14 ms^{-1} বেগে সোজা গোল পোস্টের মধ্য বরাবর ধাবিত হয়। 2·44 m উঁচু গোল পোস্ট হতে 1 m সামনে দাঁড়ানো গোলরক্ষক সর্বোচ্চ 2·2 m উঁচু হতে বল ধরতে পারে।

(ক) বলটির সর্বোচ্চ উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত বলটি গোল হবে কি না—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

১১। 30 m উঁচু একটি টাওয়ারের ওপর থেকে একটি বস্তুকে 20 ms^{-1} বেগে টাওয়ারের চূড়ার সাথে 30° কোণে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো।

(ক) বস্তুটি ভূমিতে পৌঁছাতে কত সময় লাগবে?

(খ) "বস্তুটি ভূমিতে আঘাত করার পূর্বে অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব অনুভূমিক পাল্লা অপেক্ষা বড় হবে।"—গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে প্রমাণ কর।

১২। 30 m উঁচু একটি গাছের ডালে বসে পাখি শিকারের জন্য একজন শিকারি 20 ms^{-1} অনুভূমিক বেগে একটি বুলেট ছুড়ে দিল। একই সময় একই উচ্চতা হতে শিকারির পকেটে রাখা একটি বুলেট মাটিতে পড়ে গেল।

(ক) বুলেট কর্তৃক অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) বুলেট দুইটির মধ্যে কোনটি আগে মাটিতে পতিত হবে? গাণিতিক ব্যাখ্যাসহ যুক্তি উপস্থাপন কর।

১৩। ঢাকা থেকে একটি বাস 60 kmh^{-1} সমবেগে সোজা উত্তর দিকে রওনা দিল। একই সময়ে অপর একটি বাস একই সমবেগে সোজা পূর্বদিকে রওনা দিল।

(ক) 3 ঘণ্টা পর বাস দুটির মধ্যে দূরত্ব কত হবে ?

(খ) বাস দুটির বেগ কি সমান ? ব্যাখ্যা কর। কত ঘণ্টা পরে বাস দুটির মধ্যে দূরত্ব 800 km হবে ?

১৪। রাশিদ একটি ছোট্ট পাথরকে একটি সুতা দিয়ে বেঁধে সুতার অপর প্রান্ত ধরে পাথরটিকে ঘুরাতে থাকে। পাথরটি একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরছে দেখে রাশিদ অবাক দৃষ্টিতে চেয়ে থাকে। এবার রাশিদ তার গ্রামোফোনটি অন করে দেখে রেকর্ডটি সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। রাশিদ রেকর্ডের উপর কেন্দ্র হতে 0·12 m ও 0·18 m দূরের বিন্দুতে রৈখিক বেগের অনুপাত নির্ণয় করে।

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত রৈখিক বেগদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

(খ) পাথর এবং গ্রামোফোন রেকর্ডের ভর একই বিবেচনা করে উভয় ক্ষেত্রে কেন্দ্রমুখী ত্বরণের অনুপাত নির্ণয় কর।

১৫। হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার কক্ষপথে ঘুরছে।

(ক) বৃত্তের ব্যাসার্ধ যদি $5{\cdot}2 \times 10^{-11}$ m হয় এবং ইলেকট্রনের বেগ যদি $2{\cdot}20 \times 10^{6}$ ms^{-1} হয় তা হলে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কত হবে ?

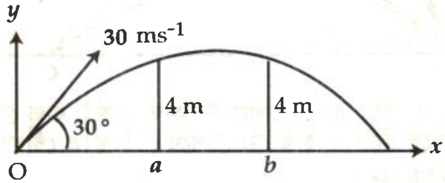
(খ) ইলেকট্রন যদি সমদ্রুতিতে চলে তাহলে কি কেন্দ্রমুখী ত্বরণ পাওয়া যাবে ? উদ্দীপকের আলোকে বিশ্লেষণ কর।

১৬। 20 m উঁচু একটি দালানের ছাদ থেকে একটি লোক 40 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকভাবে বুলেট ছুড়ল। একই সময়ে অপর একটি লোক একই উচ্চতা হতে একটি বুলেট স্থির অবস্থা হতে নিচে ফেলে দিল। [বাতাসের বাধা অনুপস্থিত।]

(ক) ১ম বুলেট কর্তৃক অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) কোন বুলেটটি আগে ভূমিতে আঘাত করবে ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

১৭।



ওপরের চিত্রে প্রাসের গতি দেখানো হলো।

(ক) প্রাসটির উচ্চতা কত ছিল ?

(খ) প্রাসটির অনুভূমিক পাল্লা এবং ab অংশের দৈর্ঘ্য গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে তুলনা কর।

[য. বো. ২০১৫; ব. বো. ২০১৫]

১৮। 750 ms^{-1} বেগে একটি বুলেট রাইফেল থেকে নির্গত হলো। রাইফেলের নলের দৈর্ঘ্য 0·6 m।

(ক) বুলেটের গড় ত্বরণ কত?

(খ) যদি বুলেটটি প্রাস হয় তবে দেখাও যে, ভিন্ন ভিন্ন কোণে একই বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব একই থাকবে ? [য. বো. ২০১৫]

১৯। 60 m গড় ব্যাসার্ধের একটি ক্রিকেট মাঠে ক্রিকেট A দল ফিল্ডিং এবং B দল ব্যাট করছে। একজন বোলার 100 kmh^{-1} বেগে ব্যাটসম্যানের দিকে বল নিক্ষেপ করলে ব্যাটসম্যান অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে বলটিকে আঘাত করে। ফলে বলটি বোলারের নিক্ষেপ বেগের সমান বেগ লাভ করে। সংশ্লিষ্ট ব্যাটসম্যান হতে 20 m দূরে অবস্থানরত একজন ফিল্ডার ব্যাটসম্যান কর্তৃক বলে আঘাত করার সাথে সাথে বল অভিমুখে 10 ms^{-1} বেগে দৌড় শুরু করল।

(ক) উদ্দীপকের বলটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে ?

(খ) উদ্দীপকের ঘটনার ব্যাটসম্যানকে 'ক্যাচ আউট' করা সম্ভব কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [অভিন্ন বোর্ড, ২০১৮]

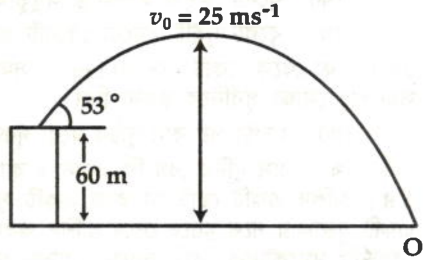
২০। অপু 20 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার মাঠের চতুষ্পার্শ্বে সর্বোচ্চ 30° কোণে কেন্দ্রের দিকে হেলানো অবস্থায় নিরাপদে সাইকেল চালাতে পারে। সে 20 kmh^{-1} বেগে সাইকেল চালাচ্ছিল।

(গ) বৃত্তাকার পথে 5 km-এর সমান পথ অতিক্রম করতে কত বার মাঠ প্রদক্ষিণ করতে হবে ?

(ঘ) উদ্দীপকে উল্লেখিত মাঠে দ্বিগুণ বেগে অপু ওই পথ নিরাপদে অতিক্রম করতে পারবে। সত্যতা যাচাই কর।

[অভিন্ন বোর্ড, ২০১৮]

২১। 60 m উচ্চতাবিশিষ্ট একটি পাহাড়ের চূড়া হতে একটি কামানের গুলি $25\ ms^{-1}$ বেগে অনুভূমিকের সাথে 53° কোণে ছোড়া হচ্ছে [নিচের চিত্র]। [কু. বো. ২০১৫]



(ক) কামানের গুলিটি ভূমি হতে সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় উঠবে?

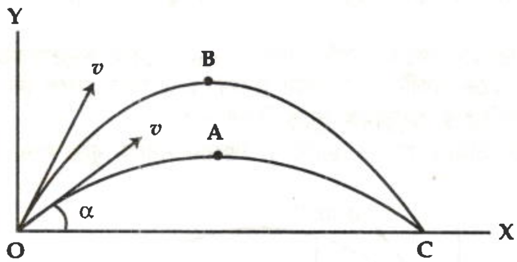
(খ) পাহাড়ের চূড়া হতে উদ্দীপকে বর্ণিত গুলির অনুরূপ একটি কামানের গুলি একই সময় একই বলে অনুভূমিক বরাবর নিক্ষেপ করা হলে কোনটি আগে মাটিতে আঘাত করবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

২২। বিজ্ঞান মেলাকে আকর্ষণীয় করার জন্য প্রবেশপথের দুপাশে পানির ফোয়ারা স্থাপন করা হলো। তাদের মধ্যে একটির পানির ফোঁটাগুলো $5\ ms^{-1}$ বেগে এবং 60° কোণে ছড়িয়ে পড়ছে। অপর ফোয়ারার পানির ফোঁটাগুলো $6\ ms^{-1}$ বেগে এবং 30° কোণে ছড়িয়ে পড়ছে।

(ক) 0·6 sec সময়ে ১ম ফোয়ারার পানির ফোঁটার বেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের কোন ফোয়ারার পানির ফোঁটাগুলো বেশি অঞ্চল জুড়ে ছড়িয়ে পড়বে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [চ. বো. ২০১৯]

২৩।



চিত্রের O বিন্দু হতে $30\ kms^{-1}$ বেগে এবং α কোণে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু OAC পথে 3·062 s সময়ে C বিন্দুতে পৌঁছায়। বস্তুটিকে একই বেগে নিক্ষেপ করে OBC পথে C বিন্দুতে পৌঁছানো সম্ভব।

(ক) উদ্দীপকের α কোণ নির্ণয় কর।

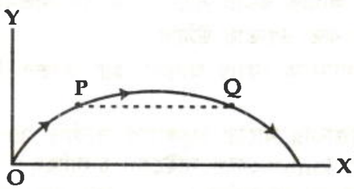
(খ) উদ্দীপকের বস্তুর OBC পথে C বিন্দুতে পৌঁছানোর সম্ভাব্যতার গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [ব. বো. ২০১৯]

২৪। একদিন এক প্রীতি ম্যাচ খেলার সময় প্রিতম ব্যাট দিয়ে আঘাত করায় বলটি পার্শ্ববর্তী একটি উঁচু ভবনের ছাদে পড়ল। ডাক্তারের নিষেধ থাকায় প্রিতম 96 m এর বেশি উঁচুতে উঠতে অস্বীকৃতি জানিয়ে ছাদে বল আনতে গেল না। প্লাবন ছাদে উঠে বলটিকে উলম্বের সাথে 60° কোণে $5\ ms^{-1}$ বেগে নিচে ফেলে দিল। বলটি ছুড়ে মারার 3 sec পরে ভূমি থেকে 2 m উঁচুতে প্রিতম বলটি ধরে ফেলল।

(ক) বলটি কত বেগে প্রিতমের হাতে আঘাত করেছিল?

(খ) উদ্দীপকের তথ্য অনুসারে প্রিতম ছাদে উঠতে পারত কি না? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও। [সি. বো. ২০১৯]

২৫। চিত্র অনুসারে একটি প্রাস 1 s পরে P বিন্দুতে পৌঁছায়। $\overrightarrow{OP} = (10\hat{i} + 12\hat{j})$m হয়। প্রাসের P ও Q বিন্দুর উচ্চতা সমান।



(ক) প্রাসটির নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রাসটির P বিন্দুর গতিশক্তি ও সর্বোচ্চ বিন্দুর গতিশক্তি একই হবে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [দি. বো. ২০১৯]

২৬। সার্কাস পার্টিতে একজন পারফরমার 5 kg ভরের একটি গোলককে ভূমি থেকে 1·5 m ওপরে অনুভূমিক তলে 2 m লম্বা রশির সাহায্যে বৃত্তাকার পথে ঘোরাচ্ছেন। গোলকটি প্রতি মিনিটে 20 বার আবর্তন করে। ঘূর্ণায়মান অবস্থায় হঠাৎ রশিটি ছিঁড়ে যায়।

(ক) আবর্তনশীল গোলকটি কেন্দ্রের দিকে কত বল অনুভব করবে?

(খ) পারফরমার হতে দর্শক সারির দূরত্ব কেমন হলে গোলকটি কোনো দর্শককে আঘাত করবে না? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০১৫]

২৭। একজন সার্কাসের খেলোয়াড় মাথার ওপরে উল্লম্ব তলে বস্তুকে একটি দীর্ঘ সুতায় 90 cm দূরত্বে বেঁধে প্রতি মিনিটে 100 বার ঘুরাচ্ছে। হঠাৎ করে ঘূর্ণায়মান বস্তুটির এক-তৃতীয়াংশ খুলে পড়ে গেল। এতে খেলোয়াড় ভীত না হয়ে প্রতি মিনিটে ঘূর্ণন সংখ্যা একই রাখার জন্য প্রয়োজনমতো সুতার দৈর্ঘ্য বাড়িয়ে দিল।

(ক) বস্তুটির ভর কমে যাওয়ায় পূর্বে এর কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কত ছিল হিসাব কর।

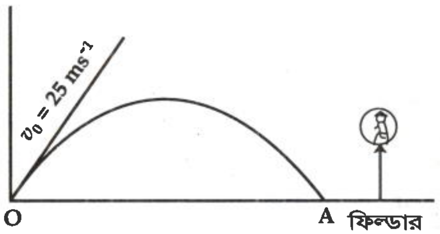
(খ) সার্কাসের খেলোয়াড় সুতার দৈর্ঘ্যের যে পরিবর্তন এনেছিলেন গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সঠিকতা যাচাই কর। [ব. বো. ২০১৫]

২৮। ভারত বনাম বাংলাদেশের ক্রিকেট ম্যাচে ব্যাটসম্যান বিরাট কোহলীর দিকে সাকিব আল হাসান বল করলেন। 20 ms^{-1} বেগে এবং 30° কোণে ব্যাটসম্যান বলটিকে আঘাত করলেন। ব্যাটসম্যান হতে 60 m দূরে থাকা রুবেল 8 ms^{-1} বেগে দৌড়ে বলটি ক্যাচ ধরার জন্য অগ্রসর হলেন।

(ক) বলটি কত সময় শূন্যে অবস্থান করবে ?

(খ) রুবেলের পক্ষে ক্যাচ ধরা সম্ভব কি ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত দাও। [ব. বো. ২০১৬]

২৯।



চিত্র O বিন্দু থেকে ব্যাটসম্যান-এর বলের আঘাতের সাথে সাথে ফিল্ডার ব্যাটসম্যান থেকে 80 m দূরে থেকে বলটি ক্যাচ ধরার জন্য 4 ms^{-1} সমবেগে দৌড় শুরু করল।

(ক) বলটির সর্বাধিক উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) ফিল্ডার বলটি ক্যাচ ধরতে পারে কি না? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [মাদরাসা বোর্ড ২০১৯]

[BUET Admission Test, 2018-19]

(গ) সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন

১। গড়বেগ কাকে বলে? [য. বো. ২০১৬]

২। তাৎক্ষণিক বেগ কাকে বলে? [ঢা. বো. ২০১৭; সি. বো. ২০১৭; মাদরাসা বো. ২০১৭]

৩। কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কী? [কু. বো. ২০১৭; মাদরাসা বো. ২০১৯, ২০১৭]

৪। স্পর্শীয় ত্বরণ কাকে বলে? [রা. বো. ২০১৭]

৫। প্রাস কাকে বলে? [দি. বো. ২০১৭]

৬। প্রাসের পাল্লা কী? [ঢা. বো. ২০১৯; দি. বো. ২০১৯]

৭। বৃত্তীয় গতি কাকে বলে? [য. বো. ২০১৯]

৮। প্রক্ষেপক কাকে বলে? [চ. বো. ২০১৯]

৯। আপেক্ষিক বেগ কাকে বলে? [ব. বো. ২০১৯]

১০। জড় কাঠামোর সংজ্ঞা লিখ। [ব. বো. ২০১৭]

১১। আপেক্ষিক গতি কাকে বলে?

১২। সংজ্ঞা দাও :
সরণ, বেগ, গড় বেগ, তাৎক্ষণিক বেগ, ত্বরণ, গড় ত্বরণ, তাৎক্ষণিক ত্বরণ, আপেক্ষিক বেগ, সমত্বরণ।

১৩। সরণ, বেগ ও ত্বরণের মাত্রা লিখ।

১৪। প্রাস কাকে বলে? সি. বো. ২০১৫]

১৫। তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলতে কী বোঝ? [দি. বো. ২০১৭, ২০১৫]

১৬। কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কী? [কু. বো. ২০১৭]

১৭। জড় কাঠামো কাকে বলে?

১৮। প্রসঙ্গ বিন্দু কী?

১৯। একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলতে কী বোঝ?

২০। ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো কী?
২১। পরম গতি বলতে কী বোঝ?
২২। সমত্বরণ কাকে বলে?
২৩। প্রক্ষেপক কাকে বলে?
২৪। পাল্লা কী?
২৫। সুষম বৃত্তীয় গতি বলতে কী বোঝ?
২৬। তাৎক্ষণিক বেগ কাকে বলে? [ঢা. বো. ২০১৭, ২০১৬; সি. বো. ২০১৭; য. বো. ২০১৫]
২৭। গড় বেগ কাকে বলে? [য. বো. ২০১৬]
২৮। পরম স্থিতি বলতে কী বোঝ?
২৯। প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০১৯; দি. বো. ২০১৯]

(ঘ) কাঠামোবদ্ধ ও বর্ণনামূলক প্রশ্ন

১। জড় প্রসঙ্গ কাঠামো কী ? এর প্রয়োজনীয়তা উল্লেখ কর।
২। একমাত্রিক, দ্বি-মাত্রিক, ত্রি-মাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় জড় প্রসঙ্গ কাঠামোর সাহায্যে কীভাবে কোনো বস্তুর অবস্থান নির্ণয় করা যায় ?
৩। পরম গতি কী ? "এ মহাবিশ্বের সকল স্থিতিই আপেক্ষিক, সকল গতিই আপেক্ষিক। কোনো গতিই পরম নয়, পরম নয় কোনো স্থিতি।"—উক্তিটির ব্যাখ্যা দাও।
৪। পরম গতি ও পরম স্থিতি বলতে কী বুঝ ?
৫। পরম গতি বা পরম স্থিতি নেই কেন—ব্যাখ্যা কর।
৬। তাৎক্ষণিক বেগ এবং আপেক্ষিক বেগের সংজ্ঞা দাও।
৭। গড়বেগ থেকে কীভাবে তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করা যায় ?
৮। অবস্থান-সময় লেখ থেকে কীভাবে বেগ নির্ণয় করা যায় ?
৯। বেগ-সময় লেখ থেকে কীভাবে ত্বরণ নির্ণয় করা যায় ?
১০। ক্যালকুলাস পদ্ধতিতে প্রমাণ কর : $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
১১। অসমবেগ কিন্তু সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ বনাম সময় লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং উক্ত লেখচিত্র থেকে প্রমাণ কর যে, $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
১২। সরণ বনাম সময় লেখচিত্রের সাহায্যে (i) সমবেগ, (ii) সমত্বরণ, (iii) সমমন্দন প্রকাশ কর।
১৩। প্রাস কী ? প্রাসের গতিপথ কীরূপ হবে ? এর সমীকরণটি লিখ। [চ. বো. ২০১৯; দি. বো. ২০১৭; সি. বো. ২০১৫]
১৪। প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতা, পাল্লার সমীকরণ নির্ণয় কর।
১৫। প্রাসের বেগ কোথায় শূন্য হবে ? সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছাতে কত সময় লাগবে ?
১৬। দেখাও যে প্রাসের গতিপথ একট অধিবৃত্ত।
১৭। দেখাও যে, 45° কোণে নিক্ষিপ্ত প্রাসের পাল্লা সর্বাধিক হয়।
১৮। পড়ন্ত বস্তুর সূত্রগুলি বিবৃত কর।
১৯। পড়ন্ত বস্তুর দ্বিতীয় সূত্রটি ব্যাখ্যা কর।
২০। কেন্দ্রমুখী ত্বরণের ভেক্টর রূপ আলোচনা কর। [রা. বো. ২০১৬]
২১। প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগ সর্বাপেক্ষা কম বা শূন্য হয়—ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৭; কু. বো. ২০১৭; চ. বো. ২০১৭]
২২। প্রাসের গতি দ্বিমাত্রিক হলেও একমাত্রিক হতে পারে কী ? ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৮; চ. বো. ২০১৮; ব. বো. ২০১৮]
২৩। খাড়া ওপরে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক দূরত্ব শূন্য হয় কেন—ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৫]
২৪। সুষম বৃত্তাকার গতির বৈশিষ্ট্য লিখ। [চ. বো. ২০১৫]
২৫। গুণ টানার ফলে নৌকা সামনের দিকে কীভাবে এগিয়ে চলে ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০১৫]
২৬। সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে কি? ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০১৫]
২৭। বৃত্তাকার পথে চলমান বস্তুর পর্যায়কাল ও কম্পাঙ্ক বলতে কী বুঝ ? এদের মধ্যে সম্পর্ক কী ?
২৮। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক কী ?
২৯। ঘূর্ণনশীল কণার ক্ষেত্রে রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগ পরস্পরের সাথে লম্ব—ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৭]
৩০। কোনো বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয়—ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৫]
৩১। "গড় বেগ শূন্য হলেও গড় গতি কখনো শূন্য হয় না"—এর ব্যাখ্যা লিখ। [ব. বো. ২০১৭]
৩২। উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিবেগ হ্রাস পায় কেন ? [দি. বো. ২০১৫; মাদ্রাসা বো. ২০১৯]

৩৩। কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কী ? দেখাও যে $v^2 = v_0^2 + 2as$ যেখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [মাদরাসা বোর্ড ২০১৫]

৩৪। বায়ু প্রবাহ না থাকলেও একজন সাইকেল আরোহী বাতাসের ঝাপটা অনুভব করেন কেন ? ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০১৯]

৩৫। প্রাসের গতি দ্বিমাত্রিক হলেও একমাত্রিক হতে পারে কি ? ব্যাখ্যা কর। [অভিন্ন প্রশ্ন খ-সেট, ২০১৮]

৩৬। প্রাসের ক্ষেত্রে কোন সময় বেগ সর্বোচ্চ হয় ? ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৯]

৩৭। প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি সর্বনিম্ন কি না—ব্যাখ্যা কর। [দি. বো. ২০১৯]

৩৮। উড্ডয়নকালে প্রাসের অনুভূমিক বেগের কোনো পরিবর্তন হয় কি—ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০১৮]

৩৯। বৃত্তাকার ট্র্যাকে কোনো দৌড়বিদ সমবেগে দৌড়াতে পারে না কেন ? [চ. বো. ২০১৯]

(ঙ) ক্রিয়াকর্ম

চিত্রে প্রদর্শিত লাফের সাথে প্রক্ষেপকের গতির সাদৃশ্যমূলক প্রতিবেদন তৈরি কর এবং শ্রেণিকক্ষে তা উপস্থাপন কর।

(চ) কাজ (গাণিতিক সমস্যা)

১। সরণ $\vec{r} = 4x^2t^3\hat{i} + 2y^2t^2\hat{j}$ হলে ব্যবকলনের সাহায্যে বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [উ. $12x^2t^2\hat{i} + 4y^2t\hat{j}$; $24x^2t\hat{i} + 4y^2\hat{j}$]

২। কোনো কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \{3.0\ \text{ms}^{-1})\ t + 4.2\ \text{m}\}\ \hat{i} + (15.3\ \text{m})\ \hat{j}$ হলে বেগ নির্ণয় কর। [উ. $3.0\ \text{ms}^{-1}\ \hat{i}$]

৩। একটি বস্তুর ওপর $\vec{F} = (6\hat{i} - 8\hat{j} + 10\hat{k})$ N বল প্রয়োগ করলে বস্তুর $1\ \text{ms}^{-2}$ ত্বরণ সৃষ্টি হয়। বস্তুর ভর কত ? [উ. 14.141 g]

৪। সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে, $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণ হতে ক্যালকুলাসের সাহায্যে দেখাও যে, $v = v_0 + at$

৫। স্থিরাবস্থা হতে চলতে আরম্ভ করে 625 m দূরত্ব অতিক্রম করলে একটি বস্তুর বেগ $125\ \text{ms}^{-1}$ হলো। ত্বরণ নির্ণয় কর। [উ. $12.5\ \text{ms}^{-2}$]

৬। ঘণ্টায় 40 km বেগে চলন্ত একটি গাড়িকে 6s যাবত $1.5\ \text{ms}^{-2}$ হারে ত্বরিত করা হলো। এর শেষ বেগ কত হবে এবং ত্বরণ কালে এটি কতদূর চলবে ? [উ. $20.11\ \text{ms}^{-1}$; 93.66 m]

৭। $20\ \text{ms}^{-1}$ বেগে গতিশীল একটি বস্তুর বেগ প্রতি সেকেন্ডে $3\ \text{ms}^{-1}$ হারে হ্রাস পায়। থেমে যাওয়ার আগে বস্তুটি কতদূর অতিক্রম করবে ? [উ. 66.67 m]

৮। একটি মোটর গাড়ি ঘণ্টায় 316.8 km বেগে চলে। ব্রেক চেপে একে 2 min-এ থামিয়ে দেয়া হলো। মন্দন এবং স্থিতিতে আসার পূর্ব মুর্হূত পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব বের কর। [উ. $\frac{11}{15}\ \text{ms}^{-2}$; 5280 m]

৯। দুটি মোটর গাড়ি $4\ \text{ms}^{-1}$ এবং $5\ \text{ms}^{-1}$ বেগে একই সময়ে যাত্রা শুরু করে এবং একই সময়ে গন্তব্যে পৌঁছায়। গাড়ি দুটির ত্বরণ যথাক্রমে $5\ \text{ms}^{-2}$ এবং $4\ \text{ms}^{-2}$ হলে তাদের গন্তব্যে পৌঁছাতে কত সময় লেগেছিল এবং গন্তব্যের দূরত্ব কত ছিল ? [উ. 8s; 256 m]

১০। একটি মোটরগাড়ি সরলরেখা বরাবর $20\ \text{ms}^{-1}$ বেগে চলছে। গাড়ির চালক 100 m দূরে $36\ \text{kmh}^{-1}$ গতিসীমা নির্দেশক চিহ্ন দেখতে পেলেন। ব্রেক কষে গাড়িটিতে কত মন্দন সৃষ্টি করলে ওই স্থানে গাড়িটি নির্দেশিত বেগ প্রাপ্ত হবে এবং ওই নির্দেশ চিহ্ন পর্যন্ত পৌছতে গাড়িটির কত সময় লাগবে ? [উ:.$1.5\ \text{ms}^{-2}$; 6.67 s]

১১। একটি ট্রেন $10\ \text{ms}^{-1}$ আদিবেগে এবং $3\ \text{ms}^{-2}$ সমত্বরণে চলছে। যখন 60 m পথ অতিক্রম করবে তখন ট্রেনটির বেগ কত ? [উ. $21.45\ \text{ms}^{-1}$]

১২। একটি জাহাজ প্রতি ঘণ্টায় 40 km বেগে পশ্চিম দিকে চলছে। অপর একটি জাহাজ ঘণ্টায় 30 km বেগে দক্ষিণ দিকে চলছে। প্রথম জাহাজ সাপেক্ষে দ্বিতীয় জাহাজের আপেক্ষিক গতিবেগ ও দিক নির্ণয় কর। [উ. $50\ \text{kmhr}^{-1}$, 36°]

১৩। একটি মোটর গাড়ি ঘণ্টায় 90 km বেগে চলে। ব্রেক চেপে একে 1 min-এ থামিয়ে দেয়া হলো। মন্দন এবং স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [উ. $\frac{5}{12}$ ms^{-2}; 750 m]

১৪। একটি মোটরগাড়ি 30 ms^{-1} বেগে চলছে। এ অবস্থায় ব্রেক কষায় গাড়িটির বেগ সমত্বরণে কমে 5 sec পরে 12 ms^{-1} হলো।(ক) গাড়িটির ত্বরণ ও (খ) পঞ্চম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [উ. —3·6 ms^{-2}; 13·8 m]

১৫। একটি যুদ্ধ বিমান 3 km উচ্চতায় 200 ms^{-1} বেগে উড়ে যাচ্ছে। একজন সৈনিক ভূমি থেকে বিমানটিকে গুলি করার জন্য তাক করছেন। যখন বিমানটি সৈনিকের ঠিক মাথার ওপর তখন তিনি 500 ms^{-1} বেগে গুলি ছুড়লেন। নিক্ষেপণ কোণ কত হলে গুলি বিমানটিকে আঘাত করবে ? [উ. 66°]

১৬। একটি রাইফেলের গুলি প্রতিটি 5 cm পুরুত্বের দুইটি কাঠের তক্তাকে ভেদ করতে পারে এবং পৃথকভাবে কোনো একটি দেয়ালের মধ্যে 20 cm ভেদ করতে পারে। গুলিটি দেয়ালের মধ্যে কতটুকু ভেদ করতে পারবে যদি উল্লিখিত তক্তার একটি তক্তা দেয়ালের সামনে সংযুক্ত করা থাকে ? [উ. 10 cm]

[BUET Admission Test, 2011-12]

১৭। দুটি গাড়ি একই সময়ে A ও B দুটি স্থান থেকে যথাক্রমে u_1 ও u_2 সুষম গতিবেগে যাত্রা শুরু করে পরস্পরের সাথে সাক্ষাতের পর যথাক্রমে t_1 ও t_2 সময়ে B এবং A স্থানে পৌঁছায়। দেখাও যে, $u_1 : u_2 = \sqrt{t_2} : \sqrt{t_1}$

১৮। 200 m দীর্ঘ একটি ট্রেন 36 kmh^{-1} গতিতে চলে 600 m দীর্ঘ একটি ব্রিজ অতিক্রম করে। ব্রিজটি অতিক্রম করতে ট্রেনটির কত সময় লাগবে ? [উ. 80 s]

[BUTex Admission Test, 2014-15, 2013-14; BUET Admission Test, 2009-10]

১৯। একজন অ্যাথলেট 10 ms^{-1} বেগে দৌড়াচ্ছে। সে সর্বোচ্চ কত দূরত্ব জাম্প করতে পারবে ? [উ. 10·02 m]

[BUET Admission Test, 2010-11]

২০। একটি বাঘ 8 m মিটার সম্মুখে একটি হরিণকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে 1 ms^{-2} ত্বরণে তার পেছনে দৌড়াতে থাকে। হরিণটি টের পেয়ে 3 ms^{-1} সমবেগে চলতে থাকলে কতক্ষণ পরে ও কত দূরত্ব অতিক্রমে বাঘটি হরিণটিকে ধরতে পারবে? [উ. 8 s ও 32 m]

২১। সমমন্দনে চলমান একটি ট্রেন প্রথম $\frac{1}{4}$ km অতিক্রম করে 26 s-এ এবং দ্বিতীয় $\frac{1}{4}$ km 30 s এ। ট্রেনটি সম্পূর্ণভাবে থামতে আর কতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করবে ? [উ. 120·08 m]

[BUET Admission Test, 2014-15]

২২। একটি বন্দুকের গুলি কোনো দেয়ালের মধ্যে 0·08 m প্রবেশ করার পর অর্ধেক বেগ হারায়। গুলিটি দেয়ালের মধ্যে আর কতদূর প্রবেশ করতে পারবে ?

[Hints : দেওয়ালের মধ্যে কতটুকু যায় তাকে 3 দ্বারা ভাগ করলে উত্তর পাওয়া যায়] [উ. 2·67 cm]

[JU Admission Test : JU 2017-18; NUST 2017-18; CUET 2017-18]

২৩। একটি প্রাসকে 10 ms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করা হলো। প্রাসটির সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [উ. 10·204 m]

২৪। কত কোণে নিক্ষেপ করলে একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা তার সর্বাধিক উচ্চতার সমান হবে ? [উ. 75·96°]

২৫। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 96m এবং আদিবেগ 66 ms^{-1}। নিক্ষেপ কোণ কত ? [উ. 6·24°]

২৬। একটি প্রাস অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 40 ms^{-1} বেগের ওপর দিকে নিক্ষিপ্ত হলে তার বিচরণকাল নির্ণয় কর। ($g = 10$ N/kg) [উ. 4 s]

২৭। অনুভূমিকের সাথে 60° কোণ করে ভূপৃষ্ঠ হতে 60 ms^{-1} বেগে একটি বুলেট ছোড়া হলো। বুলেটটি 50 m দূরে একটি দালানকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে ? [উ. 73 m]

২৮। একটি বস্তুকে 40 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে নিক্ষেপ করা হলো। সর্বাধিক উচ্চতা এবং অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [উ. 61·22 m; 141·39 m]

২৯। একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 10 ms^{-1} বেগে প্রক্ষেপ করা হলো। (i) সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছতে বস্তুটির কত সময় লাগবে ? (ii) 0·3 সে. পরে বস্তুটির বেগ কত ? (ধরে নাও, $g = 10\ ms^{-2}$) [উ. (i) 0·5 সে. (ii) 8·9 ms^{-1}]

৩০। একটি মিনারের শীর্ষদেশ থেকে একটি বন্দুকের গুলি অনুভূমিকভাবে 980 ms^{-1} বেগে ছোড়া হলো এবং এটি 2s পরে ভূমি স্পর্শ করল। মিনারের উচ্চতা এবং মিনারের পাদদেশ হতে যে স্থানে গুলি ভূমি স্পর্শ করল তার দূরত্ব বের কর। [উ. 19·6 m; 1960 m]

৩১। একটি বস্তুকণাকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 50 ms^{-1} বেগে ওপর দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি সর্বাধিক কত উচ্চতা অতিক্রম করবে এবং ওই উচ্চতা অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে ? ($g = 10$ N/kg) [উ. 31·88 m; 2·5 s]

৩২। একটি ক্রিকেট বলকে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো এবং এটি 6 সেকেন্ডে ওঠা-নামা করে। সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে কত সময় লাগবে এবং এই উচ্চতা কত হবে নির্ণয় কর। [$g = 10\ ms^{-2}$] [উ. 3s; 45 m]

৩৩। 64 m উঁচু দালানের ছাদ থেকে 5 kg ভরের একটি পাথর ছেড়ে দেয়া হলে ভূমিতে পৌছাতে এর কত সময় লাগবে ? [উ. 3·61 sec]

৩৪। একজন লোক $48{\cdot}0\ ms^{-1}$ বেগে একটি বল খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করে। বলটি কত সময় শূন্যে থাকবে এবং সর্বোচ্চ কত ওপরে উঠবে ? [উ. 9·795 s; 117·55 m]

৩৫। একটি বস্তুকে $98\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে দেখাও যে, 3 s এবং 17 s সময়ে বস্তুর বেগদ্বয়ের মান সমান কিন্তু দিক বিপরীতমুখী। [উ. উভয় ক্ষেত্রে বেগ $68{\cdot}6\ ms^{-1}$]

৩৬। $9{\cdot}2\ ms^{-1}$ বেগে একটি ক্ষুদ্র বস্তুকে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। এটি কত সময় পরে ভূপৃষ্ঠে ফিরে আসবে ? [উ. 1·878 s]

৩৭। একটি বস্তুকে $196\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটি আবার ভূমিতে ফিরে আসতে কত সময় লাগবে এবং বস্তুটি সর্বাধিক কত উচ্চতায় উঠবে ? [উ. 40 s; 1960 m]

৩৮। 50 m ওপর হতে একটি বস্তু ছেড়ে দেয়া হলো। ওই স্থানে $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$ হলে বস্তুটির মাটিতে পৌছাবার প্রাক্কালে বেগ কত হবে ? মাটিতে পড়তে কত সময় লাগবে ? [উ. $31{\cdot}3\ ms^{-1}$; 3·19 s]

৩৯। একটি দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর অনুভূমিকভাবে $20\ ms^{-1}$ বেগে নিক্ষেপ করা হলো। 3s পরে পাথরটির বেগ কত হবে ? ($g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$) [উ. $35{\cdot}58\ ms^{-1}$]

৪০। একটি প্রস্তর খন্ডকে $98\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। (i) কতক্ষণ ধরে এটি ওপরে উঠবে ? (ii) 4s পরে এর বেগ কত হবে ? (iii) যাত্রাস্থানে ফিরে আসতে এর কত সময় লাগবে ?
[উ. 10 s; $58{\cdot}8\ ms^{-1}$; 20s]

৪১। একটি রকেট খাড়াভাবে ওপরের দিকে $30\ ms^{-2}$ ত্বরণে চলতে শুরু করল। 10 সেকেন্ড পরে রকেটটির ইঞ্জিনের সুইচ হঠাৎ বন্ধ করা হলে রকেটটি সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় পৌছাবে নির্ণয় কর। (অভিকর্ষীয় ত্বরণ এর মান $10\ ms^{-2}$ ধর)। [উ. 3 km] [BUET Admission Test, 2007-08]

৪২। একজন ছাত্র প্যারাসুটসহ পড়ার পর ঘর্ষণহীনভাবে 50 m পতিত হয়। প্যারাসুট খোলার পর থেকে সে $20\ ms^{-2}$ মন্দনে নিচের দিকে পতিত হয়। ভূমিতে পৌছার মুহূর্তে তার দ্রুতি $3{\cdot}0\ ms^{-1}$। ছাত্র কতক্ষণ বায়ুতে ছিল ?
[উ. 17·35 s] [BUET Admission Test, 2006-07]

৪৩। একটি বস্তু কোনো টাওয়ারের ওপর স্থিরাবস্থা হতে নিচে পতিত হওয়ার সময় শেষ এক সেকেন্ডে মোট উচ্চতার অর্ধেক অতিক্রম করে। পতনের সময় টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর। ($g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$) [উ. 57·118 m]
[BUET Admission Test, 2007-08]

৪৪। ভূমি থেকে 300 m উচ্চতা হতে একটি পড়ন্ত বস্তুকে আঘাত করার জন্য 500 m দূরে ভূমিতে অবস্থিত একটি বন্দুক থেকে গুলি ছোড়া হলো। যদি বন্দুক হতে গুলি বের হবার মুহূর্তে বস্তুটি স্থিরাবস্থা থেকে নিচে পতিত হওয়া শুরু করে তবে গুলিটি অনুভূমিকের সাথে কোন কোণে নিক্ষেপ করতে হবে ? [উ. 30·96°]
[BUET Admission Test, 2012-13]

৪৫। একজন প্যারাসুট আরোহী মুক্ত হয়ে বাধাহীনভাবে 50m নিচে পতিত হয়েছে। যখন প্যারাসুটটি খুলেছে তখন গতি হ্রাসের হার হলো $2ms^{-2}$ এবং সে $3ms^{-1}$ গতিতে মাটিতে এসে পৌছেছে। কত উচ্চতায় সে মুক্ত হয়েছিল ?
[উ. 292·75 m] [BUET Admission Test, 2011-12]

৪৬। একটি বস্তুকে h উচ্চতাবিশিষ্ট একটি মিনারের ওপর থেকে ফেলা হলো। একই সময়ে অন্য একটি বস্তুকে একই উল্লম্ব রেখা বরাবর নিচ থেকে এমন একটি বেগে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো যেন বস্তুটি ঠিক মিনারের শীর্ষে পৌছাতে পারে। ভূমি থেকে কত উচ্চতায় বস্তু দুটির মধ্যে সংঘাত হবে? [উ. $\frac{3h}{4}$]

৪৭। একটি পাথরকে কুয়ার মধ্যে ফেলা হলো এবং পাথরটি পানিতে পড়ার শব্দ পাথরটি ফেলার 3·056 sec পরে শোনা গেল। যদি অভিকর্ষজ ত্বরণ $9{\cdot}8\ ms^{-2}$ হয়, তবে কুয়ার গভীরতা কত? (ধর, বাতাসে শব্দের বেগ = $350\ ms^{-1}$)
[উ. 19·6 m]

৪৮। একটি দেয়াল ঘড়ির সেকেন্ডের কাঁটার দৈর্ঘ্য 0·10 m হলে এর প্রান্তের রৈখিক বেগ কত ?
[উ. $0{\cdot}0105\ ms^{-1}$] [BUET Admission Test, 2014-15]

৪৯। সুইচ অন করার পর একটা বৈদ্যুতিক পাখা 5 বার ঘোরার পর 300 rpm বেগ অর্জন করে। (i) পাখার কৌণিক ত্বরণ এবং (ii) কত সময় পরে পাখাটি 300 rpm বেগ অর্জন করে নির্ণয় কর। [উ. $5\pi rads^{-2}$; 2 sec]

৫০। একটি গাড়ি 500 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে চলছে। কোন এক মুহূর্তে গাড়ির গতিবেগ $30\ ms^{-1}$। গাড়িটির বেগ $2\ ms^{-2}$ হারে বৃদ্ধি পেলে ওই মুহূর্তে গাড়ির ত্বরণ কত ? [উ. $2{\cdot}7\ ms^{-2}$]

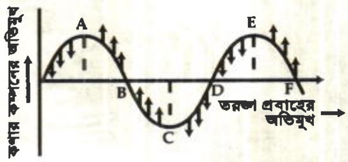
৫১। 1 kg ভরের একটি বস্তুকে 50 cm দীর্ঘ একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে অপর প্রান্ত হাত দিয়ে ধরে বস্তুটিকে প্রতি সেকেন্ডে 2 বার সুষম কৌণিক বেগে ঘুরানো হচ্ছে। বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকেন্দ্র বল কত ? [উ. 78·96N]

৯

তরঙ্গ
WAVE

প্রধান শব্দ (Key Words) : তরঙ্গ, তরঙ্গের প্রকারভেদ, আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ, লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ, শব্দ, শব্দের উৎপত্তি, পূর্ণ কম্পন, তরঙ্গ বেগ, তরঙ্গদৈর্ঘ্য, কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা, দোলনকাল, বিস্তার, দশা, আদি দশা, তরঙ্গ মুখ, তরঙ্গ শীর্ষ, অগ্রগামী তরঙ্গ, স্থির তরঙ্গ, তরঙ্গের উপরিপাতন, শব্দের ব্যতিচার।





সূচনা
Introduction

তরঙ্গ ও তরঙ্গ গতি পদার্থবিজ্ঞানের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। সব ধরনের তরঙ্গের ক্ষেত্রে দুটি বৈশিষ্ট্য লক্ষ করা যায়। প্রথমত, মাধ্যমের আলোড়ন বা স্পন্দন এবং দ্বিতীয়ত, তরঙ্গের এক স্থান থেকে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালনের বিষয়। আমরা যে শব্দ শুনি তা তরঙ্গ আকারে আমাদের কানে পৌঁছে। কাজেই তরঙ্গের প্রকৃতি এবং তরঙ্গ গতি সম্পর্কে আমাদের স্পষ্ট ধারণা থাকা আবশ্যক। প্রতিদিন আমরা বিভিন্ন ধরনের শব্দ শুনি, কোনোটি শ্রুতিমধুর আবার কোনোটি শ্রুতিকটু। এ অধ্যায়ে সংযুক্তি শব্দ, শব্দের তীব্রতা, বীট, উপরিপাতন এবং শব্দের সংগীতগুণ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

এই অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- তরঙ্গের উৎপত্তি এবং মাধ্যমে শব্দ সঞ্চালন প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য, তীব্রতার গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন ও বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- উপরিপাতন নীতি এবং স্থির তরঙ্গের গাণিতিক রাশিমালা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
  ব্যবহারিক : মেলডির পরীক্ষার সাহায্যে সুর কম্পাঙ্কের কম্পাঙ্ক নির্ণয়।
- শব্দের তীব্রতা লেভেল, বীটের গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন করতে পারবে।
- স্বরগ্রাম, হারমোনিক ব্যাখ্যা করতে, সংগীতগুণ বিশ্লেষণে পদার্থবিজ্ঞানের অবদান ব্যাখ্যা করতে এবং শোরগোল ও সংগীত সুরের প্রভাব ব্যাখ্যা করতে পারবে।

৯·১ তরঙ্গের উৎপত্তি
Propagation of wave

হাত থেকে একটি ধাতব পাত্রকে ফেলে দিলে শব্দ উৎপন্ন হয়। আবার কাঠের একটি টেবিলের এক প্রান্তে আঘাত করলে শব্দ উৎপন্ন হয়। লক্ষ করলে দেখা যাবে কোনো বস্তুর কম্পনের ফলেই শব্দের বা তরঙ্গের উৎপত্তি হয়। আবার কম্পন থেমে গেলে শব্দ বা তরঙ্গও থেমে যায়। কম্পনশীল কোনো বস্তুকে হাত দিয়ে চেপে ধরলে কম্পন ও শব্দ দুইই থেমে যায়। আমরা যখন কথা বলি তখন শব্দ বায়ু মাধ্যমের মধ্য দিয়ে তরঙ্গ আকারে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয় [চিত্র ৯·১]। সুতরাং বলা যায়— কোনো বস্তুর কম্পনের ফলে শব্দের সৃষ্টি হয়। শব্দ মাধ্যমকে আন্দোলিত করে এবং মাধ্যমের এ আন্দোলন তরঙ্গ আকারে এক স্থান থেকে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়। এভাবেই তরঙ্গের উৎপত্তি হয়। কম্পনশীল এই বস্তুই হলো শব্দ উৎস বা স্বনক (acoustics)।

চিত্র ৯·১

যাচাই কর : হাতে একটি হ্যান্ড মাইক সেট নাও। এবার জোরে ডাক দাও।

পুকুরের স্থির পানিতে ঢিল ছুড়লে ঢিলটি পানির যেখানে পতিত হয় সেখানে কম্পনের সৃষ্টি হয়। এই কম্পন এক কণা থেকে অপর কণায় স্থানান্তরিত হতে হতে এক সময় সমগ্র পুকুরে ছড়িয়ে পড়ে। এই কম্পনের ফলে পানির কোনো কণাই তার সাম্যাবস্থান থেকে দূরে সরে যায় না। শুধু সাম্যাবস্থানকে কেন্দ্র করে ওপরে নিচে পর্যায়বৃত্ত গতিতে কম্পিত

হতে থাকে এবং প্রত্যেকটি কণাই তার পার্শ্ববর্তী কণায় শক্তির স্থানান্তর ঘটায় [চিত্র ৯.২]। কিন্তু কোনো এক মুহূর্তে পানির কণাগুলো বিভিন্ন বিন্দুতে অবস্থান করায় এগুলো দেখতে ঢেউয়ের মতো মনে হয়। এই ঢেউই হলো তরঙ্গ। তোমরা নিশ্চয় খেয়াল করেছ সবুজ ধান ক্ষেতে মৃদুমন্দ বাতাস বয়ে গেলে ধানের পাতার পর্যায়বৃত্ত কম্পনের ফলে ঢেউয়ের সৃষ্টি হয়। আবার পানিতে ঢিল ছুড়ে কোনো পাতা বা কাগজের টুকরাকে ফেলে লক্ষ করলে দেখা যায় যে,

চিত্র ৯.২

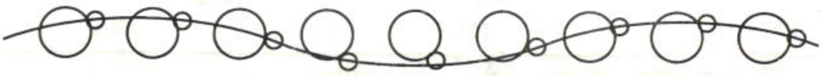
পানির তরঙ্গগুলো একে একে পেরিয়ে যাবার সময় পাতা বা কাগজের টুকরো তরঙ্গের সঙ্গে এগিয়ে না গিয়ে একই জায়গায় থেকে ওপর নিচে দুলতে থাকে। এ ঘটনা থেকে বোঝা যায় যে, ঢিলটি যেখানে পানিকে আঘাত করে সেখানে পানির কণাগুলোতে আলোড়ন (disturbance) সৃষ্টি হয়ে কণাগুলো ওপর নিচে দুলতে শুরু করে। মাধ্যমের অর্থাৎ পানির কণাগুলোর সংসক্তির জন্য এই গতি পাশের পানির কণাগুলোর মধ্যে সঞ্চালিত হয়। ফলে এই কণাগুলোও একই ধরনের গতিতে দুলতে শুরু করে। এরা আবার পাশের পানি কণাগুলোকে আন্দোলিত করে। এভাবে স্থির পানির ওপর কোনো স্থানে আলোড়ন সৃষ্টি করলে ওই আলোড়ন পানির উপরিতল ধরে এগিয়ে যায়। একেই তরঙ্গ বলে। এখানে কেবলমাত্র আলোড়নের রূপ তরঙ্গ আকারে এগিয়ে যায়; পানির কণাগুলো একই জায়গায় থেকে ওপরে নিচে আন্দোলিত হতে থাকে, কিন্তু কণাগুলো তরঙ্গের সঙ্গে এগিয়ে যায় না। পানিতে ভাসমান পাতা বা কাগজের টুকরোর গতি থেকে এই কথা স্পষ্ট বোঝা যায়। আবার তরঙ্গ এগিয়ে যাবার সাথে সাথে স্থির পানির কণাগুলো দুলতে শুরু করে— এই কথার অর্থ হলো তরঙ্গ প্রতিটি পানিকণায় কিছু পরিমাণ শক্তি সঞ্চালিত করে। সুতরাং বলা যায় যে— ঢিলটি পানিতে পড়ে সেই জায়গার পানিকণাগুলোকে যে শক্তি দেয়, সেই শক্তি তরঙ্গ আকারে এক জায়গা থেকে অন্য জায়গায় ছড়িয়ে পড়ে [চিত্র ৯.২]।

৯.১.১ শব্দ তরঙ্গের উৎপত্তি
Production of sound wave

তোমরা যদি কখনো পুকুরে বা লেকের পানিতে ঢিল নিক্ষেপ কর তা হলে দেখবে যেখানে ঢিলটি পানিকে স্পর্শ করেছে সেখানে একটি আলোড়ন সৃষ্টি হয়েছে। এই আলোড়ন এক বিন্দুতে স্থির না থেকে চারদিকে ছড়িয়ে পড়ছে। ঢিলটি যখন পানি স্পর্শ করে তখন ওই স্থানের পানি আন্দোলিত হয়। এই কণাগুলো আবার পাশের কণাগুলোকে আন্দোলিত করে। এভাবে আন্দোলন এক কণা থেকে অন্য কণায় ছড়িয়ে পড়ে এবং কিনারা পর্যন্ত বিস্তৃত হয়। এ আন্দোলনই হলো তরঙ্গ। সুতরাং তরঙ্গের নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেওয়া যায় :

কোনো স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের কণাগুলোর স্থানান্তর ছাড়া যে পর্যাবৃত্ত আন্দোলনের দ্বারা এক স্থান হতে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালিত হয় তাকে তরঙ্গ বলে।

৯.৩ চিত্রে পর্যায়বৃত্ত আন্দোলন দ্বারা তরঙ্গের উৎপত্তি দেখান হলো। **শব্দ উৎপত্তির মূল উৎসই বস্তুর কম্পন।** বস্তুতে যতক্ষণ কম্পন থাকে ততক্ষণই এর শব্দ নিঃসরণ হয়। এ শব্দ নিরবচ্ছিন্ন স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের মধ্য দিয়ে আমাদের কানে পৌঁছে শ্রবণের অনুভূতি জন্মায়।



চিত্র ৯.৩

আমাদের দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকেও শব্দের উৎপত্তি ও প্রকৃতি বুঝতে পারি। যেমন কোনো ধাতব পদার্থ মেঝেতে পড়ে গেলে বা ধাতব পদার্থকে কোনো ধাতব দণ্ড দিয়ে আঘাত করলে শব্দের সৃষ্টি হয়; কিন্তু হাত বা শক্ত কিছু দিয়ে

চেপে ধরলে শব্দ বন্ধ হয়ে যায়। বাঁশিতে ফুঁ দিয়ে কিংবা বাদ্যযন্ত্রের তারে টান দিয়ে বা ঢাক-ঢোলের চামড়ার পর্দা কাঁপিয়ে শব্দ সৃষ্টি করা হয়। সুতরাং বুঝা যাচ্ছে যে কম্পন থেকেই শব্দ সৃষ্টি হয়। এই কম্পন মাধ্যমে তরঙ্গের সৃষ্টি করে যা আমাদের কানের পর্দাকেও আন্দোলিত করে এবং আমরা শব্দ শুনতে পাই।

সিদ্ধান্ত : কোনো বস্তুর কম্পনের দরুন শব্দ উৎপন্ন হয়। সর্ব প্রকার শব্দ উৎপত্তির মূল উৎস বস্তুর কম্পন। কম্পনের ফলে যান্ত্রিক শক্তি হতে শব্দ উৎপন্ন হয়।

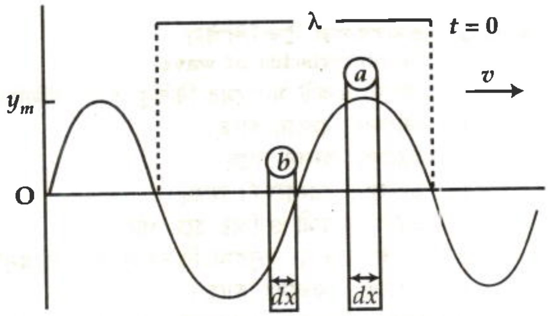
নিজে কর : শব্দের বিস্তারের জন্য জড় মাধ্যমের প্রকৃতি কেমন হওয়া দরকার ?

শব্দের বিস্তারের জন্য জড় মাধ্যমকে স্থিতিস্থাপক এবং অবিচ্ছিন্ন হতে হবে। অস্থিতিস্থাপক মাধ্যম অধিক দূরত্বে শব্দকে সঞ্চালিত করতে পারে না, যেহেতু খুব দ্রুত শক্তির অবক্ষয় হয়। তা ছাড়া বিচ্ছিন্ন বস্তু যেমন ধুলো, পশম ইত্যাদি শব্দ প্রেরণের পক্ষে অত্যন্ত কুপরিবাহী।

৯·২ তরঙ্গ ও শক্তি
Wave and energy

কম্পনশীল বস্তুর আঘাতে এর সংলগ্ন মাধ্যমের কণা সাম্যাবস্থানের দুদিকে এদিক-ওদিক (to and fro) সরল দোলন গতিতে কাঁপতে থাকে। ওইসব বায়ুকণা তাদের পাশের কণাকে একই জাতীয় কম্পনে কম্পিত করে। এভাবেই পরপর কণা থেকে কণাতে কম্পন স্থানান্তর হতে থাকে, অর্থাৎ শব্দ উৎস থেকে তরঙ্গ বিস্তারের অভিমুখে কম্পনরত কণার একটি শৃঙ্খল তৈরি হয় এবং শেষ পর্যন্ত শ্রোতার কানে কম্পন আঘাত করে।

সুতরাং শব্দ উৎস হতে প্রাপ্ত শক্তি কণা থেকে কণাতে স্থানান্তরিত হয়ে অবশেষে শ্রোতার কানে পৌঁছায়; কিন্তু মাধ্যমের কণার কোনো স্থায়ী স্থানচ্যুতি ঘটে না।



চিত্র ৯·৪

জড় মাধ্যমের ভেতর দিয়ে তরঙ্গের বিস্তারের সময় মাধ্যমের কণাগুলো আন্দোলিত হয়, ফলে শক্তির স্থানান্তর ঘটে। ওই শক্তির কিছু অংশ গতিশক্তি ও বাকি অংশ স্থিতিশক্তি; যদিও মোট শক্তি সর্বত্র সমান। তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত হলে মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোলন গতি লাভ করে [চিত্র ৯·৪]। শক্তি সঞ্চালনে কণাগুলো সরাসরি ভূমিকা পালন করে না এবং কণাগুলো স্থায়ীভাবে স্থানচ্যুতও হয় না। পক্ষান্তরে তরঙ্গ সঞ্চালনে মাধ্যমের প্রয়োজন না হলে শক্তি স্থানান্তরে কণার কোনো ভূমিকাই থাকে না। পানির ওপর একটি কর্ক অথবা একটি শোলা বা পাটকাঠি থাকলে দেখা যাবে যে, কর্ক বা পাটকাঠিটি একই স্থানে থেকে ওপরে-নিচে উঠানামা করছে। এর অর্থ হলো মাধ্যমের কণাগুলো স্থান ত্যাগ করে না, যদি করত তবে কর্ক বা পাটকাঠিটি সরে পাড়ে চলে আসত। মাধ্যমের কণাগুলোর মধ্যে সংসক্তি বলের কারণে এগুলো স্থান ত্যাগ করে না; তবে আন্দোলনের দ্বারা পার্শ্ববর্তী কণাগুলোতে শক্তি সঞ্চালিত হয় বলে পাশের কণাগুলো আন্দোলিত হয়। এভাবে শক্তি তরঙ্গাকারে এক স্থান হতে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়।

তরঙ্গ শক্তির এক প্রকার রূপ তাই পানিতে ঢিল নিক্ষেপের সময় হাত থেকে শক্তি ঢিলে স্থানান্তরিত হয়। আবার যখন টানা দেয়া তারে একটি তরঙ্গকে স্থাপন করা হয় তখন প্রকৃতপক্ষে তারে তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য শক্তি সরবরাহ করা হয়। সুতরাং দেখা যায় যে, মাধ্যমে আন্দোলনের ফলে মাধ্যমের কণাসমূহে যে যান্ত্রিক শক্তির সৃষ্টি হয় তা কম্পনের মাধ্যমে এক স্থান হতে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়। তরঙ্গ দ্বারা শক্তি এক স্থান থেকে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়। এই তরঙ্গ এক স্থান থেকে অন্য স্থানে চলাচলের সময় গতিশক্তি ও স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি স্থানান্তরিত হয়।

গতিশক্তি (Kinetic energy) : মনে করি তারের একটি কণার ভর dm, যা আড় তরঙ্গরূপে সরল ছন্দিত গতিতে কম্পিত হচ্ছে। যখন তরঙ্গ এই কণাকে অতিক্রম করে তখন তা গতিশক্তি প্রাপ্ত হয় যার বেগ v। $y = 0$ অবস্থানে কণার অবস্থানের জন্য আড় কম্পনের বেগ তথা গতিশক্তি সর্বাধিক হয় [চিত্র ৯.৪]। আবার **কণাটির চূড়ান্ত অবস্থান** $y = y_m$ **অবস্থানে আড় কম্পনের বেগ তথা গতিশক্তি শূন্য বা সর্বনিম্ন হয়।**

স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি (Elastic potential energy) : এখন একটি সাইন-তরঙ্গ পূর্বের টানা তারে সঞ্চালনের জন্য প্রয়োগ করা হলে তা তারটিতে চাপ প্রয়োগ করে। ৯·৪ চিত্র অনুযায়ী ধরি তারের ক্ষুদ্র dx অংশ আড়াআড়িভাবে কম্পিত হচ্ছে; কাজেই এই দৈর্ঘ্য dx বরাবর পর্যায়ক্রমিকভাবে সংকুচিত ও প্রসারিত হয়। সেক্ষেত্রে বলা

যায় তারটি স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি লাভ করার জন্য দৈর্ঘ্য পরিবর্তিত হচ্ছে যেমনটি লক্ষ করা যায় একটি স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে। যখন তারে কণার অবস্থান $y = y_m$ হয় তখন ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্য dx অপরিবর্তিত থাকে এবং এই অবস্থানে স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি সর্বাধিক হয়। আবার **$y = 0$ অবস্থানে স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন (শূন্য) হয়। এভাবে কম্পিত তার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি লাভ করে।**

সম্প্রসারিত ক্রিয়াকর্ম : সরণ-সময় কিংবা সরণ-দূরত্ব লেখচিত্র তরঙ্গ আকৃতি দেখায়। এ থেকে মন্তব্য করা যায় যে শব্দ তরঙ্গ পথে বিস্তার লাভ করে।

আমরা যখন কথা বলি তখন উৎপন্ন শব্দ তরঙ্গ আকারে ছড়িয়ে পড়ে। প্রকৃতপক্ষে, একটি শব্দসৃষ্টিকারী উৎসের কম্পনে পর্যায়ক্রমে মাধ্যমে সংকোচন ও প্রসারণ সৃষ্টি হয় এবং তরঙ্গ সমবেগে চারদিকে ছড়িয়ে যায়। একটি পূর্ণ কম্পনকালের মধ্যে মাধ্যমের কোনো কণার সরণ-সময় লেখচিত্র কিংবা তরঙ্গের বিস্তারের অভিমুখে নির্দিষ্ট সময় বিভিন্ন কণার সরণ-দূরত্ব লেখচিত্র অঙ্কন করলে লেখচিত্রগুলো তরঙ্গ আকারের হবে।

৯·৩ তরঙ্গ
Wave

পূর্বের আলোচনা থেকে জেনেছি, যে পর্যাবৃত্ত আন্দোলন কোনো জড় মাধ্যমের এক স্থান থেকে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালিত করে, কিন্তু মাধ্যমের কণাগুলো স্থায়ীভাবে স্থানান্তরিত করে না তাই তরঙ্গ। তরল বা গ্যাসীয় এবং কঠিন মাধ্যমে যে তরঙ্গের উদ্ভব হয় তা যান্ত্রিক তরঙ্গ। যান্ত্রিক তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের প্রয়োজন। তবে তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য কোনো মাধ্যমের প্রয়োজন হয় না। তরঙ্গ ও শক্তি কী ? তাও জেনেছি। এবার তরঙ্গের বৈশিষ্ট্যগুলো জানা দরকার। তা হলে আমরা বিভিন্ন প্রকার তরঙ্গের প্রকৃতি জানতে সক্ষম হব। [DAT ২৩-২৭]

৯·৩·১ তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of wave

(১) কোনো একটি মাধ্যমের বিভিন্ন কণার সম্মিলিত কম্পনের ফলশ্রুতিই হলো তরঙ্গ।
(২) তরঙ্গের বিস্তার আছে।
(৩) তরঙ্গের কম্পন আছে।
(৪) তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য আছে।
(৫) তরঙ্গ অগ্রগামী ও স্থির হতে পারে।
(৬) তরঙ্গ আড় বা অনুপ্রস্থ কিংবা লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য হতে পারে।
(৭) তরঙ্গের তরঙ্গমুখ আছে।
(৮) তরঙ্গ প্রতিফলন, প্রতিসরণ, ব্যতিচার এবং অপবর্তন ঘটায়।
(৯) তরঙ্গ এক স্থান থেকে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালিত করে।

৯·৩·২ তরঙ্গের প্রকারভেদ
Types of waves

মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোল গতিতে কম্পিত হলে যে তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তাকে **সরল দোল তরঙ্গ** (Simple harmonic wave) বা **সাইন তরঙ্গ** (Sine wave) বলে। সরল দোল তরঙ্গ আবার দুই প্রকারের। যথা—(১) আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ (Transverse wave) এবং (২) লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ (Longitudinal wave)। এ ছাড়াও তরঙ্গ শক্তি বহন করে। শক্তি প্রবাহের দিক অনুসারে তরঙ্গকে তিন ভাগে ভাগ করা হয়েছে। যথা—

(১) একমাত্রিক তরঙ্গ
(২) দ্বিমাত্রিক তরঙ্গ
(৩) ত্রিমাত্রিক তরঙ্গ

তরঙ্গের সাহায্যে শক্তি যদি কেবলমাত্র এক দিকে প্রবাহিত হয়, তবে তাকে **একমাত্রিক তরঙ্গ** বলে। যেমন: সুতা বরাবর প্রবাহিত তরঙ্গ একমাত্রিক তরঙ্গ।

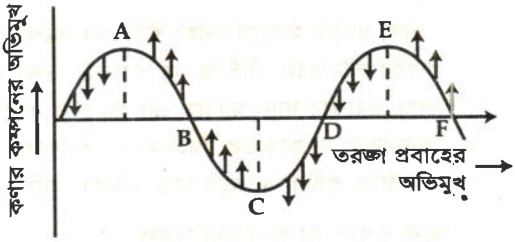
তরঙ্গের সাহায্যে শক্তি যদি কোনো সমতলের চারদিকে প্রবাহিত হয় তবে তাকে **দ্বিমাত্রিক তরঙ্গ** বলে। যেমন: পানির উপরিভাগে প্রবাহিত তরঙ্গ দ্বিমাত্রিক তরঙ্গ।

তরঙ্গের সাহায্যে শক্তি যদি সর্বদিকে অর্থাৎ ডানে-বামে, সামনে-পেছনে এবং ওপর নিচে বিস্তার লাভ করে, তবে সে তরঙ্গকে **ত্রিমাত্রিক তরঙ্গ** বলে। যেমন: আলোক বা শব্দ তরঙ্গের আকারে কোনো উৎস হতে সাধারণত সকল দিকে বিস্তার লাভ করে। অতএব, আলোক, শব্দ ইত্যাদি ত্রিমাত্রিক তরঙ্গ।

১. আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ
Transverse wave

মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গ গতির অভিমুখের সমকোণে কম্পিত হতে থাকলে সেই তরঙ্গকে আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ বলে। আলোক তরঙ্গ বা তড়িৎ চৌম্বক তরঙ্গ হলো অনুপ্রস্থ তরঙ্গ।

ব্যাখ্যা : চিত্র ৯.৫-এ একটি অনুপ্রস্থ তরঙ্গ দেখানো হয়েছে। তরঙ্গের ওপর ছোট ছোট তীর চিহ্ন দ্বারা কণার কম্পনের অভিমুখ দেখানো হয়েছে। তরঙ্গের ওপরের দিকে A ও E বিন্দুতে কণার সর্বোচ্চ সরণ ঘটেছে। তরঙ্গের এই বিন্দুগুলোকে **তরঙ্গ শীর্ষ** বা **তরঙ্গ চূড়া** (Crest) বলে। আবার নিচের দিকে C বিন্দুতে সর্বোচ্চ সরণ ঘটেছে। একে **তরঙ্গ পাদ** বা **তরঙ্গ খাঁজ** (Trough) বলে।

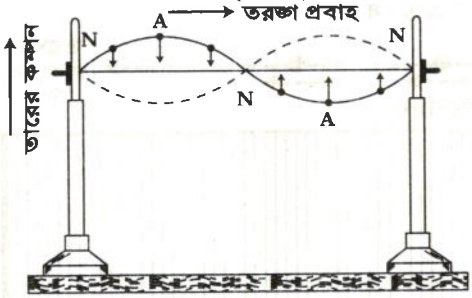


চিত্র ৯.৫

এক্ষেত্রে কণার স্পন্দনের অভিমুখ তরঙ্গ প্রবাহের অভিমুখের সমকোণে ঘটেছে। অতএব এটা আড় তরঙ্গ।

উদাহরণ :

(১) পুকুরের পানিতে ঢিল ছুঁড়লে দেখা যায় যে পানির কণাগুলো ওপরে-নিচে দুলতে থাকে এবং এই আন্দোলন কিনারার দিকে অগ্রসর হতে থাকে। সৃষ্ট এরূপ আন্দোলনই আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ।



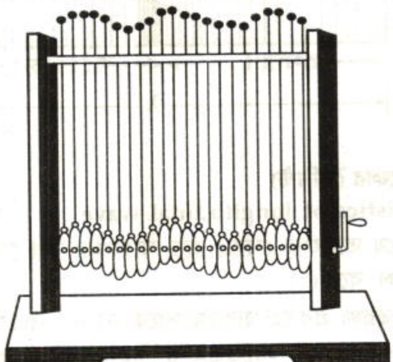
চিত্র ৯.৬

(২) একটি তার টান করে বেঁধে এর দৈর্ঘ্যের সমকোণে টেনে ছেড়ে দিলে তারে একটি তরঙ্গের সৃষ্টি হবে [চিত্র ৯.৬]। লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, তারটি এর দৈর্ঘ্যের সাথে সমকোণে আন্দোলিত হচ্ছে। এই আন্দোলন তারের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রবাহিত হচ্ছে। সুতরাং টানা তারের এরূপ কম্পন হতে স্পষ্ট যে, এই তরঙ্গ আড় তরঙ্গ।

পরীক্ষণ :

আড় তরঙ্গ প্রদর্শন (Demonstration of transverse wave) : পরীক্ষায় সমান দৈর্ঘ্যের কতগুলো দণ্ড নেয়া হয় যাদের প্রত্যেকের এক মাথায় একটি করে বল এবং অপর মাথায় একটি করে চাকা যুক্ত আছে [চিত্র ৯.৭]। চাকাগুলো একটি হাতলযুক্ত ঘূর্ণনক্ষম দণ্ডের সাথে এমনভাবে লাগানো আছে যে চাকাগুলো কম-বেশি উৎকেন্দ্রিক (eccentric) অবস্থায় থাকে অর্থাৎ দণ্ডগুলো এক এক চাকার এক এক স্থান দিয়ে পরানো থাকে এবং দণ্ডগুলো খাড়াভাবে অবস্থান করে।

হাতল ঘুরালে চাকাগুলোও ঘুরতে থাকে এবং দণ্ডগুলো উঠা-নামা করে। চাকাগুলো কম-বেশি উৎকেন্দ্রিক হওয়ায় বিভিন্ন দণ্ডের ওপরের প্রান্তের বলগুলো একসঙ্গে ওপরে ওঠে না বা নিচে নামে না; বরং পর্যায়ক্রমে ওঠা-নামা করে। ভালোভাবে লক্ষ করলে দেখা যাবে যে বলগুলো যেদিকে উঠা-নামা করে তার সমকোণে তরঙ্গ প্রবাহিত হচ্ছে। সুতরাং এস্থলে উদ্ভূত তরঙ্গ আড় তরঙ্গ।


চিত্র ৯.৭

আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য

Characteristics of transverse wave

আড় তরঙ্গের মধ্যে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয়—

১। যে তরঙ্গের ক্ষেত্রে জড় মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমকোণী হয়, তাকে আড় তরঙ্গ বলে।

২। তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমে তরঙ্গ শীর্ষ এবং তরঙ্গ পাদ সৃষ্টি হয়।

৩। পরপর দুটি তরঙ্গ শীর্ষ বা পর পর দুটি তরঙ্গ পাদের মধ্যবর্তী দূরত্বকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে।

৪। আড় তরঙ্গের দরুন মাধ্যমে এর সমবর্তন বা পোলারণ ঘটে।

৫। অনম্যতার বা আকৃতির স্থিতিস্থাপক ধর্মসম্পন্ন মাধ্যমে (কঠিন) এই তরঙ্গ উৎপন্ন হয়।

৬। প্রবাহীতে পৃষ্ঠটানের দরুন আড় তরঙ্গের সৃষ্টি হয়।

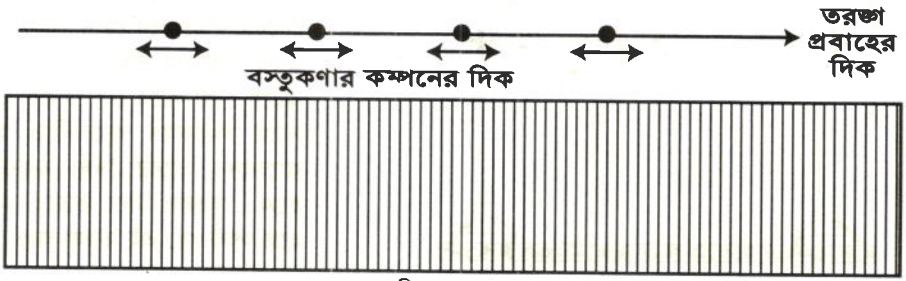
২. লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ

Longitudinal wave

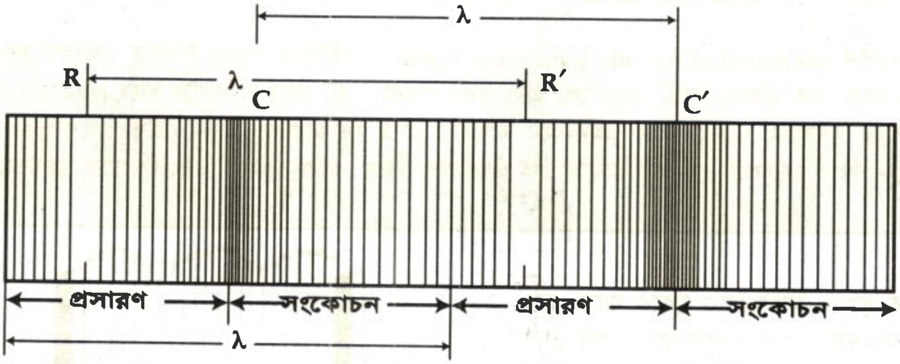
মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গের গতির অভিমুখের সমান্তরালে কম্পিত হতে থাকলে, সেই তরঙ্গকে লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বলে।

উদাহরণ : শব্দ তরঙ্গ, স্প্রিং-এ সৃষ্ট তরঙ্গ, ঢোলে বাড়ি দিলে সৃষ্ট তরঙ্গ, বাঁশির সুর ইত্যাদি অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ।

ব্যাখ্যা : চিত্র ৯·৮(খ)-এ অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ প্রবাহ দেখানো হয়েছে। মাধ্যমের বিভিন্ন স্তরের সাম্যাবস্থান কতগুলো সমান দূরত্বের রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে [চিত্র ৯·৮ (ক)]।



চিত্র ৯·৮ (ক)



চিত্র ৯·৮ (খ)

লম্বিক তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য

Characteristics of longitudinal wave

১। যে তরঙ্গের ক্ষেত্রে জড় মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমান্তরাল হয় তাকে লম্বিক তরঙ্গ বলে।

২। তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমে সংকোচন ও প্রসারণ সৃষ্টি হয়।

৩। পরপর দুটি সংকোচন বা পরপর দুটি প্রসারণের মধ্যবর্তী দূরত্বকে বা একটি প্রসারণ ও একটি সংকোচনের মিলিত দৈর্ঘ্যকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে।

৪। মাধ্যমে এর সমবর্তন বা পোলারণ ঘটে না। [MAT 23-24]
৫। স্থিতিস্থাপক ধর্মসম্পন্ন মাধ্যমে এই তরঙ্গ উৎপন্ন হয়।

জানার বিষয় :
- শব্দ—লম্বিক তরঙ্গ
- বাঁশির সুর—লম্বিক তরঙ্গ
- ঢোলের বাড়ির শব্দ—লম্বিক তরঙ্গ
- স্প্রিং-এ সৃষ্ট তরঙ্গ—লম্বিক তরঙ্গ
- আলোক তরঙ্গ—আড় তরঙ্গ
- পানি তরঙ্গ—আড় তরঙ্গ
- এক্সরে—আড় তরঙ্গ
- টানা তারের তরঙ্গ—আড় তরঙ্গ

[DAT 22-23
19-20]

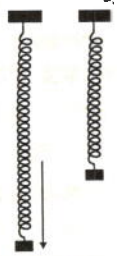
৯·৩·৩ তরঙ্গ সঞ্চালন প্রক্রিয়া
Process of propagation of waves

মাধ্যমের ভেতর দিয়ে লম্বিক তরঙ্গ প্রবাহিত হতে থাকলে যেকোনো সময়ে স্তরগুলোর অবস্থান কীরূপ হবে তা ৯·৮(খ) চিত্রে দেখানো হয়েছে। অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের ক্ষেত্রে মাধ্যমের কণাগুলো সাম্যাবস্থানের উভয় পার্শ্বে তরঙ্গের গতিপথের সমান্তরালে কম্পিত হয়, ফলে তরঙ্গশীর্ষ বা তরঙ্গপাদ সৃষ্টি হয় না। এক্ষেত্রে কম্পনের সময় কিছু কিছু স্থানে কণাগুলো কাছাকাছি চলে আসে আবার কোথাও দূরে সরে যায়। কণাগুলো কাছাকাছি আসায় মাধ্যমের সংকোচন (compression) হয় এবং কণাগুলো সরে গেলে মাধ্যমের প্রসারণ (rarefaction) হয়। চিত্রে রেখাগুলোর মধ্যবর্তী দূরত্ব কম দ্বারা সংকোচন এবং রেখাগুলোর দূরত্ব বৃদ্ধি দ্বারা সম্প্রসারণ বুঝানো হয়েছে। সংকোচনের স্থানগুলোতে মাধ্যমের ঘনত্ব ও চাপ বেড়ে যায় এবং প্রসারণের স্থানগুলোতে মাধ্যমের ঘনত্ব ও চাপ কমে যায়। এভাবে মাধ্যমের কণাগুলোর সংকোচন ও প্রসারণের মধ্য দিয়ে অনুদৈর্ঘ্য বা লম্বিক তরঙ্গ সঞ্চালিত হয়। **পাশাপাশি একটি সংকোচন ও একটি প্রসারণ নিয়ে একটি তরঙ্গদৈর্ঘ্য গঠিত হয়।**

উদাহরণ :

(১) কথা বলার সময় আমরা জিহ্বার সাহায্যে মুখের মধ্যকার বায়ুকণাতে কম্পন সৃষ্টি করি। বায়ুকণাগুলোর কম্পনের দিক শব্দ তরঙ্গের গতির অভিমুখে সংঘটিত হয়। অতএব শব্দ লম্বিক তরঙ্গ। বক্তা বা গায়কের মুখ হতে শব্দ বায়ু মাধ্যমে সংকোচন ও প্রসারণ সৃষ্টি করে লম্বিক তরঙ্গের আকারে শ্রোতার কানে পৌঁছায়।

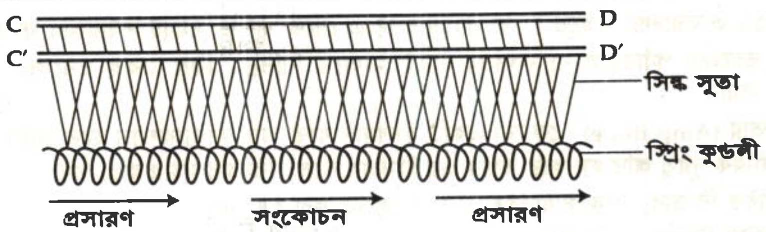
(২) একটি স্প্রিং খাড়াভাবে ঝুলিয়ে দিয়ে এর নিচের প্রান্ত খানিকটা নিচের দিকে টেনে ছেড়ে দিলে দেখা যাবে যে স্প্রিং-এর কুণ্ডলী পর্যায়ক্রমে সংকুচিত ও প্রসারিত হতে থাকে [চিত্র ৯·৯] এবং এই স্পন্দন তারের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রবাহিত হয়।


চিত্র ৯·৯

অর্থাৎ, কুণ্ডলীগুলো সরল দোলন গতিতে তরঙ্গের গতির সমান্তরালে আন্দোলিত হচ্ছে। সুতরাং স্প্রিং-এ সৃষ্ট এই তরঙ্গ লম্বিক তরঙ্গ।

অনুশীলন : একটি স্প্রিংকে খাড়াভাবে ঝুলিয়ে দাও। এবার স্প্রিংটিকে টেনে ছেড়ে দাও। কী দেখতে পাচ্ছ? স্প্রিংটি কি আগের অবস্থায় আছে, নাকি কোনো পরিবর্তন লক্ষ করতে পারছ ?

পরীক্ষণ : লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ প্রদর্শন (Demonstration of longitudinal wave) : পরীক্ষায় একটি সরু তারের স্প্রিং নিয়ে এর প্রত্যেক কুণ্ডলীকে দুটি অনুভূমিক দণ্ড CD ও C′D′ হতে V-আকারে সিল্ক সুতা দ্বারা এমনভাবে ঝুলাও যাতে তারটি অনুভূমিক থাকে [চিত্র ৯·১০]।



চিত্র ৯·১০

এই স্প্রিং-এর এক প্রান্ত ধরে হঠাৎ অনুভূমিকভাবে ধাক্কা দিলে দেখা যাবে যে, তারের কুণ্ডলীগুলো পর্যায়ক্রমে সংকুচিত ও প্রসারিত হচ্ছে এবং এই স্পন্দন ক্রমে ক্রমে তার বরাবর এগিয়ে যাচ্ছে। অর্থাৎ কুণ্ডলীগুলো তরঙ্গ প্রবাহের দিকেই সরল দোল গতিতে আন্দোলিত হচ্ছে। সুতরাং উদ্ভূত তরঙ্গই লম্বিক তরঙ্গ।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : বায়ু মাধ্যমে আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হতে পারে কী ? — ব্যাখ্যা কর।

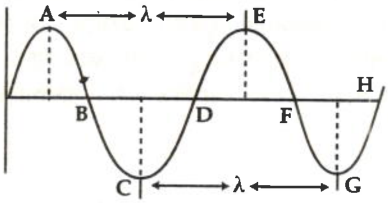
গ্যাসীয় মাধ্যমে সংসক্তিজনিত ধর্ম দেখা যায় না। তা ছাড়া বায়ু মাধ্যমের দৃঢ়তা গুণাঙ্ক (rigidity modulus) নেই। তাই বায়ু মাধ্যমে আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হতে পারে না। বায়ু মাধ্যমে শুধুমাত্র অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বিস্তার লাভ করতে পারে।

৯.৩.৪ তরঙ্গ সংক্রান্ত কয়েকটি ভৌত রাশির সংজ্ঞা
Definition of some physical quantities related to wave

তরঙ্গ সংক্রান্ত কয়েকটি রাশির সংজ্ঞা নিম্নে দেয়া হলো :

১. পূর্ণ কম্পন (Complete oscillation) : **কম্পমান বস্তু একটি বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে আবার একই দিক হতে সে বিন্দুতে ফিরে এলে একে পূর্ণ কম্পন বলে।**

২. তরঙ্গদৈর্ঘ্য (Wavelength) : **তরঙ্গ সৃষ্টিকারী কোনো কম্পনশীল কণার একটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করতে যে সময় লাগে, ওই সময়ে তরঙ্গ যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে।** তরঙ্গের উপরিস্থিত পরপর দুটি সমদশাসম্পন্ন কণার ন্যূনতম দূরত্বই হলো তরঙ্গদৈর্ঘ্য। একে λ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



চিত্র ৯.১১

আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে পরপর দুটি তরঙ্গশীর্ষ বা পরপর দুটি তরঙ্গ পাদের মধ্যবর্তী দূরত্বকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে। চিত্র ৯.১১-এ AE বা BF বা CG আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং চিত্র ৯.৮(খ)-এ RR′ বা CC′ লম্বিক তরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

কোনো একটি মাধ্যমে বিভিন্ন শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য বিভিন্ন। একই শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য বিভিন্ন মাধ্যমেও বিভিন্ন।

৩. কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা (Frequency) : **কোনো একটি কম্পমান বস্তু বা কণা এক সেকেন্ডে যতগুলো পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করে তাকে তার কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা বলে।**

কম্পাঙ্ক n বা f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

কোনো বস্তু বা কণা t সময়ে N সংখ্যক কম্পন সম্পন্ন করলে কম্পাঙ্ক, f বা $n = \frac{N}{t}$ [MAT 15-16]

কম্পাঙ্কের একককে হার্টজ (Hertz) সংক্ষেপে Hz বলে। অনেক সময় সাইকেল/সেকেন্ড (cs^{-1}) এককও ব্যবহার করা হয়। N কম্পনে তরঙ্গের অতিক্রান্ত দূরত্ব s হলে, $s = N\lambda$

৪. তরঙ্গ সংখ্যা (Wave number) : **একক দৈর্ঘ্যের মধ্যে যে কয়টি পূর্ণ তরঙ্গ থাকে তাকে ওই তরঙ্গের তরঙ্গ সংখ্যা বলে।** একে $\bar{\upsilon}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। তরঙ্গসংখ্যা ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে সম্পর্ক হলো,

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{\lambda}$$

৫. দোলনকাল বা পর্যায়কাল (Time period) : **কোনো একটি কম্পমান বস্তু একটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করতে যে সময় নেয়, তাকে এর দোলনকাল বা পর্যায়কাল বলে।** একে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করি t সেকেন্ডে একটি উৎস Nটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করে।

$\therefore$ দোলনকাল, $T = \frac{t}{N}$ এবং কম্পাঙ্ক, $n = \frac{N}{t}$

চিত্র ৯.১১-এ তরঙ্গের B হতে F বা D হতে H-এ যেতে ব্যয়িত সময়ই পর্যায়কাল বা দোলনকাল।

বিভিন্ন তরঙ্গের পর্যায়কাল বা কম্পাঙ্ক একই মাধ্যমে বিভিন্ন। কিন্তু একই তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বা পর্যায়কাল বিভিন্ন মাধ্যমে সমান।

৬. বিস্তার (Amplitude) : **কোনো একটি কম্পমান বস্তু তার সাম্যাবস্থান হতে ডানে বা বামে অথবা ওপরে বা নিচে যে সর্বাধিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে এর বিস্তার বলে।** বিস্তার দুই প্রকার, যথা—

(ক) রৈখিক বিস্তার; একে সাধারণত 'a' দ্বারা সূচিত করা হয় এবং

(খ) কৌণিক বিস্তার; একে সাধারণত 'θ' দ্বারা সূচিত করা হয়। চিত্র ৯.১১-এ BF হতে E বা C বা A-এর লম্ব দূরত্বই রৈখিক বিস্তার 'a'।

কোনো শব্দের প্রাবল্য I বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $\boxed{I \propto a^2}$

৭. দশা (Phase) : **দশা কোনো একটি কম্পমান বস্তুর কোনো মুহূর্তের দোলনের অবস্থা প্রকাশ করে।** আরও বিস্তারিতভাবে বলা যায়—তরঙ্গস্থিত কোনো একটি কণার কোনো মুহূর্তের অবস্থান এবং তার গতির অবস্থা ও দিক

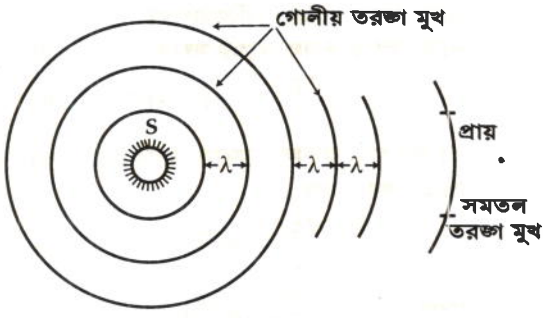
যার দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে দশা বলে। λ দূরত্বে দুটি কণার দশা পার্থক্য 2π। চিত্র ৯.১১-এ A ও E এবং C ও G একই দশাসম্পন্ন। আবার A ও C এবং E ও G বিপরীত দশাসম্পন্ন।

৮. আদি দশা (Epoch) : কোনো একটি কম্পমান বস্তু যে দশা নিয়ে কম্পন শুরু করে, তাকে আদি দশা বলে।

৯. তরঙ্গ বেগ (Wave velocity) : কোনো একটি তরঙ্গ কোনো মাধ্যমে এক সেকেন্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে সেই মাধ্যমের তরঙ্গ বেগ বলে। একে v দ্বারা সূচিত করা হয়। [MAT 23-24]

মাধ্যম ভেদে একই শব্দের বেগ বিভিন্ন। কিন্তু বিভিন্ন শব্দের বেগ একই মাধ্যমে সমান।

১০. তরঙ্গ মুখ (Wave front) : কোনো তরঙ্গের ওপরিস্থিত সমদশাসম্পন্ন কণাগুলো যে তলে অবস্থান করে সেই তলকে তরঙ্গ মুখ বলে। যেমন: পানির তরঙ্গ শীর্ষে অবস্থিত সব কণার দশা একই। তেমনি এর তরঙ্গ পাদে অবস্থিত সব কণার দশাও একই। কাজেই তরঙ্গ শীর্ষ বরাবর অঙ্কিত তল হবে একটি তরঙ্গ মুখ এবং তরঙ্গ পাদ বরাবর অঙ্কিত তল হবে আর একটি তরঙ্গ মুখ। পরপর দুটি তরঙ্গ শীর্ষ বা তরঙ্গপাদ বরাবর অঙ্কিত তলের তরঙ্গ মুখের মধ্যবর্তী দূরত্ব এক তরঙ্গদৈর্ঘ্য [চিত্র ৯.১২]। তরঙ্গ যখন কোনো স্থানের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হয়, তখন তরঙ্গমুখ গোলকাকৃতির হয়।



চিত্র ৯.১২

১১. রশ্মি (Rays) : তরঙ্গ মুখের ওপর অঙ্কিত অভিলম্বকে রশ্মি বলে। তরঙ্গের শক্তি এই রশ্মি বরাবর মাধ্যমের এক অংশ থেকে অন্য অংশে স্থানান্তরিত হয়।

১২. তরঙ্গ শীর্ষ (Crest) : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ধনাত্মক দিকে এক তরঙ্গদৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ শীর্ষ বলে [চিত্র ৯.১১-এ A ও E বিন্দু]।

১৩. তরঙ্গ পাদ (Trough) : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ঋণাত্মক দিকে এক তরঙ্গদৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ পাদ বলে [চিত্র ৯.১১-এ C বিন্দু]।

১৪. তীক্ষ্ণতা বা পিচ (Pitch) : শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন সুর চড়া ও কোন সুর মোটা তা বুঝা যায় তাকে তীক্ষ্ণতা বা পিচ বলে।

১৫. জাতি বা গুণ (Quality) : যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা দুটি ভিন্ন উৎস হতে নির্গত শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতা এক হলেও তাদের একটিকে অন্যটি হতে পৃথক করা যায়, তাকে তার জাতি বা গুণ বলে।

১৬. তরঙ্গের তীব্রতা (Intensity of wave) : কোনো তরঙ্গের সমকোণে একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে এক সেকেন্ডে যে পরিমাণ শক্তি প্রবাহিত হয় তাকে ওই তরঙ্গের তীব্রতা বলে। একে মাধ্যমের শক্তি প্রবাহও (energy current or energy flux) বলা হয়।

৯.৪ তরঙ্গ বেগ, তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক

Relation among wave velocity or speed, wavelength and frequency

মনে করি, কোনো মাধ্যমে কোনো একটি তরঙ্গের বেগ $= v$, তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক $= n$ এবং তরঙ্গদৈর্ঘ্য $= \lambda$। তাদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে। যেহেতু v তরঙ্গ বেগ,

অতএব আমরা পাই,

$v =$ তরঙ্গ কর্তৃক এক সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব ... ... (9.1)

পুনরায় তরঙ্গদৈর্ঘ্য $= \lambda$, সুতরাং শব্দ উৎসের একটি পূর্ণ কম্পনে তরঙ্গ কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \lambda$। কম্পাঙ্ক n হওয়ায় প্রতি সেকেন্ডে nটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন হয়। অতএব nটি পূর্ণ কম্পনের জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব $= n\lambda$

চিত্র ৯.১৩

$\therefore$ $n\lambda =$ তরঙ্গ কর্তৃক এক সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব ... ... (9.2)

সমীকরণ (9.1) এবং (9.2) হতে পাই,

$\boxed{v = n\lambda}$ [MAT 24-25, 16-17] ... ... (9.3)

অর্থাৎ **তরঙ্গ বেগ = কম্পাঙ্ক × তরঙ্গদৈর্ঘ্য**

কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সম্পর্ক লেখচিত্র ৯.১৩ দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে।

এটিই হলো তরঙ্গ বেগ, কম্পাঙ্ক এবং তরঙ্গদৈর্ঘ্যের মধ্যে সম্পর্ক।

আবার, $v = n\lambda = \frac{1}{T} \times \lambda = \frac{\lambda}{T}$। **ইহাই শব্দের বেগ এবং পর্যায়কালের মধ্যে সম্পর্ক।**

৯.৪.১ কণার বেগ ও তরঙ্গ বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between particle velocity and wave velocity

কোনো তরঙ্গের বেগ এবং মাধ্যমের কণার বেগ এক নয়। মাধ্যমের কোনো বিন্দুতে আলোড়ন (disturbance) সৃষ্টি করলে আলোড়ন তরঙ্গাকারে প্রবাহিত হয়। আর মাধ্যমের কণাগুলো এদের সাম্যাবস্থানের সাপেক্ষে আন্দোলিত হয়। অতএব, যে বেগে তরঙ্গ প্রবাহিত হয় তাকে তরঙ্গ বেগ (wave velocity) বলে। পক্ষান্তরে তরঙ্গ বিস্তারের সময় মাধ্যমের কণাগুলো যে বেগে আন্দোলিত হয় তাকে কণার বেগ (particle velocity) বলে। কণার বেগ সাম্যাবস্থানে সর্বাধিক এবং প্রান্তিক অবস্থানে শূন্য হয়।

তরঙ্গ বেগ মাধ্যমের স্থিতিস্থাপকতা ও জড়তার ধর্মের ওপর নির্ভর করে।

কণার বেগ ও তরঙ্গ বেগের সম্পর্ক : একটি চলমান বা অগ্রগামী তরঙ্গ বিবেচনা করি,

$y = a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$, এখানে v হলো তরঙ্গের বেগ, y হলো কণার সরণ। কণার বেগ পাওয়ার জন্য y-কে t-এর সাপেক্ষে অবকলন করলে কণার বেগ পাওয়া যায়।

অতএব কণার বেগ,

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi v}{\lambda} a \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার, $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\pi}{\lambda} a \cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

সুতরাং, সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$$V = -v\frac{dy}{dx} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.4)$$

অর্থাৎ, কণার বেগ = – তরঙ্গ বেগ × সরণ বা দূরত্ব লেখচিত্রের নতিমাত্রা (gradient)।

কণার বেগ ও তরঙ্গবেগের মধ্যে পার্থক্য
Differences between particle velocity and wave velocity

কণার বেগ	তরঙ্গ বেগ
১। কণার বেগ সময় ও অবস্থানের সাথে পর্যায়ক্রমে পরিবর্তিত হয়। অর্থাৎ কণার বেগ ধ্রুবক নয়।	১। নির্দিষ্ট সমসত্ত্ব মাধ্যমে তরঙ্গ বেগ ধ্রুব থাকে।
২। মাধ্যমের কণাগুলো ডানে-বামে স্থান পরিবর্তন না করে ওপরে-নিচে সাম্যাবস্থানের সাপেক্ষে কম্পিত হয়।	২। মাধ্যমের মধ্য দিয়ে তরঙ্গ নির্দিষ্ট বেগে অগ্রসর হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.১

১। কোনো মাধ্যমে 480 Hz এবং 320 Hz কম্পাঙ্কের দুটি শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 2m হলে মাধ্যমে শব্দের বেগ কত হবে ? [দি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০, ২০০৮; রা. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০০৪; ঢা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$v = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{320}{480}$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2} = \frac{320}{480}$

বা, $480\,\lambda_1 = 320\,\lambda_1 + 640$

বা, $480\,\lambda_1 - 320\,\lambda_1 = 640$

বা, $160\,\lambda_1 = 640$

বা, $\lambda_1 = \frac{640}{160} = 4\,\text{m}$

$\therefore\ v = n_1\lambda_1 = 480 \times 4 = 1920\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

$n_1 = 480$ Hz

$n_2 = 320$ Hz

$\lambda_2 - \lambda_1 = 2$ m

$\therefore\ \lambda_2 = 2 + \lambda_1$

$v = ?$

~~২~~। তিনটি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 123, 369 এবং 615 Hz। এরা বায়ুতে যে তরঙ্গ সৃষ্টি করে তাদের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৯]

মনে করি, তরঙ্গদৈর্ঘ্য যথাক্রমে λ_1, λ_2 ও λ_3

আমরা পাই,

$$v = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2 = n_3\lambda_3$$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$ এবং $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{n_3}{n_1}$

$\therefore \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{369}{123} = \frac{3}{1} = \frac{3 \times 5}{1 \times 5} = \frac{15}{5}$ [ওপরে নিচে 5 দ্বারা গুণ করে]

বা, $\lambda_1 : \lambda_2 = 15 : 5$ ... ... (i)

আবার, $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{615}{123} = \frac{5}{1} = \frac{5 \times 3}{1 \times 3} = \frac{15}{3}$ [ওপরে নিচে 3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $\lambda_1 : \lambda_3 = 15 : 3$ ... ... (ii)

অতএব, $\boxed{\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 15 : 5 : 3}$

এখানে,

$n_1 = 123$ Hz

$n_2 = 369$ Hz

$n_3 = 615$ Hz

৩। বায়ু ও পানিতে 300 Hz কম্পাঙ্কের একটি শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 4·16 m। বায়ুতে শব্দের বেগ 352 ms^{-1} হলে, পানিতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৮, ২০০১; সি. বো. ২০০৭, ২০০১; চ. বো. ২০০৬; RUET Admission Test, 2004-05]

মনে করি, পানিতে ও বাতাসে শব্দ তরঙ্গদৈর্ঘ্য যথাক্রমে λ_w ও λ_a

আমরা জানি,

$$\lambda_a = \frac{v_a}{n} = \frac{352}{300}$$

$$\lambda_w = \frac{v_w}{n} = \frac{v_w}{300}$$

প্রশ্নানুসারে,

$$\lambda_w - \lambda_a = \frac{v_w}{300} - \frac{352}{300}$$

বা, $4 \cdot 16 = \frac{1}{300}(v_w - 352)$

বা, $v_w - 352 = 300 \times 4 \cdot 16$

$\therefore v_w = 300 \times 4 \cdot 16 + 352$

$= 1600 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,

$\lambda_w - \lambda_a = 4 \cdot 16$ m

$n = 300$ Hz

$v_a = 352 \text{ ms}^{-1}$

$v_w = ?$

৪। 0·325m ব্যবধানে অবস্থিত তরঙ্গের দুটি কণার মধ্যে দশা পার্থক্য 3·14 rad। তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক 512 Hz হলে মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০১০]

ধরি মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ $= v$

$\therefore$ আমরা পাই, দশা পার্থক্য $= \frac{2\pi}{\lambda} \times$ পথ পার্থক্য ... (i)

কাজেই সমীকরণ (i) অনুসারে,

$$3 \cdot 14 \text{ rad} = \frac{2 \times 3 \cdot 14 \text{ rad}}{\lambda} \times 0 \cdot 325 \text{ m}$$

বা, $\lambda = 2 \times 0 \cdot 325 \text{ m} = 0 \cdot 65 \text{ m}$

$\therefore$ নির্ণেয় বেগ, $v = n\lambda = 512 \text{ Hz} \times 0 \cdot 65 \text{ m}$

$= 332 \cdot 8 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,

পথ পার্থক্য $= 0 \cdot 325$ m

দশা পার্থক্য $= 3 \cdot 14$ rad

$n = 512$

৫। একটি শব্দ তরঙ্গ বায়ুতে 3 মিনিটে 1020 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে। এই শব্দ তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য 50 cm হলে তরঙ্গের পর্যায়কাল কত ? [কু. বো. ২০০৩; SUST Admission Test, 2015–16 (মানভিন্ন)]

$v = \frac{s}{t} = \frac{1020}{3\times 60} = 5{\cdot}67\ ms^{-1}$

আবার, $v = n\lambda$

বা, $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{5{\cdot}67}{0{\cdot}5} = 11{\cdot}33$ Hz

পর্যায়কাল, $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{11{\cdot}33} = 0{\cdot}09$ s

এখানে,
$t = 3$ মি. $= 3\times 60$ সে.
$s = 1020$ মি.
$\lambda = 50\ cm = 0{\cdot}5\ m$
$T = ?$

৬। কোনো একটি সীমাবদ্ধ মাধ্যমে সৃষ্ট স্থির তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 480 Hz। তরঙ্গাস্থ পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব 0·346 m। মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; য. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯]

আমরা জানি,

পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2}$

$\therefore \frac{\lambda}{2} = 0{\cdot}346$ m

বা, $\lambda = 0{\cdot}346\times 2 = 0{\cdot}692$ m

তরঙ্গের বেগ, $v = n\lambda$

$\therefore v = 480\times 0{\cdot}692\ ms^{-1} = 332{\cdot}2\ ms^{-1}$

এখানে,
$n = 480$ Hz
পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব,
$\frac{\lambda}{2} = 0{\cdot}346$ m
$v = ?$

৭। P ও Q দুটি মাধ্যমে শব্দের বেগ যথাক্রমে 300 ms^{-1} এবং 350 ms^{-1}। মাধ্যম দুটিতে শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য = 0·1 m হলে সুর শলাকার 50 কম্পনে শব্দ Q মাধ্যমে কত দূর যাবে ?

[য. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০০]

যেহেতু ‘Q’ মাধ্যমে শব্দের বেগ বেশি তাই ‘Q’ মাধ্যমে সৃষ্ট তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য ‘P’ মাধ্যমে সৃষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যের চেয়ে বড় হবে। অর্থাৎ $\lambda_Q > \lambda_P$

$\therefore \lambda_Q - \lambda_P = 0{\cdot}1 \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

আবার, $v_P = n\lambda_P$

বা, $300 = n\lambda_P \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (ii)

আবার, $v_Q = n\lambda_Q$

বা, $350 = n\lambda_Q \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iii)

(iii) হতে (ii) বিয়োগ করলে পাই,

$n(\lambda_Q - \lambda_P) = 50$

বা, $n = \frac{50}{\lambda_Q - \lambda_P} = \frac{50}{0{\cdot}1} = 500$ Hz

আবার, $s = N\lambda = N\times\frac{v}{n} = \frac{50\times 350}{500} = 35$ m

এখানে,
$v_P = 300\ ms^{-1}$
$v_Q = 350\ ms^{-1}$
$\lambda_Q - \lambda_P = 0{\cdot}1$ m
$N = 50$
$s = ?$

৮। দুটি সুর শলাকার কম্পাঙ্কের পার্থক্য 218 Hz। বাতাসে শলাকা দুটি যে তরঙ্গ উৎপন্ন করে, তাদের একটির দুটি পূর্ণ তরঙ্গদৈর্ঘ্য অপরটির তিনটি পূর্ণ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমান। শলাকাদ্বয়ের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৯]

প্রথম সুরশলাকার তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও কম্পাঙ্ক যথাক্রমে λ_1 ও n_1 এবং

দ্বিতীয় সুরশলাকার তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও কম্পাঙ্ক যথাক্রমে λ_2 ও n_2

প্রশ্নমতে,

$2\lambda_1 = 3\lambda_2$

$\therefore \lambda_1 = \frac{3}{2}\lambda_2$

বাতাসে শব্দের বেগ, v হলে,

$v = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$

এখানে,
$n_2 - n_1 = 218$ Hz
প্রথম সুরশলাকার কম্পাঙ্ক,
$n_1 = ?$
দ্বিতীয় সুরশলাকার কম্পাঙ্ক,
$n_2 = ?$

$$\therefore \quad n_1 \times \frac{3}{2}\lambda_2 = n_2\lambda_2$$

বা, $n_1 = \frac{2}{3} n_2$ ... ... (i)

আবার, $n_2 - n_1 = 218$ Hz ... ... (ii)

বা, $n_2 - \frac{2}{3} n_2 = 218$

$n_2 = 218 \times 3 = 654$ Hz

$\therefore \quad n_1 = 654 - 218 = 436$ Hz

৯.৫ অগ্রগামী তরঙ্গ
Progressive wave

পূর্বের উদাহরণ থেকে জেনেছি পুকুরের স্থির পানিতে ঢিল ছুড়লে অগ্রগামী আড় তরঙ্গের সৃষ্টি হয় এবং এই তরঙ্গ ক্রমাগতভাবে পানির মধ্য দিয়ে অগ্রসর হয়ে কিনারায় পৌঁছায়। কোনো উন্মুক্ত খোলা প্রান্তরে শব্দ তৈরি করলে অগ্রগামী লম্বিক তরঙ্গের সৃষ্টি হয় এবং এই তরঙ্গ ক্রমাগতভাবে বায়ুর মধ্য দিয়ে অগ্রসর হতেই থাকে। মাধ্যমের সকল কণাগুলো সরল ছন্দিত স্পন্দনে কাঁপতে থাকলে চলমান তরঙ্গের সৃষ্টি হয়। কম্পনের উৎস থেকে কোনো কম্পন বা আন্দোলন পরবর্তী কোনো কণাতে স্থানান্তরিত হতে কিছু সময়ের প্রয়োজন হয় ফলে পার্শ্ববর্তী দুটি কণার মধ্যে দশা পার্থক্য সৃষ্টি হয়। যদি তরঙ্গ বাম থেকে ডানদিকে যায় তা হলে স্বাভাবিকভাবেই বাম থেকে ডানদিকের কণার দশা কম হয়। সুতরাং প্রথম কণার দশা ও দূরবর্তী কণার দশা পার্থক্য বৃদ্ধি পেতে থাকবে। তবে পাশাপাশি দুটি কণার দশা পার্থক্য একই হবে।

কোনো তরঙ্গ যদি কোনো বিস্তৃত মাধ্যমের এক স্তর হতে অন্য স্তরে সঞ্চালিত হয়ে ক্রমাগত সম্মুখের দিকে অগ্রসর হতে থাকে, তবে তাকে অগ্রগামী বা চলমান তরঙ্গ (progressive wave) বলে।

উদাহরণ : (ক) পুকুরের পানিতে ঢিল ছুঁড়লে আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হয়। এই ঢেউ বা তরঙ্গ পানির মধ্য দিয়ে কিনারার দিকে ক্রমাগত অগ্রসর হতে থাকে। সুতরাং পানির ঢেউ **অগ্রগামী আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ** (progressive transverse wave)।

(খ) বক্তা কথা বললে শব্দ উৎপন্ন হয়। শব্দ লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ। এই শব্দ বক্তার মুখ হতে বাতাসের মধ্য দিয়ে ক্রমাগত সম্মুখের দিকে অগ্রসর হয়ে শ্রোতার কানে পৌঁছায়। অতএব শব্দ **অগ্রগামী লম্বিক তরঙ্গ** (progressive longitudinal wave)।

৯.৫.১ অগ্রগামী তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of progressive wave

অগ্রগামী তরঙ্গের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয় :

(ক) কোনো মাধ্যমের একই প্রকার কম্পনে এই তরঙ্গের উৎপত্তি হয়।

(খ) এটি একটি সুষম মাধ্যমের মধ্য দিয়ে একটি নির্দিষ্ট দ্রুতি বা বেগে প্রবাহিত হয়।

(গ) অগ্রগামী তরঙ্গের বেগ মাধ্যমের ঘনত্ব ও স্থিতিস্থাপকতার ওপর নির্ভর করে।

(ঘ) মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পন তরঙ্গ প্রবাহের সাপেক্ষে আড় ও লম্বিক হতে পারে।

(ঙ) মাধ্যমের কণাগুলো কখনো স্থির থাকে না।

(চ) তরঙ্গ মুখের অভিলম্ব বরাবর শক্তি বহন করে এ তরঙ্গ প্রবাহিত হয়।

(ছ) তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমের বিভিন্ন অংশের চাপ ও ঘনত্বের একই প্রকার পরিবর্তন ঘটে।

(জ) মাধ্যমের প্রতিটি কণার কম্পাঙ্ক ও বিস্তার একই হয় এবং তারা একই ধরনের কম্পনে কম্পিত হয়।

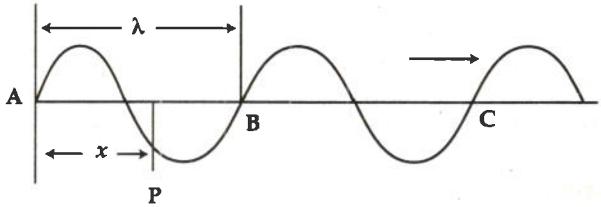
(ঝ) তরঙ্গ প্রবাহের দরুন মাধ্যমের কণার দশা পরবর্তী কণাতে স্থানান্তরিত হয়। এরূপ দুটি কণার দশা বৈষম্য তাদের দূরত্বের সমানুপাতিক।

(ঞ) মাধ্যমের যেকোনো কণার বিভিন্ন ধর্ম যেমন বেগ, ত্বরণ, শক্তি প্রভৃতি একইরূপ পরিবর্তনের মধ্য দিয়ে যায়।

৯.৫.২ অগ্রগামী তরঙ্গের গাণিতিক রাশিমালা
Mathematical expression for progressive wave

ধরি একটি চলমান তরঙ্গ A থেকে C-এর দিকে অগ্রসর হচ্ছে [চিত্র ৯.১৪]। যেহেতু মাধ্যমের কণাগুলো ছন্দিত স্পন্দনে কম্পিত হয়, সেহেতু A বিন্দুস্থ কণার সরণকে নিচের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

$$y = a \sin \omega t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.5)$$



চিত্র ৯.১৪

এখানে, y = t সময়ে সাম্যাবস্থান থেকে কণাটির সরণ
a = কণাটির কম্পনের বিস্তার
ω = কণাটির কৌণিক কম্পাঙ্ক

যদি কণাটির কম্পাঙ্ক n হয়, তা হলে $\omega = 2\pi n$ [n = কম্পাঙ্ক]

$$\therefore\ y = a \sin 2\pi nt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.6)$$

আমরা জানি, সমদশাসম্পন্ন পরপর দুটি কণার মধ্যবর্তী দূরত্ব হচ্ছে তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ, চিত্রে, λ = AB। এখন বলা যায়, B বিন্দুস্থ কণার দশা A বিন্দুস্থ কণার দশার চেয়ে 2π পরিমাণ কম। A থেকে x দূরত্বে P একটি বিন্দু লই। অতএব, P বিন্দুস্থ কণার দশা A বিন্দুস্থ কণার দশার চেয়ে $\frac{2\pi x}{\lambda}$ পরিমাণ কম।

[যেহেতু λ দূরত্বের জন্য দশা পার্থক্য $= 2\pi$

$\therefore$ 1 " " " " $= \frac{2\pi}{\lambda}$

বা, x " " " " $= \frac{2\pi}{\lambda} \times x$]

এখন, P বিন্দুস্থ কণার সরণ,

$$y = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.7)$$

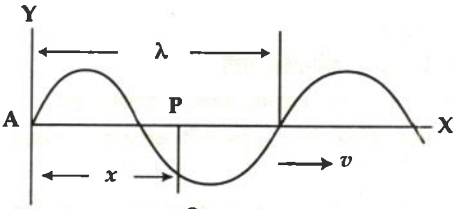
বা, $y = a \sin(\omega t - kx)$ [এখানে, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = তরঙ্গ সংখ্যা]

বা, $y = a \sin\left(2\pi n\, t - \frac{2\pi\, x}{\lambda}\right)$

বা, $y = a \sin\left(\frac{2\pi\, vt}{\lambda} - \frac{2\pi\, x}{\lambda}\right)$ $\left[\text{এখানে, } v = n\lambda \ \therefore\ n = \frac{v}{\lambda}\right]$

$$\text{বা, } y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.8)$$

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method)



চিত্র ৯.১৫

আমরা জানি,

$$y = a \sin 2\pi nt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

তরঙ্গটি X-এর ধনাত্মক দিকে গতিশীল। A থেকে ডানদিকে x দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দুতে পৌছাতে তরঙ্গটির সময় লাগে $\frac{x}{v}$। সুতরাং, সময় বিবেচনায় P বিন্দুটি সর্বদা A বিন্দু অপেক্ষা $\frac{x}{v}$ পরিমাণ পিছিয়ে থাকে। এখন A বিন্দু ও P বিন্দুর সময় যথাক্রমে

t ও t' হলে, $t' = t - \frac{x}{v}$ । অতএব P বিন্দুতে অবস্থিত কণার সরণ,

$$y = a\sin\omega t' = a\sin\omega(t - \frac{x}{v}) = a\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right)$$

$$= a\sin\left(\omega t - \frac{2\pi n}{v}x\right) = a\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

বা, $y = a\sin(\omega t - kx)$ $\left[\text{এখানে}, k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{তরঙ্গ সংখ্যা}\right]$

বা, $y = a\sin\left(2\pi n\, t - \frac{2\pi\, x}{\lambda}\right)$

বা, $y = a\sin\left(\frac{2\pi vt}{\lambda} - \frac{2\pi\, x}{\lambda}\right)$ $\left[\because v = n\lambda \quad \therefore \quad n = \frac{v}{\lambda}\right]$

বা, $y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$

এটি হলো A বিন্দু থেকে x দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দুস্থ কণার সরণের **সমীকরণ**। একে মাধ্যমের যেকোনো সরণের সাধারণ সমীকরণ বলে। যেহেতু এটি কোনো মাধ্যমের যেকোনো কণার সরণের সমীকরণ নির্দেশ করে তাই **সমীকরণ (iii)-কে চলমান বা অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ** বলা হয়।

X-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হবে, $y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x) \quad \ldots \quad (9.9)$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোনো কণার সরণ সাইন বা কোসাইনের অপেক্ষক তাই উপরিউক্ত সমীকরণগুলোতে সাইন-এর জায়গায় কোসাইন বসালেও অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

অগ্রগামী তরঙ্গ থেকে আমরা যা জানতে পারি তা তোমার পঠিত জ্ঞানের সাথে মিলাও।

(১) x-এর নির্দিষ্ট মান বসালে এই সমীকরণ থেকে ওই বিন্দুতে অবস্থিত কণার গতির সমীকরণ পাওয়া যায়।

(২) t-এর নির্দিষ্ট মানে এই সমীকরণ থেকে ওই মুহূর্তে তরঙ্গের আকার জানা যায়।

(৩) অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, নির্দিষ্ট সময়ে বিভিন্ন কণার সরণের লেখচিত্র অর্থাৎ স্থান-সরণ লেখ (y — x) সাইন বক্ররেখা হয়। আবার কোনো নির্দিষ্ট কণার বিভিন্ন সময়ে সরণের লেখচিত্র (y — t) সাইন বক্ররেখা হয়।

(৪) এই সমীকরণ থেকে সহজে প্রমাণ করা যায় যে, কণার সরণ y সময় T পরপর অথবা λ দূরত্বে চাপের পুনরাবৃত্তি হয়। অতএব তরঙ্গ দ্বি-পর্যাবৃত্ত হয়। সময়ের সাথে এই পর্যায় T এবং দূরত্বের সঙ্গে পর্যায় λ।

অনুধাবনমূলক কাজ : অগ্রগামী তরঙ্গের গতিবেগ ধ্রুব হলেও তরঙ্গের ওপরিস্থিত মাধ্যমের কণার ত্বরণ সর্বদা শূন্য হয় না কেন ? —ব্যাখ্যা কর।

অগ্রগামী তরঙ্গের গতিবেগ এবং তরঙ্গের মাধ্যমের কণার গতিবেগ এক নয়। তরঙ্গের গতিবেগ ধ্রুব হলেও মাধ্যমের কণার সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির বেগ প্রতিনিয়ত পরিবর্তিত হয়। সময়ের সাথে এই স্পন্দন গতির পরিবর্তনের হার হলো কণার তাৎক্ষণিক ত্বরণ, যা সাম্যাবস্থান হতে কণার সরণের সমানুপাতিক। এ কারণেই অগ্রগামী তরঙ্গের গতিবেগ ধ্রুব হলেও তরঙ্গের উপরিস্থিত মাধ্যমের কণার ত্বরণ সর্বদা শূন্য হয় না।

কাজ : একটি অগ্রগামী তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে যখন বিস্তার লাভ করে, তখন মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোলগতি সম্পাদন করে।—ব্যাখ্যা কর।

অগ্রগামী বা চলমান তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

সমীকরণ (i) কে t-এর সাপেক্ষে দুই বার অবকলন করে পাই,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi v}{\lambda}a\cos\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2\pi v}{\lambda} \times \frac{2\pi v}{\lambda} \; a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$= -\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2} \; a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$= -\left(\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}\right) y$$

$\therefore$ ত্বরণ, $f \propto -y$

অর্থাৎ কণার ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং সর্বদা সাম্যাবস্থানের দিকে ক্রিয়া করে। এটিই সরল দোলগতির সমীকরণ। সুতরাং যখন তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে বিস্তার লাভ করে, তখন মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোলগতি সম্পাদন করে।

জানার বিষয় : ~~I.~~ কণার সরণ y ও বেগ v-এর মধ্যে দশা পার্থক্য 90°।

~~II.~~ কণার সরণ y এবং ত্বরণ a-এর মধ্যে দশা পার্থক্য 180°।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.২

১। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ, $y = y_0 \sin 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$। মাধ্যমের কণার সর্বাধিক বেগ তরঙ্গের বেগের দ্বিগুণ হলে দেখাও যে, $\lambda = \pi y_0$।

এখানে, $y = y_0 \sin 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) = y_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(\lambda ft - x)$ ... ... (i)

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ,

$$y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করলে, $a = y_0$ এবং তরঙ্গের বেগ, $V = f\lambda$

এখন কণার বেগ,

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\pi f y_0 \cos 2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$\therefore$ কণার সর্বোচ্চ বেগ, $v_{max} = 2\pi f y_0$

প্রশ্নানুসারে, $2\pi f y_0 = 2f\lambda$

$\therefore \quad \lambda = \pi y_0$ (প্রমাণিত)

২। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0{\cdot}5 \sin\left(200t - 0{\cdot}4x + \frac{\pi}{3}\right)$। নির্ণয় কর : (i) $x = 0$ বিন্দুতে $t = 0$ সময়ে কণার দশা, (ii) X-অক্ষ বরাবর 50 cm দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুর মধ্যে দশা পার্থক্য এবং (iii) যেকোনো বিন্দুতে 4×10^{-2} sec সময়ে দশার পরিবর্তন।

এখানে তরঙ্গের দশা, $\phi = 200t - 0{\cdot}4x + \frac{\pi}{3}$

(i) $x = 0$ বিন্দুতে $t = 0$ সময়ে দশা, $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

(ii) দশা পার্থক্য, $\Delta\varphi = -0{\cdot}4\,\Delta x = -0{\cdot}4\,(x_2 - x_1)$

$= -0{\cdot}4\,(50 - 0) = -0{\cdot}4 \times 50$

$= -20$ rad

(iii) দশার পরিবর্তন $= 200t = 200 \times 4 \times 10^{-2} = 8$ rad

৯·৫·৩ দশা ও দশা পার্থক্য
Phase and phase difference

দশা
Phase

অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ, $y = a\sin\omega(t - \frac{x}{v})$ থেকে পাই,

$$y = a\sin\frac{\omega}{v}(vt - x)$$

$$= a\sin k(vt - x) = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \left(\because k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{n\lambda} = \frac{2\pi n}{v} = \frac{\omega}{v}\right)$$

$$= a\sin\theta$$

যেখানে $\theta = \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ ... ... (9.10)

এই θ কোণকে তরঙ্গের **দশা কোণ বা দশা** বলা হয়।

একটি তরঙ্গের নির্দিষ্ট মাধ্যমে v ও λ ধ্রুবক হয়। স্পষ্টতই θ নির্ভর করে দূরত্ব x ও সময় t-এর ওপর। কোনো নির্দিষ্ট মুহূর্তে অর্থাৎ t = ধ্রুবক হলে তরঙ্গের দশা দূরত্বের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়। আবার কোনো বিন্দুতে অর্থাৎ, x = ধ্রুবক হলে তরঙ্গের দশা সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়।

দশা পার্থক্য
Phase difference

অগ্রগামী তরঙ্গের যেকোনো দুটি ভিন্ন অবস্থানে অবস্থিত দুটি কণার দশা পার্থক্য বলতে একই সময়ে ওই দুটি অবস্থানের দশা কোণের পার্থক্যকে বুঝায়। তরঙ্গটি যদি X-অক্ষ অভিমুখে চলে এবং দুটি কণার অবস্থান যথাক্রমে x_1 ও x_2 হলে ওই দুটি কণার মধ্যে পথ পার্থক্য (path difference) হবে $x_2 - x_1$।

এখন সমীকরণ (9.10) অনুসারে t সময়ে কণা দুটির দশা কোণ যথাক্রমে,

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x_1) \text{ এবং } \theta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x_2)$$

সুতরাং দশা পার্থক্য $= \theta_2 \sim \theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$

অর্থাৎ, $\boxed{\text{দশা পার্থক্য} = \frac{2\pi}{\lambda} \times \text{পথ পার্থক্য}}$ ... ... (9.11)

সমীকরণ (9.11) থেকে পাই,

(i) কণা দুটির পথ পার্থক্য $0, \lambda, 2\lambda, \ldots\ldots$ ইত্যাদি হলে দশা পার্থক্য হবে $0, 2\pi, 4\pi, \ldots\ldots\ldots$ ইত্যাদি। এক্ষেত্রে কণা দুটি সমদশাসম্পন্ন।

(ii) কণা দুটির পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \ldots\ldots\ldots$ ইত্যাদি হলে দশা পার্থক্য হবে $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots\ldots\ldots$ ইত্যাদি। এক্ষেত্রে কণা দুটি বিপরীত দশায় থাকে।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৩

১। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ, $y = 5\sin(200\pi t - 1{\cdot}57x)$, এখানে সব কটি রাশি S. I. এককে প্রদত্ত। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, বেগ, পর্যায়কাল ও $x = 0{\cdot}2$ m এবং $x = 1$ m; দুটি বিন্দুর মধ্যে দশা পার্থক্য নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৬; ব. বো. ২০০৯, ২০০৪; দি. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০০; Admission Test : KUET 2004-05 (মান ভিন্ন); RUET 2015-16 (মান ভিন্ন); BUET 2005-06 (মান ভিন্ন)]

দেওয়া আছে,

$$y = 5\sin(200\pi t - 1{\cdot}57x) \quad \ldots \ldots \text{(i)}$$

আমরা জানি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$= A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad \ldots \ldots \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$$A = 5\text{ m} \text{ এবং } \frac{2\pi}{\lambda} v = 200\pi$$

বা, $2\pi n = 200\pi$ $\left[\because \frac{v}{\lambda} = n\right]$

$\therefore n = 100\text{ Hz}$

আবার, $\frac{2\pi}{\lambda} = 1{\cdot}57$ $\therefore \lambda = \frac{2\pi}{1{\cdot}57} = 4\text{m}$

এখন, $\frac{v}{\lambda} = n$

বা, $v = \lambda n = 4 \times 100 = 400\text{ ms}^{-1}$

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{100} = 0{\cdot}01\text{s}$$

যেহেতু $\varphi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} vt - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ $\therefore \Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$

এখানে, $\Delta x = 1{\cdot}0 - 0{\cdot}2 = 0{\cdot}8\text{ m}$

$\therefore \Delta\varphi = -\frac{2\pi}{4} \times 0{\cdot}8 = -0{\cdot}4\pi$

উত্তর : বিস্তার 5m ; কম্পাঙ্ক = 100 Hz ; বেগ = 400 ms^{-1}, পর্যায়কাল = 0·01s এবং দশা পার্থক্য = $-0{\cdot}4\pi$

২। কোনো তরঙ্গের বিস্তার 0·2 m হলে $t = \frac{T}{3}$ সময়ে কম্পনের উৎস হতে $x = \frac{\lambda}{6}$ দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর সাম্যাবস্থান হতে সরণ কত হবে ? [ব. বো. ২০০৯]

এখানে,
তরঙ্গের বিস্তার, $A = 0{\cdot}2\text{ m}$
সময়, $t = T/3$
উৎস হতে দূরত্ব, $x = \frac{\lambda}{6}$
সরণ, $y = ?$

আমরা জানি,

সরণ, $y = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$

বা, $y = A\sin\left(\frac{2\pi vt}{\lambda} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

$$\therefore y = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \left[\because \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}\right]$$

$$= 0{\cdot}2\sin\left(\frac{2\pi T}{T\times 3} - \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{6}\right) = 0{\cdot}2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{6}\right)$$

$$= 0{\cdot}2\sin\left(\frac{4\pi - 2\pi}{6}\right) = 0{\cdot}2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{\cdot}173\text{ m}$$

৩। একটি সুতায় দুটি তরঙ্গের মিলনের ফলে যে স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তার সমীকরণ হচ্ছে $y = 5\sin\frac{\pi x}{3}\cos 40\pi t$, যেখানে x ও y হলো সেমি-এ এবং t হলো সেকেন্ডে।

(ক) তরঙ্গ দুটির প্রত্যেকটির বিস্তার ও বেগ কত ?

(খ) দুটি পরপর নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত ?

[BUET Admission Test, 2018-19 (values diff.), 2016-17]

$$y = 5\sin\frac{\pi x}{3}\cos 40\pi t = A\cos 40\pi t \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার লব্ধি তরঙ্গের জন্য বিস্তার,

$$y = 5\sin\frac{2\pi}{\lambda}\times\cos\omega t \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

প্রত্যেকটি তরঙ্গের বিস্তার $\frac{5}{2}$

$\because \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi x}{3}$ $\therefore \lambda = 6\text{ cm}$

(i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$$\omega = 40\pi$$

বা, $\frac{2\pi}{T} = 40\pi$

বা, $2\pi n = 40\pi$

বা, $2\pi\frac{v}{\lambda} = 40\pi$

প্রত্যেকটি তরঙ্গের বেগ, $v = \frac{\lambda}{2\pi} \times 40\pi = \lambda \times 20 = 6 \times 20 = 120\ cms^{-1}$

(খ) আমরা জানি,

স্থির তরঙ্গের যেকোনো দুটি নিষ্পন্ন বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2}$

'ক' হতে $\lambda = 6$

অতএব, দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2} = \frac{6}{2} = 3\,cm$

৪। সরল ছন্দিত গতি সম্পন্ন একটি কণার সমীকরণ $y = 10 \sin (\omega t + \delta)$। পর্যায়কাল 30 sec এবং আদি সরণ 0·05 m হলে, কণাটির (ক) কৌণিক কম্পাঙ্ক (খ) আদি দশা নির্ণয় কর। [CUET Admission Test, 2009-10]

এখানে,

$T = 30\ sec$

$y = 0{\cdot}05\ m$

(ক) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}\ rad\ s^{-1}$

(খ) এখানে, $y = 10 \sin (\omega t + \delta)$

বা, $0{\cdot}05 = 10 \sin\left(\frac{\pi}{15} \times 0 + \delta\right)$

বা, $\sin\delta = \frac{0{\cdot}05}{10}$

বা, $\delta = \sin^{-1}(0{\cdot}005) = 0{\cdot}287°$

$\therefore \delta = 0{\cdot}287° = 5 \times 10^{-3}\ rad$

৯·৬ উপরিপাতন নীতি
Principle of superposition

আগের অনুচ্ছেদগুলোতে আমরা মাধ্যমের ভেতর দিয়ে শুধুমাত্র একটি তরঙ্গের গতি সম্পর্কে আলোচনা করেছি। এবার আমরা একই মাধ্যমের ভেতর দিয়ে দুটি বা তার বেশি তরঙ্গ একই সঙ্গে চলতে থাকলে কী ঘটবে তা আলোচনা করব। এই বিষয়ে বিজ্ঞানী হাইগেনস্ (Huygens) একটি সহজ সূত্র আবিষ্কার করেন। সূত্রটি নিম্নরূপ :

যখন দুটি বা তার বেশি তরঙ্গ একই সঙ্গে একই মাধ্যমের ভেতর দিয়ে এগোতে থাকে তখন মাধ্যমের প্রতিটি কণার লব্ধি সরণ হবে আলাদাভাবে সৃষ্ট প্রতিটি তরঙ্গের সরণের ভেক্টর যোগফলের সমান। এই সূত্রকে তরঙ্গের উপরিপাতনের সূত্র বা উপরিপাতনের নীতি (principle of superposition) বলে।

নীতি : "কোনো কণার ওপর একই সময়ে দুটি তরঙ্গ আপতিত হলে সাম্যাবস্থান থেকে কণাটির লব্ধি সরণ হবে তরঙ্গ দুটির জন্য কণাটির সরণদ্বয়ের ভেক্টর সমষ্টির সমান।"

মনে করি, কোনো মাধ্যমের ভেতর দিয়ে দুটি তরঙ্গ একসাথে অগ্রসর হচ্ছে। প্রথম তরঙ্গের জন্য মাধ্যমের কোনো কণার সরণ যদি y_1 হয় এবং দ্বিতীয় তরঙ্গের জন্য যদি ওই কণার সরণ y_2 হয়, তবে এই সূত্র অনুযায়ী কণার লব্ধি সরণ হবে,

$$\vec{y} = \vec{y_1} + \vec{y_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.12)$$

$$y = y_1 \pm y_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.13)$$

যদি সরণ দুটি একই সরলরেখা বরাবর একই অভিমুখে হয়, তবে যোগ চিহ্ন এবং যদি সরণ দুটি একই সরলরেখা বরাবর কিন্তু বিপরীতমুখী হয়, তবে বিয়োগ চিহ্ন দিতে হয়। উপরিপাতন নীতির নিম্নের প্রায়োগিক দিকগুলো লক্ষ কর।

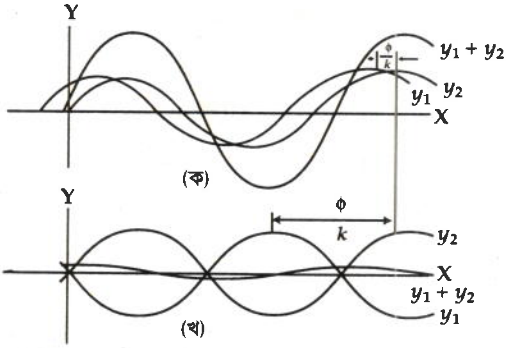
(i) একই মাধ্যমের ভেতর দিয়ে বিভিন্ন তরঙ্গ যে স্বাধীনভাবে সঞ্চালিত হয়, তা আমরা দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকেও সহজে বুঝতে পারি। পুকুরের পানিতে একসঙ্গে দুটি ঢিল ফেললে যে দুটি বৃত্তাকার তরঙ্গের সৃষ্টি হয়, তারা একে অপরের মধ্য দিয়ে অপরিবর্তিত আকার, অভিমুখ এবং বেগ নিয়ে এগিয়ে যায়। একসঙ্গে কথা বললেও আমরা দুই-তিন জন লোকের কথাবার্তা অবিকৃতভাবে শুনতে পাই। ছবি তোলার সময় বিভিন্ন বস্তু থেকে আগত আলোর তরঙ্গগুলো ক্যামেরার সাটারের ছিদ্রের মধ্য দিয়ে একই সঙ্গে ভেতরে ঢোকে, কিন্তু একে অপরকে প্রভাবিত করে না। ফলে প্রতিটি বস্তুর পরিষ্কার ছবি পাওয়া যায়।

(ii) পানির তরঙ্গ, শব্দ তরঙ্গ প্রভৃতি যেসব তরঙ্গ জড় মাধ্যমের ভেতর দিয়ে চলে তাদের ক্ষেত্রে যদি উপরিপাতিত তরঙ্গগুলোর বিস্তার কম হয়, শুধুমাত্র তখনই এই সূত্রটি প্রযোজ্য হয়।

(iii) উপরিপাতের সূত্রটি একটি সাধারণ সূত্র। বিভিন্ন তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বা গতির অভিমুখ যাই হোক না কেন, ওদের উপরিপাতের ক্ষেত্রে সূত্রটি সব সময় প্রযোজ্য হয়। কিন্তু আমরা আমাদের আলোচনা শুধুমাত্র সমান বা কাছাকাছি কম্পাঙ্কের তরঙ্গের ক্ষেত্রে সীমাবদ্ধ রাখব।

৯·৬·১ উপরিপাতনের ফলে সৃষ্ট লব্ধি তরঙ্গ
Resultant wave due to superposition of two waves

নিচের লেখচিত্র দুটি লক্ষ কর কীভাবে দুটি তরঙ্গের উপরিপাতনে লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার পরিবর্তিত হয়।



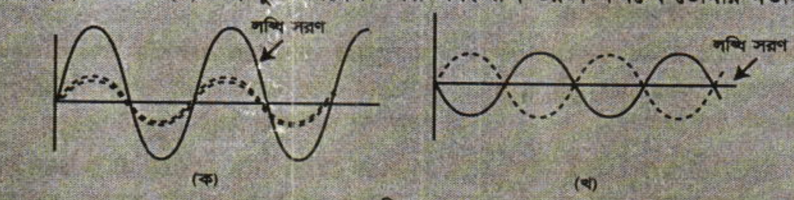
চিত্র ৯.১৬

৯.১৬(ক) চিত্রে দুটি সমান কম্পাঙ্ক, বিস্তার এবং প্রায় একই দশাসম্পন্ন কণার উপরিপাতনের ফলে সৃষ্ট লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার তরঙ্গদ্বয়ের যেকোনো একটির বিস্তারের প্রায় দ্বিগুণ।

৯.১৬(খ) চিত্রে দুটি সমান কম্পাঙ্ক, বিস্তার এবং বিপরীত দশায় অর্থাৎ 180° দশা পার্থক্যে দুটি তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে সৃষ্ট লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার প্রায় শূন্য।

উভয় ক্ষেত্রে লব্ধি কম্পাঙ্ক অপরিবর্তিত আছে।

যাচাই কর : ৯.১৭ (ক) ও ৯.১৭(খ) চিত্র দুটি পর্যবেক্ষণ কর এবং লব্ধি তরঙ্গ সম্বন্ধে তোমার মতামত প্রদান কর।



চিত্র ৯.১৭

একই ধরনের তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে নিম্নলিখিত কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ ঘটনার উৎপত্তি হয়—

১। **স্থির তরঙ্গ** (Stationary waves) : সর্ব বিষয়ে একই রকম দুটি সরল দোল তরঙ্গ পরস্পর বিপরীত দিক থেকে এসে উপরিপাতিত হলে স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হয়।

২। **ব্যতিচার** (Interference) : একই কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের অথবা একই কম্পাঙ্ক ও সামান্য ভিন্ন বিস্তারের দুটি সরল দোল তরঙ্গ পারস্পরিক দশা সম্পর্ক বজায় রেখে একই অভিমুখে বিস্তার লাভ করার সময় পরস্পরের ওপর উপরিপাতিত হলে ব্যতিচার সৃষ্টি হয়।

৩। **স্বরকম্প** (Beats) : একই বিস্তারের কিন্তু সামান্য ভিন্ন কম্পাঙ্কযুক্ত দুটি সরল দোল তরঙ্গ পরস্পরের ওপর উপরিপাতিত হলে স্বরকম্পের সৃষ্টি হয়।

এই অধ্যায়ে স্থির তরঙ্গ ও স্বরকম্প আলোচনা করা হবে।

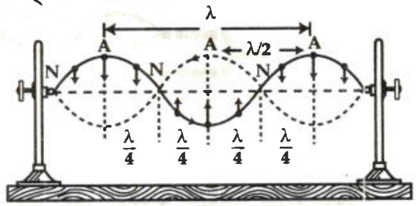
৯.৭ স্থির তরঙ্গ
Stationary wave

আড় বা লম্বিক উভয় প্রকার তরঙ্গের ক্ষেত্রেই স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হতে পারে। একটি তারের উভয় প্রান্তকে টান টান করে বেঁধে যেকোনো বিন্দুতে দৈর্ঘ্যের সমকোণে টেনে ছেড়ে দিলে আড় তরঙ্গ তারের উভয়দিকে প্রবাহিত হবে। বন্ধ দুই প্রান্তে প্রতিফলিত হয়ে তরঙ্গ বিপরীত দিকে এসে মূল তরঙ্গের ওপর আপতিত হবে। কিছুক্ষণ পরে এই তরঙ্গ দুটি আবার থেমেও যাবে। এই ধরনের তরঙ্গ স্থির তরঙ্গ।

কোনো মাধ্যমের একটি সীমিত অংশে পরস্পর বিপরীতমুখী সমান বিস্তার ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুটি অগ্রগামী তরঙ্গ একে অপরের ওপর আপতিত হলে যে নতুন তরঙ্গ সৃষ্টি হয় তাকে স্থির তরঙ্গ বলে।

এই তরঙ্গ মাধ্যমের ওই অংশে সীমাবন্ধ থাকে, মাধ্যমের ভেতর দিয়ে অগ্রসর হয় না। সাধারণভাবে বলা যায় যে, এ স্থলে সীমাবন্ধ থেকে পর্যায়ক্রমে গতিশক্তি (স্থিতিস্থাপক) স্থিতি বা বিভব শক্তিতে পরিবর্তিত হয়।

উদাহরণ : একটি টানা তারের কোথাও আঘাত করলে একটি তরঙ্গ সৃষ্টি হয় [চিত্র ৯.১৮]] এবং এই তরঙ্গ তার বেয়ে দুই প্রান্তের দিকে অগ্রসর হয় এবং পরিশেষে দুই প্রান্ত হতে প্রতিফলিত হয়ে ফিরে আসে। এই প্রতিফলিত তরঙ্গ ও মূল তরঙ্গের প্রকৃতি অভিন্ন থাকলেও তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য 180° হয়। ফলে তারে প্রতিফলিত তরঙ্গ ও এর বিপরীত দিকে গতিশীল (নতুন) মূল তরঙ্গ মিলে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি হয়। এই তরঙ্গ তারের বাইরে যায় না—তারের মধ্যেই পর্যায়ক্রমে উৎপন্ন ও বিলুপ্ত হয়। তারটি ভালোভাবে লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, তারের সকল বিন্দুর বিস্তার সমান নয়।



চিত্র ৯.১৮

সুস্পন্দ বিন্দু : স্থির তরঙ্গের উপরস্থ কোনো কোনো বিন্দুতে বস্তুকণার বিস্তার শূন্য এবং কোনো কোনো বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক। যে বিন্দুগুলোতে বিস্তার সর্বাধিক (চিত্রে A চিহ্নিত বিন্দুগুলো) তাদেরকে সুস্পন্দ বিন্দু (Antinode) বলে। পরপর দুটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$।

নিস্পন্দ বিন্দু : স্থির তরঙ্গের উপরস্থিত যেসব বিন্দুতে বিস্তার শূন্য (চিত্রে N চিহ্নিত বিন্দুগুলো) তাদেরকে নিস্পন্দ বিন্দু (Node) বলে। পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$। একটি সুস্পন্দ ও একটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{4}$।

হিসাব : কোনো স্থির তরঙ্গের উপরস্থ পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব 0.52 m। স্থির তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 320 Hz। তরঙ্গের বেগ কত ?

পরপর দুটি নিস্পদ বিন্দুর দূরত্ব $=\frac{\lambda}{2}=0.52 \quad \therefore \quad \lambda = 1.04$ m

আবার, $v = n\lambda = 320 \times 1.04 = 332.8$ ms^{-1}

৯.৭.১ স্থির তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of stationary wave

MAT

স্থির তরঙ্গের কতগুলো ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য রয়েছে। বৈশিষ্ট্যগুলো নিম্নে উল্লেখ করা হলো :

(ক) এই তরঙ্গ কোনো একটি মাধ্যমের সীমিত অংশে উৎপন্ন হয়।

(খ) অগ্রগামী তরঙ্গের ন্যায় অগ্রসর না হয়ে একই স্থানে সীমাবন্ধ থাকে।

(গ) তরঙ্গের বিভিন্ন বিন্দুতে কম্পনের বিস্তার সমান নয়।

(ঘ) তরঙ্গের যে বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক তাকে ‘সুস্পন্দ’ বিন্দু বলে এবং তরঙ্গের যে বিন্দুতে বিস্তার শূন্য তাকে ‘নিস্পন্দ’ বিন্দু বলে।

(ঙ) তরঙ্গের সুস্পন্দ বিন্দুর বিস্তার তরঙ্গ সৃষ্টিকারী মূল তরঙ্গের বিস্তারের দ্বিগুণের সমান।

(চ) দুটি পরপর নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী কণার সরণ একই দিকে হয় এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব λ/2। পরপর নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী অংশকে লুপ (Loop) বলে।

(ছ) পরপর দুটি লুপের সরণ পরস্পর বিপরীত দিকে হয়।

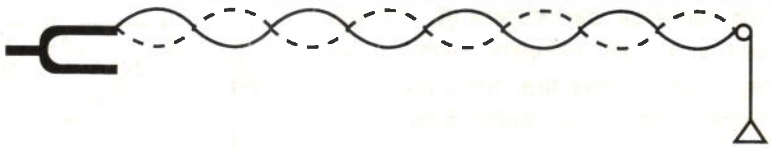
(জ) নিস্পন্দ বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের পরিবর্তন সর্বাধিক, কিন্তু সুস্পন্দ বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের পরিবর্তন শূন্য।

(ঝ) পরপর তিনটি সুস্পন্দ বিন্দু বা পরপর তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু বা দুটি লুপের মধ্যবর্তী দূরত্বই স্থির তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

(ঞ) স্থির তরঙ্গের স্থির বিন্দুস্থ কণাগুলো ছাড়া সকল কণার গতি সরল ছন্দিত গতি।

(ট) কোনো মাধ্যমে স্থির তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ) বা কম্পাঙ্ক (n) তরঙ্গ সৃষ্টিকারী যেকোনো একটি মূল তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য (λ) বা কম্পাঙ্ক (n)-এর সমান।

স্থির তরঙ্গ সৃষ্টির পরীক্ষণ : একটি তারকে একটি কপিকলের ওপর দিয়ে নিয়ে এর এক প্রান্তে একটি স্কেল প্যান যুক্ত কর। তারের অন্য প্রান্ত একটি সুরশলাকার যেকোনো বাহুর সাথে আটকাও। স্কেল প্যানে ওজন চাপাও। দেখতে পাবে তারটি টানটান হয়ে আছে। এখন সুরশলাকাকে আঘাত কর।



চিত্র ৯·১৯

সুরশলাকাকে কম্পিত করলে একটি চলতরঙ্গের সৃষ্টি হয় [চিত্র ৯·১৯] এবং তার বরাবর অগ্রসর হয়ে অপর প্রান্ত থেকে প্রতিফলিত হয়। আপতিত ও প্রতিফলিত তরঙ্গ দুটির উপরিপাতনের জন্য স্থির তরঙ্গ গঠিত হয়। প্যানের উপর রাখা ওজন প্রয়োজন মতো অদল-বদল করলে নিস্পন্দ বিন্দু ও সুস্পন্দ বিন্দুগুলোসহ স্থির তরঙ্গটি পরিষ্কারভাবে দেখা যায়।

৯·৭·২ স্থির তরঙ্গ সৃষ্টির শর্ত
Conditions for propagation of stationary wave

নিম্নলিখিত শর্ত সাপেক্ষে স্থির তরঙ্গ উৎপন্ন করা হয় :

(১) দুটি অভিন্ন চল তরঙ্গ বিপরীত দিক থেকে অগ্রসর হয়ে একে অন্যের ওপর উপরিপাতিত হতে হবে।

(২) তরঙ্গ দুটি একই বেগে বিপরীত দিক থেকে আসতে হবে।

(৩) তরঙ্গ পৃষ্ঠ অনুভূমিক অবস্থানে সংকুচিত হয়।

(৪) তরঙ্গ শীর্ষ তরঙ্গ অবস্থানে প্রসারিত হয়।

(৫) প্রতিটি বিন্দুতে তরঙ্গ দুটির জন্য সরণ সমান ও বিপরীত হতে হবে।

(৬) তরঙ্গ দুটির বিস্তার সমান হতে হবে।

(৭) তরঙ্গ দুটির তরঙ্গদৈর্ঘ্য সমান হতে হবে।

৯·৭·৩ গাণিতিক রাশিমালা
Mathematical expression

ধরি, সমান বিস্তার ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুটি চলমান তরঙ্গ একটি তার বেয়ে একই মানের বেগে পরস্পর বিপরীত দিকে অগ্রসর হয়। এদের উপরিপাতনের ফলে যে তরঙ্গের উদ্ভব হয় তা কোনো দিকে অগ্রসর হয় না। তাই একে স্থির তরঙ্গ বলে। সৃষ্ট স্থানেই এ তরঙ্গ পর্যায়ক্রমে উৎপন্ন ও বিলুপ্ত হয়। ধরি, a বিস্তার ও λ তরঙ্গদৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি তরঙ্গ পরস্পর বিপরীত দিকে v মানের বেগে অগ্রসর হচ্ছে।

তরঙ্গ দুটির সমীকরণ হবে—

ধনাত্মক x-অক্ষের দিকে,

$$y_1 = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.14)$$

এবং ঋণাত্মক x-অক্ষের দিকে,

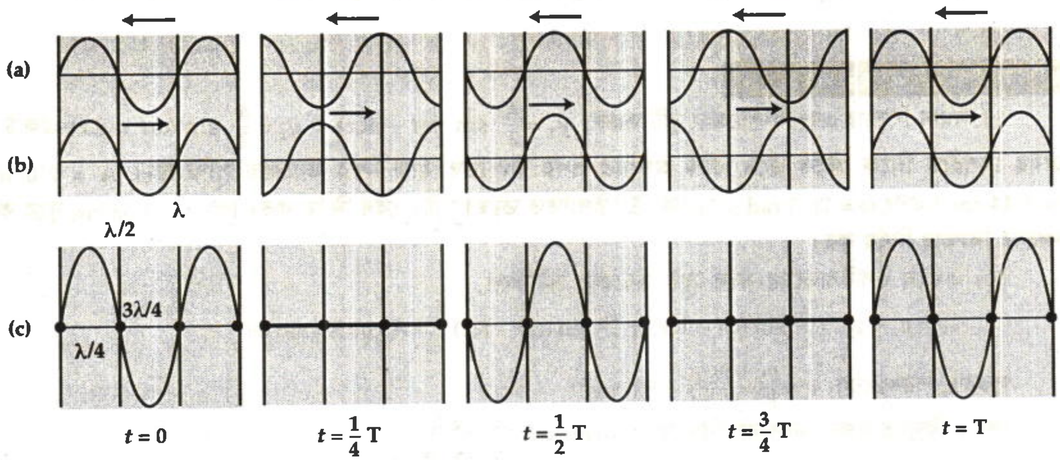
$$y_2 = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.15)$$

সুতরাং তরঙ্গ দুটির উপরিপাতনের ফলে লব্ধি সরণ হবে,

$$y = y_1 + y_2$$
$$= a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)$$
$$= a\left[\sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) + \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)\right]$$
$$= 2a \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left\{\frac{(vt - x) + (vt + x)}{2}\right\} \times \text{cis}\ \frac{2\pi}{\lambda}\left\{\frac{(vt - x) - (vt + x)}{2}\right\}$$
$$\left[\because \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}\right]$$
$$= 2a \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9.16)$$
$$= A \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt \text{ ; } \quad \text{এখানে } A = 2a \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$$
$$\therefore \quad y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (9.17)$$

যেহেতু (9.17) সমীকরণে অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণের ন্যায় দশা কোণের ভেতর $(vt - x)$ জাতীয় কোনো রাশি অন্তর্ভুক্ত নেই তাই এটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ নয়। এটি **স্থির তরঙ্গের সমীকরণ**।

এখানে, লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার, $A = 2a \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$। লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার x-এর ওপর নির্ভরশীল, t-এর ওপরে নয়। ৯·২০ চিত্রে লব্ধি বিস্তারের বিভিন্ন মানের জন্য সৃষ্ট সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টি দেখানো হলো।



চিত্র ৯·২০

সুস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির শর্ত

লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার সর্বাধিক হবে অর্থাৎ সুস্পন্দ বিন্দু তৈরি হবে যখন,

$$\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$$

বা, $\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{5\pi}{2} \dots \sin(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ (এখানে, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$)

বা, $\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

বা, $\frac{2x}{\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots \frac{(2n+1)}{2}$

বা, $2x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

বা, $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ ... ... (9.18)

সুতরাং দেখা যায় যে, x-এর মান যদি $\frac{\lambda}{4}$-এর বেজোড় গুণিতক হয় তা হলে সুস্পন্দ বিন্দু তৈরি হবে। অর্থাৎ স্থির তরঙ্গের ওপর যেসব বিন্দু $\frac{\lambda}{4}$-এর জোড় গুণিতক দূরে অবস্থিত সেসব বিন্দুতে সুস্পন্দ বিন্দু গঠিত হবে।

নিস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির শর্ত

লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার সর্বনিম্ন হবে অর্থাৎ নিস্পন্দ বিন্দু তৈরি হবে যখন,

$\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$

বা, $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = \sin 0, \sin\pi, \sin 2\pi \ldots \sin n\pi$ (এখানে, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$)

বা, $\frac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi \ldots n\pi$ বা, $\frac{2x}{\lambda} = 0, 1, 2 \ldots n$

বা, $2x = 0, \lambda, 2\lambda \ldots n\lambda$ বা, $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda \ldots n\frac{\lambda}{2}$

বা, $x = 0, \frac{2\lambda}{4}, 4\frac{\lambda}{4} \ldots 2n\frac{\lambda}{4}$ ... ... (9.19)

সুতরাং দেখা যায় যে, x-এর মান যদি $\frac{\lambda}{4}$-এর জোড় গুণিতক হয় তা হলে নিস্পন্দ বিন্দু তৈরি হবে। অর্থাৎ স্থির তরঙ্গের ওপর যেসব বিন্দু $\frac{\lambda}{4}$-এর বিজোড় গুণিতক দূরে অবস্থিত সেসব বিন্দুতে নিস্পন্দ বিন্দু গঠিত হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৪

১। সমান বিস্তার এবং কম্পাঙ্কের দুটি তরঙ্গ, $y_1 = \frac{A}{2}\sin(\omega t - Kx)$ ও $y_2 = \frac{A}{2}\sin(\omega t + Kx)$ একটি তার বরাবর বিপরীত দিকে থেকে এসে একে অপরের ওপর আপতিত হয়ে স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হয়। $A = 2\cdot0$ mm, $K = 3\cdot14\ \text{cm}^{-1}$ এবং $\omega = 78\cdot5\ \text{rad s}^{-1}$। (ক) উপরিপাতিত তরঙ্গ দুটির বেগ নির্ণয় কর। (খ) $x = 2\cdot33$ cm দূরে কণার কম্পনের বিস্তার নির্ণয় কর।

(ক) এখানে উপরিপাতনের ফলে সৃষ্ট তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = y_1 + y_2 = \frac{A}{2}\sin(\omega t + Kx) + \frac{A}{2}\sin(\omega t - Kx) = A\cos Kx \sin\omega t$$

সুতরাং, তরঙ্গ বেগ, $v = \frac{\omega}{K} = \frac{78\cdot5}{3\cdot14} = 50\ \text{cms}^{-1}$

(খ) x বিন্দুতে কণার কম্পনের বিস্তার $= A\cos Kx$

$$Kx = 3\cdot14 \times 2\cdot33 = \pi \times \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

এখানে, $x = 2\cdot33$

$\therefore$ বিস্তার $= 2\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \times 0\cdot5 = -1\cdot0$ mm

২। একটি তার নিচের সমীকরণ অনুযায়ী কম্পিত হয় :

$y = 6\cos\frac{\pi x}{3}\sin 30\pi t$, এখানে x ও y cm-এ এবং t s-এ প্রদত্ত।

(ক) যে তরঙ্গদ্বয়ের উপরিপাতের ফলে উপরিউক্ত কম্পনের সৃষ্টি হয় তাদের সমীকরণ বের কর।

(খ) তারের দুটি নিকটতম বিন্দু যারা সর্বদাই স্থিরাবস্থায় থাকে তাদের মধ্যে দূরত্ব কত?

(ক) এখানে,

$$y = 6 \cos\frac{\pi x}{3} \sin 30\,\pi t$$
$$= \frac{6}{2}\left\{\sin\left(30\,\pi t + \frac{\pi x}{3}\right) + \sin\left(30\,\pi t - \frac{\pi x}{3}\right)\right\}$$
$$= 3 \sin 30\pi\left(t + \frac{x}{90}\right) + 3 \sin 30\,\pi\left(t - \frac{x}{90}\right)$$
$$= y_1 + y_2$$

সুতরাং, তরঙ্গদ্বয়ের সমীকরণ হলো, $y_1 = 3 \sin 30\pi \left(t + \frac{x}{90}\right)$

এবং $y_2 = 3 \sin 30\,\pi\left(t - \frac{x}{90}\right)$

(খ) যে দুটি নিকটতম বিন্দু সর্বদা স্থিরাবস্থায় থাকে; অর্থাৎ দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে

দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2}$; আবার, $\lambda = \frac{v}{n} = \frac{v}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{2\pi v}{\omega}$

এখন প্রতিটি তরঙ্গ, $y = A \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ এর সাথে তুলনা করলে পাই,

$\omega = 30\pi$ এবং $v = 90\ \text{cms}^{-1}$

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi \times 90}{30\pi} = 3\,\text{cm}$$

৩। **দুই প্রান্তে আটকানো 72 cm দীর্ঘ একটি তারের কম্পনের সমীকরণ, $y = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \cos(48\pi t)$, এখানে x এবং y সেমি-এ এবং t সেকেন্ডে প্রকাশিত। (i) $x = 4$ cm দূরে অবস্থিত বিন্দুর সর্বোচ্চ সরণ কত ? (ii) তার বরাবর নিস্পন্দ বিন্দুগুলো কোথায় অবস্থিত ? (iii) $x = 12$ cm দূরে অবস্থিত কণার গতিবেগ $t = 0\cdot5$ s পরে কত ?**

এখানে, $y = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \cos(48\,\pi t)$

কণার সর্বোচ্চ সরণের জন্য, $\cos(48\pi t) = 1$ হবে

সুতরাং, $x = 4$ cm স্থানে অবস্থিত বিন্দুর সর্বোচ্চ সরণ,

$$y_{max} = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = 5 \sin\left(\frac{\pi \times 4}{12}\right) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\cdot33\ \text{cm}$$

(ii) আমরা জানি নিস্পন্দ বিন্দুতে কণার সরণ শূন্য, অতএব,

$$\sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) = 0 \qquad \therefore \ \frac{\pi x}{12} = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$\therefore \quad x = 12\,n$$

সুতরাং, $x = 0, 12, 24, 36, 48, 60$ এবং 72 cm

(iii) এখন, $y = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \cos(48\pi t)$

$\therefore$ কণার বেগ, $v = \frac{dy}{dt}$

$$= -5 \times 48\,\pi \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \sin(48\pi t) \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$

$\therefore$ $x = 12$ cm এবং $t = 0\cdot5$ s সমীকরণ (i)-এ বসালে,

$$v = 5 \times 48\,\pi \times \sin\left(\frac{\pi \times 12}{12}\right) \sin(48\,\pi \times 0\cdot5) = 0$$

৪। একটি সুতায় দুটি তরঙ্গের মিলনের ফলে যে স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তার সমীকরণ হচ্ছে, $y = 5 \sin \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t$, যেখানে x ও y হলো cm-এ এবং t হলো সেকেন্ডে প্রকাশিত।

(ক) তরঙ্গ দুটির প্রত্যেকটির বিস্তার ও বেগ কত? (খ) দুটি পরপর নিঃস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

[BUET Admission Test, 2017–18]

(ক) স্থির তরঙ্গের প্রদত্ত সমীকরণ, $y = 5 \sin\frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t$ ... (i)

আমরা জানি, স্থির তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ, $y = 2\text{ A} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \text{sim}\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt\right)$ ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$2\text{A} = 5\text{ cm} \quad \therefore \quad \text{A} = \frac{5}{2}\text{ cm} = 2{\cdot}5\text{ cm}$

আবার, $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}$ বা, $\lambda = 2 \times 3 = 6\text{ cm}$

এক্ষেত্রে, $\frac{2\pi}{\lambda}v = 40\pi$ বা, $v = \frac{40\lambda}{2} = \frac{40 \times 6}{2} = 120\text{ cms}^{-1}$

সুতরাং, তরঙ্গ দুটির প্রত্যেকটির বিস্তার $2{\cdot}5$ cm এবং বেগ 120 cms^{-1}

(খ) আবার, পরপর দুটি নিঃস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{ cm}$

৫। সমুদ্রের উপরিতলে পরপর দুটি তরঙ্গশীর্ষের দূরত্ব 16 m এবং তরঙ্গের বেগ $28{\cdot}8\text{ kmh}^{-1}$। তরঙ্গের ওঠানামার সঙ্গে সঙ্গে একটি নৌকার ওপর–নিচে 3 মিটার সরণ হয়। নৌকাটির সর্বোচ্চ উল্লম্ব বেগ নির্ণয় কর।

আমরা জানি তরঙ্গের কম্পাঙ্ক,

$$n = \frac{v}{\lambda} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}\text{ s} = 0{\cdot}5\text{ s}$$

ধরা যাক, নৌকাটির গতি সরল দোল গতি এবং গতির সমীকরণ $y = \text{A} \sin \omega t$

$\therefore$ নৌকাটির গতিবেগ, $v = \frac{dy}{dt} = \text{A}\omega \cos \omega t$

$\therefore$ নৌকাটির সর্বোচ্চ গতিবেগ, $v_{max} = \omega\text{A} = 2\pi n\text{A}$

এখানে,

তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda = 16\text{ m}$

তরঙ্গের বেগ, $v = 28{\cdot}8\text{ kmhr}^{-1}$

$= \frac{28{\cdot}8 \times 10^3}{60 \times 60}\text{ ms}^{-1}$

$= 8\text{ ms}^{-1}$

$\text{A} = \frac{3}{2}\text{ m} = 1{\cdot}5\text{ m}$

সুতরাং, নৌকাটির সর্বোচ্চ উল্লম্ব বেগ, $v_{max} = 2\pi n\text{A} = 2 \times 3{\cdot}14 \times 0{\cdot}5 \times 1{\cdot}5$

$= 4{\cdot}71\text{ ms}^{-1}$

৬। 200 Hz কম্পাঙ্কের একটি শব্দ তরঙ্গ একটি দেওয়ালের ওপর অভিলম্বভাবে আপতিত হয়ে প্রতিফলিত হয়। দেওয়াল থেকে কত দূরে বায়ু কণাগুলোর কম্পনের বিস্তার (i) সর্বোচ্চ ও (ii) সর্বনিম্ন হবে? (বায়ুতে শব্দের গতিবেগ $= 332\text{ ms}^{-1}$)

এখানে আপতিত শব্দ তরঙ্গ ও প্রতিফলিত শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হবে, যার একটি নিস্পন্দ বিন্দু দেওয়ালের ওপর গঠিত হবে, কেননা দেওয়ালের বায়ু কণায় কোনো গতি থাকে না। অন্যান্য নিস্পন্দ বিন্দুগুলো দেওয়াল থেকে এরূপ দূরত্বে গঠিত হবে যাতে দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব, $x = \frac{\lambda}{2}$ হয়।

এখানে কম্পাঙ্ক $n = 200$ Hz এবং গতিবেগ, $v = 332\text{ ms}^{-1}$

$\therefore$ তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda = \frac{v}{n} = \frac{332}{200} = 1{\cdot}66\text{ m}$

সুতরাং, $x = \frac{\lambda}{2} = \frac{1{\cdot}66}{2} = 0{\cdot}83\text{ m}$

অতএব দেওয়াল হতে নিস্পন্দ বিন্দুগুলোর দূরত্ব হবে $0{\cdot}83$ m, $0{\cdot}83\text{ m} \times 2 = 1{\cdot}66$ m, $0{\cdot}83\text{ m} \times 3 = 2{\cdot}49$ m, $0{\cdot}83 \times 4 = 3{\cdot}32$ m ইত্যাদি।

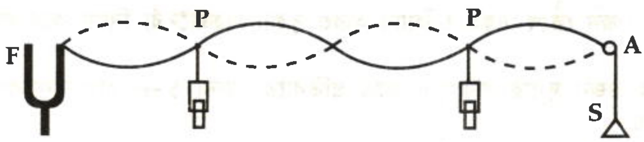
আবার, প্রতি দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মাঝখানে একটি করে সুস্পন্দ বিন্দু থাকবে যার বিস্তার সর্বোচ্চ হবে। ফলে দেওয়াল থেকে সর্বোচ্চ বিস্তারের বায়ু কণাগুলোর দূরত্ব হবে $\frac{0{\cdot}83}{2}\text{ m} = 0{\cdot}415\text{ m}, \frac{0{\cdot}83}{2} \times 3\text{ m} = 1{\cdot}245\text{ m}, \frac{0{\cdot}83}{2}\text{ m} \times 5 = 2{\cdot}075$ m ইত্যাদি।

৯.৮ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম : পিরিয়ড : ২	মেলডির পরীক্ষা Melde's experiment

তত্ত্ব (Theory) : একটি সুতার এক প্রান্ত একটি সুরশলাকার এক বাহুতে বেঁধে অপর প্রান্তকে কপিকলের ওপর দিয়ে নিয়ে ওজন চাপালে সুতাটি টানটান অবস্থায় থাকে। এখন সুরশলাকাতে কম্পন সৃষ্টি করা হলে সুতায় আড় তরঙ্গের সৃষ্টি হবে যা সুতা বরাবর সঞ্চালিত হয়ে কপিকলে বাধা পেয়ে প্রতিফলিত হবে এবং উপরিপাতনের ফলে

(ক) অণুপ্রস্থ ব্যবস্থা



(খ) অণুদৈর্ঘ্য ব্যবস্থা

চিত্র ৯.২১

সুতায় স্থির তরঙ্গ উৎপন্ন হবে। সুতার দৈর্ঘ্যের ওপর নির্ভর করে কয়েকটি লুপ সৃষ্টি হবে। এখন সুতার টান T, একক দৈর্ঘ্যের ভর m এবং সুতায় সৃষ্ট স্থির তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য বা দুটি লুপের দৈর্ঘ্য λ হলে সুতার কম্পাঙ্ক,

$$n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

তারের অপর প্রান্তে ঝুলানো ভর M এবং ওই স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে, $T = Mg$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(i)}$$

সুরশলাকার সাহায্যে সুতায় দুইভাবে কম্পন সৃষ্টি করা যায়। যথা—

(i) অণুপ্রস্থ ব্যবস্থা এবং (ii) অণুদৈর্ঘ্য ব্যবস্থা।

(i) অণুপ্রস্থ ব্যবস্থা : অণুপ্রস্থ ব্যবস্থায় সুরশলাকার কম্পন সুতার দৈর্ঘ্যের সাথে সমকোণে হয় [চিত্র ৯.২১(ক)]। এক্ষেত্রে সুরশলাকার কম্পাঙ্ক N, সুতার কম্পাঙ্ক n-এর সমান হয়। অর্থাৎ

$$N = n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

(ii) অণুদৈর্ঘ্য ব্যবস্থা : অণুদৈর্ঘ্য ব্যবস্থায় সুরশলাকার কম্পন সুতার দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে হয় [চিত্র ৯.২১(খ)]। এক্ষেত্রে সুর শলাকার কম্পাঙ্ক N সুতার কম্পাঙ্ক n-এর দ্বিগুণ হয়। অর্থাৎ,

$$N = 2n = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \text{(iii)}$$

উভয় ক্ষেত্রেই, N = সুরশলাকার কম্পাঙ্ক

n = সুতার কম্পাঙ্ক

λ = সুতায় সৃষ্ট স্থির তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য

T = সুতার টান

m = সুতার একক দৈর্ঘ্যের ভর

যন্ত্রপাতি : (১) মেলডির যন্ত্র (২) সুতা (৩) মিটার স্কেল (৪) ওজন-বাক্স (৫) ক্ল্যাম্প

কার্যপদ্ধতি :

(১) প্রথমে সুরশলাকাকে আড়াআড়ি বা লম্বিক ব্যবস্থায় রাখা হয়।

(২) নিক্তির সাহায্যে মেলডির যন্ত্রের পাল্লার ভর নির্ণয় করা হয়।

(৩) পরীক্ষণীয় সুতার এক প্রান্তকে সুর শলাকার সাথে এবং অপর প্রান্তকে কপিকলের ওপর দিয়ে নিয়ে পাল্লার সাথে আটকানো হয়।

(৪) পাল্লায় সামান্য ওজন চাপিয়ে সুতাটিকে টানটান অবস্থায় রাখা হয়।

(৫) সুর শলাকাটিকে একটি রাবারের হাতুড়ি দ্বারা হালকা আঘাত করা হয়।

(৬) কপিকলের অবস্থান অনুভূমিকভাবে পরিবর্তন করে এবং পাল্লায় ওজন কম-বেশি করে স্থির তরঙ্গের লুপ এবং নিস্পন্দ বিন্দুগুলো সুস্পষ্ট করা হয়।

(৭) দুটি পিন স্ট্যান্ড নিয়ে এদেরকে দুটি সুস্পষ্ট নিস্পন্দ বিন্দুর নিচে রাখা হয়। একটি মিটার স্কেলের সাহায্যে পিন দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করা হয় এবং লুপের সংখ্যাও গণনা করা হয়। যদি পিন দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব d হয় এবং লুপের সংখ্যা k হয় তা হলে, $\frac{\lambda}{2} = \frac{d}{k}$। এখান থেকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(৮) পাল্লায় একই ওজন রেখে একই প্রক্রিয়ায় আরও দুবার তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করে গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(৯) পাল্লায় এবার ওজন দুবার পরিবর্তন করে প্রতিবারের জন্য ১–৮ ধাপ অনুসরণ করে আরও দুবার গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(১০) সুরশলাকাকে যদি আগে আড়াআড়ি ব্যবস্থায় রাখা হয়ে থাকে তা হলে এবার লম্বিক ব্যবস্থায় রাখা হয় এবং পূর্বের পদ্ধতি অনুসরণ করে গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়।

(১১) এবার সম্পূর্ণ সুতার দৈর্ঘ্য ও ভর নির্ণয় করে ভরকে দৈর্ঘ্য দ্বারা ভাগ করে একক দৈর্ঘ্যের ভর m নির্ণয় করা হয়।

এখন প্রতিবারের গড় তরঙ্গদৈর্ঘ্য, প্রতিবারের ওজন ও m-এর মান বসিয়ে আড়াআড়ি বা লম্বিক ব্যবস্থায় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয় করা হয়।

হিসাব ও উপাত্ত সংগ্রহ :

(ক) স্কেল প্যানের ভর, W = …… g (খ) সুতার ভর, M = …… g (গ) সুতার দৈর্ঘ্য, L = …… cm

(ঘ) সুতার প্রতি একক দৈর্ঘের ভর, $m = \frac{M}{L}$ g = …… g/cm

ডাটা ছক-১

লম্বিক অবস্থানের জন্য :

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	দুই প্রান্তের মাঝে লুপ-সংখ্যা	স্কেলে চাপানো ভর (W_1) g	সুতার টান, T = Wg = (W + W_1) g dyne	নির্ধারিত দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী দূরত্ব, D	নির্ধারিত দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী লুপসংখ্যা, N	সেগমেন্টের দৈর্ঘ্য, $l = \frac{D}{N}$	$\frac{T}{l}$	তারের কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$	টিউনিং ফর্কের কম্পাঙ্ক, $n = n'$ (Hz)

ডাটা ছক-২

আড়াআড়ি অবস্থানের জন্য :

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	দুই প্রান্তের মাঝে লুপসংখ্যা	স্কেলে চাপানো ভর (W_1) g	সুতার টান, T = Wg = (W + W_1) g dyne	নির্ধারিত দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী দূরত্ব, D	নির্ধারিত দুই প্রান্তের মধ্যবর্তী লুপসংখ্যা, N	সেগমেন্টের দৈর্ঘ্য, $l = \frac{D}{N}$	$\frac{T}{l}$	তারের কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}$	টিউনিং ফর্কের কম্পাঙ্ক, $n = n'$ (Hz)

সতর্কতা ও আলোচনা :

(১) সুরশলাকাকে হাতুড়ি (hammer)-এর সাহায্যে একটিমাত্র স্ট্রোকে (stroke) কম্পন সৃষ্টি করতে হবে।

(২) প্যানে ভর বৃদ্ধি বা কমিয়ে লুপসংখ্যা বৃদ্ধি বা কমাতে হবে।

(৩) লুপ যথাসম্ভব স্পষ্ট করতে হবে।

(৪) সরু সুতা ব্যবহার করতে হবে।

(৫) পাল্লায় অত্যন্ত বেশি ভর ব্যবহার করা যাবে না।

৯·৯ মুক্ত বা স্বাভাবিক কম্পন ও পরবশ কম্পন
Free or natural vibration and forced vibration

মুক্ত কম্পন

একটি সুর শলাকাকে আঘাত করলে এটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কে ও পর্যায়কালে কাঁপতে থাকে। এ কম্পন সুর শলাকার মুক্ত কম্পন। আবার একটি সরল দোলককে সাম্যাবস্থা থেকে টেনে ছেড়ে দিলে দোলকটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে দুলতে থাকে। এটিও মুক্ত কম্পন। সুতরাং মুক্ত কম্পনের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা : **স্পন্দনক্ষম যেকোনো বস্তুকে আন্দোলিত করলে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে স্পন্দিত হয়। এই স্পন্দনকে মুক্ত কম্পন (free vibration) বা স্বাভাবিক কম্পন (natural vibration) বলে।** মুক্ত কম্পাঙ্ক বস্তুর ঘনত্ব, আকৃতি ও স্থিতিস্থাপকতার ওপর নির্ভর করে। যেমন: সরল দোলকের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করলে এর কম্পাঙ্ক ভিন্নতর হয়।

এই কম্পনের কম্পাঙ্ককে বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক (natural frequecny) এবং পর্যায়কালকে স্বাভাবিক পর্যায়কাল (natural time period) বলে। যেমন: সরল দোলকের স্বাভাবিক পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

পরবশ কম্পন

কোনো পরিবর্তনশীল বলের মান ও দিক যদি নির্দিষ্ট সময় অন্তর একই হয়, তবে ওই বলকে পর্যাবৃত্ত বল বলে এবং এ ধরনের স্পন্দনকে পর্যাবৃত্ত স্পন্দন বলে। এরূপ কোনো পর্যাবৃত্ত বল দ্বারা স্পন্দনক্ষম কোনো বস্তুকে কম্পিত করলে বস্তুটি প্রথমে তার মুক্ত বা স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হওয়ার চেষ্টা করে, কিন্তু ধীরে ধীরে বস্তুটি পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হতে থাকে। এ ধরনের কম্পন বস্তুটির মধ্যে বাইরে থেকে আরোপ করা হয়েছে। একে **আরোপিত বা পরবশ কম্পন** বলে।

সুতরাং, পরবশ কম্পন নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সংজ্ঞা : **স্পন্দনক্ষম বস্তুর ওপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের জন্য বস্তুটি তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়। কম্পাঙ্ক স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের চেয়ে ভিন্নতর হলে বস্তুটি প্রথমে অনিয়মিতভাবে কম্পিত হয় পরে আরোপিত কম্পনের কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়। এই ধরনের কম্পনকে পরবশ কম্পাঙ্ক বলে।**

ব্যাখ্যা : একটি সুর শলাকাকে আঘাত করে বায়ু মাধ্যমে রাখলে খুব ক্ষীণ শব্দ শোনা যাবে। কিন্তু ওই স্পন্দিত সুর শলাকাকে একটি টেবিলের ওপরে চেপে ধরলে বেশ জোরে শব্দ শোনা যাবে। এক্ষেত্রে সুর শলাকার কম্পনে টেবিলটি পরবশ কম্পনে কম্পিত হয়। এর ফলে টেবিল সংলগ্ন সমস্ত বায়ুই কম্পিত হয়। এতে অধিক পরিমাণে বায়ু কম্পিত হওয়ার ফলে শব্দের তীব্রতা বা প্রাবল্য বেড়ে যায়।

তানপুরা, সেতার, বেহালা, গিটার ইত্যাদি তারের বাদ্যযন্ত্রে একটি ফাঁপা বায়ুপূর্ণ খোল থাকে। তারের কম্পনের সাথে সাথে বাক্সের বায়ুস্তম্ভে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হয়। একসঙ্গে অনেক বাতাস কম্পিত হওয়ার কারণে শব্দের প্রাবল্য বাড়ে।

কাজ : তীব্র ভূমিকম্পে ঘরবাড়ি ভেঙ্গে পড়ে কেন, ব্যাখ্যা কর।

ভূমিকম্প ঘরবাড়ির দেওয়ালে পরবশ কম্পনের সৃষ্টি করে। তীব্র ভূমিকম্পে পরবশ কম্পনের বিস্তার অনেক বেশি হয়, যা ঘরবাড়িতে ব্যবহৃত উপাদানসমূহের স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম করে, ফলে বহু ঘরবাড়ি ভেঙ্গে পড়ে।

[MAT 23-24, 18-19]

৯.৯.১ মুক্ত কম্পন ও পরবশ কম্পনের মধ্যে পার্থক্য
Differences between free vibration and forced vibration

মুক্ত কম্পন (free vibration)	পরবশ কম্পন (forced vibration)
১। শুধুমাত্র প্রত্যায়নক বল ছাড়া অন্য কোনো বল বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল হয় না।	১। বাইরে থেকে পর্যাবৃত্ত বল প্রয়োগ করলে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হয়।
২। মুক্ত কম্পনের কম্পাঙ্ক বস্তুটির ভর, আকৃতি ও স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের ওপর নির্ভর করে।	২। পরবশ কম্পনের কম্পাঙ্ক বস্তুর ওপর প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্কের সমান হয়।
৩। বাধাজনিত বলের ক্রিয়ায় বস্তুর মুক্ত কম্পন আস্তে আস্তে কমে যায়।	৩। প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বল বস্তুর ওপর যতক্ষণ ক্রিয়া করে, পরবশ কম্পনও ততক্ষণ স্থায়ী হয়।
৪। মুক্ত কম্পনের বিস্তার সাধারণত কম হয়।	৪। পরবশ কম্পনের বিস্তার সাধারণত মুক্ত কম্পনের বিস্তারের বেশি হয়।

৯.১০ অনুনাদ
Resonance

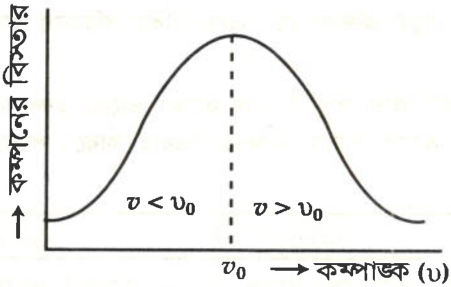
মা যখন বাচ্চাকে দোলনায় রেখে দোল দেয় তখন বাচ্চা কখনো ঘুমিয়ে পড়ে আবার কখনো ঘুমায় না। দোলনার কম্পন এবং বায়ুতে অবস্থিত কণাসমূহের কম্পন সমান হলেই বাচ্চা আরাম অনুভব করে এবং অল্পক্ষণের মধ্যে ঘুমিয়ে পড়ে। আবার সৈনিকেরা যখন একটা ব্রিজ বা কালভার্টের ওপর পা মিলিয়ে ডবল মার্চ করতে থাকে তখন যদি সেখানে অবস্থান কর তা হলে বুঝতে পারবে ব্রিজ বা কালভার্ট এত জোরে কম্পিত হয় যে ভেঙ্গে পড়ার উপক্রম হয় বা কোনো কোনো ক্ষেত্রে ভেঙ্গেও যেতে পারে। ওপরের দুটি ক্ষেত্রেই অনুনাদের জন্য এ ঘটনা ঘটে।

অনুনাদ নলের বায়ুস্তম্ভের ওপর একটি কম্পমান সুর শলাকা স্পন্দনে কম্পিত করে ধরলে এবং নলের বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য কম-বেশি করলে এক পর্যায়ে জোরালো শব্দ সৃষ্টি করে। এক্ষেত্রে উৎসের কম্পন ও নলের বায়ুস্তম্ভের কম্পন সমান হবে। ফলে অনুনাদ সৃষ্টি হয় এবং জোরালো শব্দ শোনা যায়।

একটি কম্পমান বস্তুকে অন্য একটি বস্তুর নিকট ধরলে দ্বিতীয় বস্তুটি কাঁপতে শুরু করে। যদি বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও প্রযুক্ত বলের পর্যায়কাল ভিন্ন হয় তবে বস্তু ক্ষুদ্র বিস্তারে কাঁপবে যা পরবশ কম্পনের বৈশিষ্ট্য। কিন্তু বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও তার ওপর প্রযুক্ত বলের পর্যায়কাল সমান হলে বস্তুটি বৃহত্তর বিস্তারে কাঁপতে বাধ্য হয় এবং শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়। এ প্রক্রিয়াকে অনুনাদ বলে। অনুনাদ হচ্ছে কম্পনের একটি বিশেষ অবস্থা যার সংজ্ঞা নিম্নোক্তভাবে দেওয়া যায়।

~~সংজ্ঞা~~ : **কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক বস্তুটির স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয়। এ ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে। সুতরাং বলা যায় অনুনাদ একটি বিশেষ ধরনের পরবশ কম্পন।**

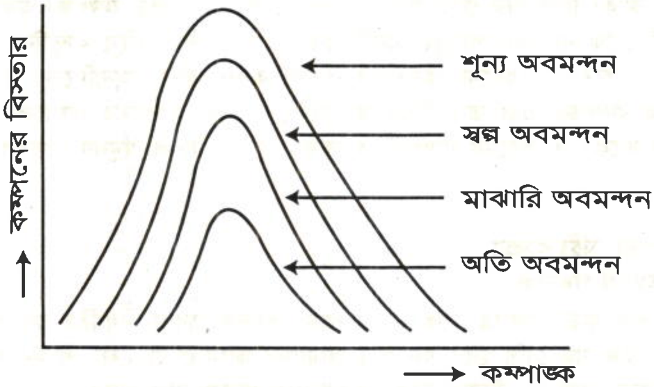
অন্যভাবে বলা যায় উৎসের কম্পন এবং উৎসের দ্বারা সৃষ্ট শব্দ যে মাধ্যম দিয়ে চলাচল করে তার কণার কম্পন সমান হলে একটি জোরালো শব্দ সৃষ্টি হয় বা কণাগুলো সর্বাধিক বিস্তারে কম্পিত হয়। এই ঘটনাকে অনুনাদ বলে।



চিত্র ৯.২২

ব্যাখ্যা : কম্পনশীল বস্তুর কম্পনের বিস্তার প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্কের ওপর নির্ভর করে। চিত্র ৯.২২-এ প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্কের সাথে বস্তুর কম্পনের বিস্তারের পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। এখানে বস্তুর স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক υ এবং প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক υ_0 দ্বারা বিস্তার চিহ্নিত করা হয়েছে। এখন, $\upsilon = \upsilon_0$ হলে অনুনাদ সৃষ্টি হয়। তাই υ_0-কে অনুনাদী কম্পাঙ্ক (resonant frequency) বলে এবং সংশ্লিষ্ট বিস্তারকে অনুনাদী বিস্তার (resonant amplitude) বলে। বস্তুর কম্পনের কম্পাঙ্ক প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক অপেক্ষা কম বা বেশি হলে অর্থাৎ $\upsilon < \upsilon_0$ বা $\upsilon > \upsilon_0$ উভয় ক্ষেত্রেই বস্তুর কম্পনের বিস্তার অনুনাদী বিস্তার অপেক্ষা কম হয়।

অনুনাদী কম্পনের সময় কম্পনের বিস্তার কম বেশি হওয়া নির্ভর করে অবমন্দনের (damping) মানের ওপর। বিভিন্ন মানের অবমন্দনের ক্ষেত্রে প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্কের সাথে বস্তুর পরবশ কম্পনের বিস্তার কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা চিত্র ৯·২৩-এ দেখানো হয়েছে। এই লেখগুলোকে অনুনাদী লেখ (resonant curves) বলে।



চিত্র ৯·২৩

প্রযুক্ত বলের যে কম্পাঙ্কের জন্য বিস্তার সর্বোচ্চ হয় তাকে অনুনাদী কম্পাঙ্ক বলে। লেখ থেকে স্পষ্ট যে অবমন্দন যত কম হবে অনুনাদী কম্পনের বিস্তার তত বৃদ্ধি পাবে। অর্থাৎ অনুনাদের তীক্ষ্ণতা তত বৃদ্ধি পাবে। সুতরাং, বলা যায় যে, অবমন্দন শূন্য হলে অনুনাদী কম্পনের বিস্তার অসীম হবে। লেখচিত্রগুলো বিশ্লেষণ করলে দেখা যায় যে, অবমন্দন যত কম হয়, অনুনাদ তত তীক্ষ্ণ হয়। কম্পাঙ্কের সামান্য পরিবর্তনের জন্য বিস্তার অনেক কমে যায়। এই ঘটনাকে অনুনাদের তীক্ষ্ণতা (sharpness of resonance) বলে। অবমন্দন যত বাড়ে তীক্ষ্ণতা তত কমে। তখন কম্পাঙ্কের সামান্য পরিবর্তনের জন্য বিস্তারের তেমন পরিবর্তন লক্ষ করা যায় না। সুতরাং অবমন্দন বাড়লে অনুনাদের তীক্ষ্ণতা হ্রাস পায়।

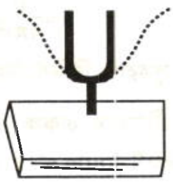
অনুসন্ধানমূলক কাজ : পানিপূর্ণ পাত্র অপেক্ষা শূন্য পাত্রকে আঘাত করলে জোরালো শব্দ হয় কেন, ব্যাখ্যা কর।

কোনো একটি পাত্রকে আঘাত করলে যে কম্পনের সৃষ্টি হয় তা পাত্রের ভেতরের বায়ু বা পানিতে পরবশ কম্পন সৃষ্টি করে। এখন পাত্র পানিপূর্ণ থাকলে কম্পনের বিস্তার কম হয়। ফলে উৎপন্ন শব্দের প্রাবল্য কম হয়। তবে পাত্র খালি থাকলে তখন পাত্র হাল্কা থাকে। তাই খালি পাত্রকে আঘাত করলে কম্পনের বিস্তার বেশি হয়। ফলে সৃষ্ট শব্দের প্রাবল্যও বেশি হয়। অর্থাৎ জোরালো শব্দ সৃষ্টি হয়।

পরবশ কম্পন ও অনুনাদের সংজ্ঞা থেকে এটি স্পষ্ট যে ***সকল অনুনাদই পরবশ কম্পন কিন্তু সকল পরবশ কম্পন অনুনাদ নয়।***

উদাহরণ :

১। একটি সুরশলাকাকে কম্পিত করে তা বায়ুতে স্থাপন করলে খুব ক্ষীণ শব্দ উৎপন্ন হয়। কিন্তু এই কম্পিত সুরশলাকা টেবিলের ওপর চেপে ধরলে জোরে শব্দ শোনা যায়। এক্ষেত্রে সুরশলাকার কম্পনের ফলে টেবিলের কাঠ পরবশ কম্পনে স্পন্দিত হয় এবং টেবিলের চারপাশের বায়ু স্পন্দিত হয়। এক্ষেত্রে স্পন্দনের মাত্রা বৃদ্ধি পায় বলে শব্দের প্রাবল্যও বেড়ে যায়। এভাবে স্পন্দন সৃষ্টি হয় [চিত্র ৯·২৪]।



চিত্র ৯·২৪

২। একটি ঝুলন্ত ব্রিজের ওপর দিয়ে সৈন্যদল যখন মার্চ করে যায় তখন সৈন্যদলের পা মিলিয়ে যাবার কারণে আরোপিত কম্পনের সৃষ্টি হয়। ফলে ব্রিজের লোহা বা অন্যান্য উপাদানের কণাগুলোও কম্পিত হয়। যখন আরোপিত কম্পন এবং ব্রিজের উপাদানের কণাগুলোর কম্পন সমান হয় তখন ব্রিজটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয়। এক পর্যায়ে ব্রিজটি ভেঙ্গেও পড়তে পারে। এভাবে ব্রিজে অনুনাদ সৃষ্টি হয়।

অনুনাদের বৈশিষ্ট্য :

১। কোনো একটি বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল যদি এর ওপর আরোপিত পর্যায় বলের পর্যায়কালের সমান হয়, তখন বস্তুটির কম্পনে অনুনাদ হয়।

২। সকল অনুনাদী কম্পন পরবশ কম্পন।

৩। অনুনাদী কম্পনে বিস্তার সবচেয়ে বেশি হবে।

৪। অনুনাদে বস্তুর কম্পন শুরু হওয়ার অল্প সময় পরই নিয়মিত হয়।

অনুধাবনমূলক কাজ : "সকল অনুনাদই পরবশ কম্পন কিন্তু সকল পরবশ কম্পন অনুনাদ নয়"—কেন?

একটি পর্যাবৃত্ত বল প্রয়োগ করে কোনো বস্তুকে কম্পিত করলে বস্তুটি প্রথমে তার নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হওয়ার চেষ্টা করে। কিন্তু পরে দেখা যাবে যে বস্তুটি পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী স্পন্দিত হচ্ছে। বস্তুটির স্থানিক কম্পাঙ্ক যাই হোক না কেন পর্যাবৃত্ত বলটি যতক্ষণ ক্রিয়াশীল থাকবে বস্তুটিও ততক্ষণ ধরে পর্যাবৃত্ত বলের কম্পনে কম্পিত হতে থাকবে। এ ধরনের কম্পনকে পরবশ কম্পন বলে। অন্যদিকে, অনুনাদ বিশেষ ধরনের পরবশ কম্পন। বস্তুর নিজস্ব কম্পাঙ্ক এবং তার উপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের কম্পাঙ্ক সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হতে থাকে। এ ধরনের কম্পনই অনুনাদ। সুতরাং সকল অনুনাদ পরবশ কম্পন হলেও সকল পরবশ কম্পন অনুনাদ নয়।

৯.১১ তরঙ্গের তীব্রতা
Intensity of waves

প্রাবল্য বলতে শব্দ কতটা জোরে হচ্ছে তা বোঝায়। শব্দের প্রাবল্য নির্ধারিত হয় শব্দের তীব্রতা দিয়ে। তীব্রতা যত বাড়ে অর্থাৎ শব্দ তরঙ্গ যত বেশি হারে শব্দ শক্তি আমাদের কানে পৌঁছে দেয়, শব্দের প্রাবল্য তত বেশি হয়। আবার তীব্রতা কমলে প্রাবল্য কমে। অতএব, **তীব্রতা হলো কারণ এবং প্রাবল্য তার ফল**।

প্রাবল্যের এই সংজ্ঞা ব্যক্তিনির্ভর। কম্পাঙ্কের পার্থক্য খুব বেশি হলে একই তীব্রতার বিভিন্ন কম্পাঙ্কের শব্দ শ্রোতার কাছে কমবেশি জোরে মনে হতে পারে। অতএব, শব্দের প্রাবল্য কম্পাঙ্কের ওপরও নির্ভর করে। স্পষ্টত প্রাবল্য ও তীব্রতা পুরোপুরি এক নয়। তীব্রতা শব্দের একটি ভৌত ধর্ম, কিন্তু প্রাবল্য একটি অনুভূতি।

তীব্রতা যেকোনো ধরনের শব্দের বৈশিষ্ট্য। সুরবর্জিত শব্দেরও তীব্রতা আছে। শব্দের তীব্রতা নির্ভর করে এর বিস্তারের ওপর। আমাদের কানে সহনীয় শব্দের জোরালো তীব্রতার বিস্তার হলো 10^{-5} m। অন্যদিকে ক্ষীণতম শব্দের তীব্রতার বিস্তার প্রায় 10^{-11} m। শব্দ তরঙ্গের তীব্রতার একটি বড় পাল্লা (range) মানুষের কানের জন্য সংবেদনশীল। বিস্তারের দুই সীমান্ত মানের অনুপাত 10^6, যেহেতু তরঙ্গের তীব্রতা বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক কাজেই মানুষের শ্রবণ সীমার দুই প্রান্তের তীব্রতার অনুপাত 10^{12} অর্থাৎ একটি ক্ষীণশব্দ এর প্রায় 10^{12} গুণ বেশি তীব্র শব্দও কানে অনুভূতি সৃষ্টি করতে পারে।

সংজ্ঞা : শব্দ সঞ্চালনের পথে একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে লম্বভাবে প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ শব্দ শক্তি প্রবাহিত হয়, তাকে ওই শব্দের তীব্রতা বলে। শব্দের তীব্রতা একটি ভৌত রাশি।

গোলকের একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে শক্তি প্রবাহের হার $= \frac{P}{4\pi r^2}$; এখানে $4\pi r^2$ = গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল। সংজ্ঞানুযায়ী এটি গোলক থেকে r দূরত্বে তীব্রতা I বোঝায়, অর্থাৎ $I = \frac{P}{4\pi r^2}$।

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (9.20)$$

সুতরাং, নির্দিষ্ট উৎসের ক্ষেত্রে $I \propto \frac{1}{r^2}$। অতএব ব্যস্তবর্গীয় সূত্র প্রমাণিত হলো।

তীব্রতার একক : সংজ্ঞানুযায়ী তীব্রতা হলো একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে শক্তি প্রবাহের হার। অতএব এর S. I. একক হলো Joule s^{-1} m^{-2} বা, Wm^{-2} (watt per square metre)। কিন্তু এই এককটি খুব বড় বলে সাধারণত microwatt per square metre অর্থাৎ μWm^{-2} এককটি ব্যবহৃত হয়।

জানার বিষয় : ~~I.~~ জোরালো শব্দের বিস্তার 10^{-5} m
~~II.~~ ক্ষীণতর শব্দের বিস্তার 10^{-11} m

৯.১১.১ বিভিন্ন বিষয়ের ওপর তীব্রতার নির্ভরতা
Dependence of intensity on different factors

শব্দের তীব্রতা নিচের বিষয়গুলোর ওপর নির্ভর করে—

~~১।~~ **উৎসের কম্পনের বিস্তার :** শব্দের তীব্রতা উৎসের কম্পনের বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। অর্থাৎ, শব্দের তীব্রতা I এবং উৎসের কম্পনের বিস্তার a হলে $I \propto a^2$।

~~২।~~ **উৎসের আকার :** উৎসের আকার যত বড় হয় উৎপন্ন শব্দের তীব্রতা তত বাড়ে। যেমন, তবলার শব্দের চেয়ে ঢাকের শব্দ অনেক বেশি জোরালো।

৩। **উৎস থেকে দূরত্ব :** উৎস থেকে শ্রোতার দূরত্ব যত বেশি হয় শব্দের তীব্রতা তত কমে। অর্থাৎ শব্দের তীব্রতা I এবং উৎস থেকে শ্রোতার দূরত্ব r হলে, $I \propto 1/r^2$।

৪। **মাধ্যমের ঘনত্ব :** শব্দ যে মাধ্যমের মধ্য দিয়ে যায় তার ঘনত্ব যত বেশি হয় শব্দের তীব্রতাও তত বেশি হয়। যেমন: উষ্ণতা কমলে বায়ুর ঘনত্ব বাড়ে বলে শীতের রাতে অনেক দূরের শব্দ স্পষ্ট শোনা যায়।

৫। **মাধ্যমের গতি :** মাধ্যমের গতির অভিমুখে গেলে শব্দের তীব্রতা বাড়ে এবং বিপরীত দিকে গেলে শব্দের তীব্রতা কমে। যেমন: বায়ু প্রবাহের দিকে শব্দ অগ্রসর হলে জোরে শব্দ শোনা যায়।

৬। **অন্যান্য বস্তুর উপস্থিতি :** শব্দের কম্পমান উৎসের নিকটে কোনো বস্তু থাকলে উৎসের কম্পনের প্রভাবে ওই বস্তুটিও একই কম্পাঙ্কে কম্পিত হতে শুরু করে। একে **পরবশ কম্পন** বলে। বস্তুটির ক্ষেত্রফল অনেক বেশি হলে পরবশ কম্পন সৃষ্টির জন্য শব্দের তীব্রতা বেড়ে যায়। এই কারণে সেতার, বেহালা, গীটার প্রভৃতি তারের বাদ্যযন্ত্রে ফাঁপা খোল থাকে। যন্ত্রটি বাজালে তারগুলো কাঁপে, ফলে ওই খোল এবং খোলের মধ্যস্থ বায়ুতে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হয়। তাই জোরে শব্দ শোনা যায়।

৯·১১·২ তরঙ্গের তীব্রতার গাণিতিক রাশিমালা
Mathematical expression for intensity of wave

তরঙ্গের শক্তি ঘনত্ব ও তীব্রতা
Energy density and intensity of a wave

অগ্রগামী তরঙ্গের মাধ্যমে শক্তি এক স্থান থেকে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়। এই শক্তি মূলত জড় মাধ্যমে যান্ত্রিক শক্তি রূপেই সঞ্চালিত হয়।

সংজ্ঞা : মাধ্যমের প্রতি একক আয়তনে কোনো তরঙ্গের যে পরিমাণ শক্তি সঞ্চিত থাকে, তাকে তরঙ্গের শক্তি ঘনত্ব বলে।

একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হলো,

$$y = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) = A \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

সুতরাং কণার বেগ, $v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$

কণাগুলো শক্তি বহন করে। কণাগুলির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$

প্রতি একক আয়তনে গতিশক্তি, $E_K = \frac{1}{2}\frac{m}{V}v^2 = \frac{1}{2}\rho v^2$; এখানে ρ = মাধ্যমের ঘনত্ব।

$$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \cos^2\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

এই শক্তির সর্বোচ্চ মান,

$$E_{kmax} = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \text{ ; যখন } \cos^2\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = 1$$

কণার গতিশক্তির সর্বোচ্চ মান মোট শক্তির সমান। সুতরাং, একক আয়তনে মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$

অর্থাৎ শক্তি ঘনত্ব $= \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$ ... ... (9·21)

সমীকরণ (9·21) থেকে দেখা যায় যে, শক্তি ঘনত্ব (i) মাধ্যমের ঘনত্বের ওপর, (ii) কণার বিস্তারের বর্গের ওপর এবং (iii) কণার কৌণিক কম্পাঙ্কের বর্গের ওপর নির্ভর করে।

তরঙ্গের তীব্রতা : সংজ্ঞা : একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে লম্বভাবে যে তরঙ্গ শক্তি প্রবাহিত হয়, তাকে ওই তরঙ্গের তীব্রতা বলে। v বেগবিশিষ্ট তরঙ্গ একক সময়ে v দূরত্ব অতিক্রম করে। সুতরাং একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে একক সময়ে প্রবাহিত তরঙ্গ শক্তির পরিমাণই তরঙ্গ তীব্রতা।

$\therefore$ তরঙ্গের তীব্রতা,

$$I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \times 1 \times v = \frac{1}{2}\rho A^2(2\pi n)^2 v$$

$$\boxed{I = 2\pi^2 n^2 A^2 \rho v} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9·22)$$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে তরঙ্গের তীব্রতা
(i) এর বিস্তারের বর্গের
(ii) এর কম্পাঙ্কের বর্গের
(iii) এর বেগের এবং
(iv) মাধ্যমের ঘনত্বের সমানুপাতিক হয়।
এস. আই. পদ্ধতিতে তীব্রতার একক $Js^{-1}m^{-2}$ বা Wm^{-2}

[MAT 23-24]

আমাদের কান তীব্রতার একটি বিরাট পাল্লা জুড়ে শব্দ শুনতে পায়। 1000 Hz কম্পাঙ্কে আমাদের কান সবচেয়ে মৃদু যে শব্দ শুনতে পায় তার তীব্রতা হলো প্রায় 10^{-12} Wm^{-2}। একে শ্রাব্যতার সীমা (threshold of hearing or audibility) বলে। সবচেয়ে জোরালো যে শব্দ কান সহ্য করতে পারে তার প্রাবল্য প্রায় 1 Wm^{-2}। শব্দের প্রাবল্য এর চেয়ে বেশি হলে কানে যন্ত্রণা হয়। তীব্রতার এই ঊর্ধ্বসীমাকে সহন বা অনুভূতি সীমা (threshold of pain or feeling) বলে। শ্রাব্য তীব্রতার পাল্লা এত বড়ো বলে বিভিন্ন তীব্রতার তুলনা করতে হলে আপেক্ষিক তীব্রতাকে লগারিদমে প্রকাশ করলে সুবিধা হয়। তীব্রতা I একটি ভৌত রাশি বলে এর নির্দিষ্ট মাত্রা আছে, সুতরাং এর লগারিদম নেয়া যায় না। কিন্তু দুটি তীব্রতার অনুপাত $\frac{I}{I_0}$ একটি মাত্রাহীন রাশি বলে এর লগারিদম নেয়া যায়।

কাজ : সেতার, বেহেলা, গীটার প্রভৃতি তারের বাদ্যযন্ত্রে ফাঁপা খোল রাখা হয় কেন ?

যন্ত্রটি বাজালে তারগুলো কাঁপে ফলে ওই খোল এবং খোলের মধ্যস্থ বায়ুতে পরবশ কম্পন সৃষ্টি হয়। তাই জোরে শব্দ শোনা যায়।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৫

১। বায়ুতে একটি শব্দ তরঙ্গের উৎসের কম্পাঙ্ক 412 Hz এবং বিস্তার 0·25 cm, বায়ুর ঘনত্ব 1·29 kg m^{-3} হলে উৎসের তীব্রতা কত হবে ? (বায়ুতে শব্দের বেগ, v = 330 ms^{-1})

আমরা জানি শব্দের তীব্রতা,

$$I = 2\pi^2 n^2 a^2 \rho v$$
$$= 2 \times 9{\cdot}87 \times (412)^2 \times (0{\cdot}25 \times 10^{-2})^2 \times 1{\cdot}29 \times 330$$
$$= 8915 \text{ Wm}^{-2}$$

এখানে,
n = 412 Hz
a = 0·25 cm = $0{\cdot}25 \times 10^{-2}$ m
ρ = 1·29 kg m^{-3}
v = 330 ms^{-1}
I = ?

২। একটি উৎস 40 W ক্ষমতার শব্দ উৎপন্ন করে। উৎসটিকে বিন্দু উৎস ধরে নিয়ে ওর থেকে 2 km দূরত্বে তীব্রতা নির্ণয় কর। সংশ্লিষ্ট তীব্রতা স্তর ডেসিবেল এককে গণনা কর।

একটি বিন্দু উৎস থেকে নিঃসৃত ক্ষমতা P হলে বিপরীত বর্গীয় সূত্রানুযায়ী উৎস থেকে r দূরত্বে তীব্রতা,

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

$$\therefore \quad I = \frac{40}{4\pi \times (2 \times 10^3)^2} \text{ Wm}^{-2}$$
$$= \frac{40}{4\pi \times 4 \times 10^6}$$
$$= 7{\cdot}962 \times 10^{-7} \text{ Wm}^{-2}$$

এখানে, P = 40 W
দূরত্ব, $r = 2$ km $= 2 \times 10^3$ m

তীব্রতা, I ডেসিবেল এককে পাই,

$$\therefore \quad \beta = 10 \times \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$= 10 \times \log_{10}\left(\frac{7{\cdot}962 \times 10^{-7}}{10^{-12}}\right)$$
$$= 59{\cdot}01 \; dB$$

এখানে,
তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12}$ Wm^{-2}

৩। $y = 0.10 \sin \pi \left(100\, t - \frac{x}{7.5}\right)$ m একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ যা 10^{-3} kgm^{-3} ঘনত্বের একটি মাধ্যমের মধ্য দিয়ে চলমান। প্রতি একক বর্গমিটার ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত তরঙ্গ শক্তি নির্ণয় কর। [BUET Admission Test, 2019-20]

এখানে, $y = 0.10 \sin \pi \left(100\, t - \frac{x}{7.5}\right) \text{m} = 0.10 \sin \left(100\, \pi t - \frac{\pi x}{7.5}\right)$

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ, $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) = a \sin (\omega t - kx)$

উপরিউক্ত সমীকরণ দুটি তুলনা করে পাই,

$\omega = 100\pi$ বা, $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 100\,\pi \quad \therefore \quad f = 50$ Hz

আবার, $K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{7.5}$ বা, $\lambda = 2 \times 7.5 = 15$ m

$\therefore \quad v = f\lambda = 15 \times 50 = 750\ \text{ms}^{-1}$

আবার, শক্তি ঘনত্ব $I = 2\pi^2 f^2 a^2 \rho v = 2 \times 9.87 \times (50)^2 \times (0.1)^2 \times 10^{-3} \times 750$

$= 2 \times 9.87 \times 25 \times 10^2 \times 10^{-2} \times 750 \times 10^{-3}$

$= 2 \times 9.87 \times 25 \times 0.75 = 370.13\ \text{Wm}^{-2}$

৯.১২ প্রমাণ তীব্রতা ও তীব্রতা লেভেল
Standard intensity and intensity level

মানুষের কান একটি স্বাভাবিক শব্দগ্রাহক যন্ত্র। উৎস হতে শব্দ তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত হয়ে আমাদের কানের পর্দায় কম্পন সৃষ্টি করে। এই কম্পন সংকেত অনুসারে মস্তিষ্কে অনুভূতি সৃষ্টি করে এবং মস্তিষ্ক শব্দের প্রকৃতি বিশ্লেষণের মাধ্যমে শব্দ জোরালো না ক্ষীণ তা চিহ্নিত করে। মানুষের কান এত সংবেদনশীল (sensitive) যে অতি ক্ষীণ এবং অত্যন্ত জোরালো শব্দ শুনতে পায়। ক্ষীণ এবং জোরালো শব্দের অনুপাত 10^{13}। এই সীমার মধ্যে সৃষ্ট শব্দ আমরা শুনতে পাই।

শব্দোচ্চতা (Loudness)

শব্দোচ্চতা হচ্ছে মূলত কর্ণের অনুভূতি। এটি শারীরবৃত্তীয় বিষয় (physiological phenomenon), ভৌত বিষয় নয়। শব্দোচ্চতা শ্রবণের মাত্রা প্রকাশ করে। শব্দোচ্চতা বলতে শব্দ কতটা জোরে হচ্ছে তা বুঝায়। অপরদিকে প্রতি একক ক্ষেত্রফল হতে প্রতি সেকেন্ডে লম্বভাবে নির্গত শব্দের শক্তিই হলো শব্দের তীব্রতা।

অনুধাবনমূলক কাজ : "শব্দোচ্চতা তীব্রতার ওপর নির্ভরশীল কিন্তু সমানুপাতিক নয়"—এর ব্যাখ্যা কর।

একই তীব্রতার বিভিন্ন কম্পাঙ্কের শব্দ শ্রোতার কাছে কম-বেশি জোরে মনে হতে পারে। শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতা দ্বারা নির্ধারিত হয়। একই তীব্রতার শব্দ ভিন্ন ভিন্ন লোকের কাছে ভিন্ন ভিন্ন শব্দোচ্চতার অনুভূতি সৃষ্টি করতে পারে। তীব্রতা যত বাড়ে শব্দোচ্চতা তত বেশি জোরালো হয়। তবে শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার সাথে সমানুপাতিক হারে বাড়ে না। তাই বলা যায়, শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার ওপর নির্ভরশীল হলেও সমানুপাতিক নয়।

পূর্বে উল্লেখ করা হয়েছে যে শব্দোচ্চতা তীব্রতার সাথে বাড়ে তবে সমানুপাতিক হারে নয়। **ওয়েবার ফেচনার** (Weber Fechner)-এর সূত্র অনুসারে শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার লগারিদমের (Logarithm) সমানুপাতিক। এই সূত্রানুসারে শব্দোচ্চতা S এবং শব্দের তীব্রতা I হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক হলো,

$$S \propto \log_{10} I$$

$$\text{বা,}\quad S = K \log_{10} I \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.23)$$

শব্দের তীব্রতার একক Wm^{-2} হলেও ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রমাণ তীব্রতার সাপেক্ষে একে পরিমাপ করা হয়। শব্দ তরঙ্গের তীব্রতার একটা বিশাল পাল্লা মানুষের কানের জন্য সংবেদনশীল। এই বিশাল পাল্লার তীব্রতার মানের পরিবর্তন সুষ্ঠুভাবে অনুধাবনের জন্য আমরা লগারিদমিক স্কেলের সাহায্যে নেই।

প্রমাণ তীব্রতা (Standard intensity)

1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দের শ্রাব্যতার সীমা 10^{-12} Wm^{-2} তীব্রতার সমান ধরা হয় এবং একেই প্রমাণ বা আদর্শ তীব্রতা বলে। অর্থাৎ **1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট 10^{-12} Wm^{-2} তীব্রতাকে প্রমাণ তীব্রতা বলে।** একে I_0 দ্বারা সূচিত করা হয়। I_0 এর সাপেক্ষে সকল তীব্রতা পরিমাপ করা হয়।

তীব্রতা লেভেল
Intensity level

যেকোনো শব্দের তীব্রতা এবং আদর্শ বা প্রমাণ তীব্রতার শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে তীব্রতা লেভেল বলে। অন্যভাবে বলা যায়, কোনো শব্দের তীব্রতা ও প্রমাণ তীব্রতার অনুপাতের লগারিদমকে ওই শব্দের তীব্রতা লেভেল বলে। তীব্রতা লেভেলকে বেল (bel) এবং ডেসিবেল (dB) এককে প্রকাশ করা হয়।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, দুটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের শব্দের তীব্রতা I ও I_0 এবং শব্দোচ্চতা যথাক্রমে S ও S_0। এখন সমীকরণ (9.23) হতে পাই,

$$S \propto \log_{10} I \quad \text{বা,} \quad S = K \log_{10} I$$

আবার, $S_0 \propto \log_{10} I_0$ বা, $S_0 = K \log_{10} I_0$

$\therefore$ শব্দোচ্চতার পার্থক্য, $\beta = S - S_0 = K(\log_{10} I - \log_{10} I_0)$

$$\text{বা, তীব্রতা লেভেল} = K_0 \left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.24)$$

এখানে K হচ্ছে ধ্রুবক। এটি এককের ওপর নির্ভর করে। শব্দোচ্চতার পার্থক্য β-কে তীব্রতা লেভেল বলা হয়।

এখন $K = 1$ এবং I_0 প্রমাণ তীব্রতা হলে শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে বেল (bel) বলা হয়। অর্থাৎ $\beta = \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ bel

টেলিফোনের আবিষ্কারক আলেকজান্ডার গ্রাহাম বেলের নামকরণে এই এককের নামকরণ করা হয়েছে। শব্দোচ্চতার একক বেল খুবই বড় একক, তাই ডেসিবেল ব্যবহার করা হয়।

বেল : প্রথম তীব্রতা থেকে 10 গুণ তীব্রতা সম্পন্ন কোনো শব্দের তীব্রতা লেভেলকে 1 বেল বলে।

1 বেলের 1 দশমাংশকে 1 ডেসিবেল (dB) বলা হয়। এই ডেসিবেলই শব্দের তীব্রতার আদর্শ একক।

যেহেতু, $\frac{I}{I_0} = \frac{P}{P_0}$

সুতরাং, $\beta = \log \frac{P}{P_0}$

এক্ষেত্র β–কে ক্ষমতা লেভেল বলে।

তীব্রতা লেভেল থেকে শব্দের তীক্ষ্ণতা কেমন তা জানা যায়। যেমন: মাথার ওপরের জেট প্লেনের শব্দের তীব্রতা লেভেল 100 dB।

সমীকরণ (9.24)-কে ডেসিবেলে লেখা হলে তীব্রতা লেভেল,

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right) dB \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.25)$$

যদি, $\beta = 1\, dB$ হয়, তবে

$$1 = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$\text{বা,} \quad \log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \quad \frac{I}{I_0} = 1{\cdot}26$$

এর অর্থ হলো শব্দের তীব্রতার 26% পরিবর্তনের জন্য তীব্রতার লেভেল 1 dB পরিবর্তিত হয়। উল্লেখ্য, মানুষের কান 1 dB-এর কম শব্দোচ্চতার পার্থক্য বুঝতে পারে না।

সমীকরণ (9.25) হতে দেখা যায়—

(i) যখন $I = 100\, I_0$, তখন $\beta = 10 \log_{10} (100) = 10 \log_{10} 10^2 = 20\, dB$

(ii) যখন $I = 1000\, I_0$, তখন $B = 10 \log_{10} (1000) = 10 \log_{10} 10^3 = 30\, dB$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে দুটি শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্য 20 dB হলে জোরালো শব্দ ক্ষীণ শব্দের চেয়ে 100 গুণ তীব্র বুঝায়। আবার পার্থক্য 30 dB হলে জোরালো শব্দ 1000 গুণ বেশি তীব্র বুঝায়।

এখন $I = I_0$ হলে, সমীকরণ (9.25) হতে পাই,

$$\beta = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right) = 0$$

শব্দোচ্চতার পার্থক্য বা তীব্রতা লেভেল শূন্যকে নিম্নতর প্রান্তীয় সীমা বা শ্রাব্যতার সীমা বলে।

শব্দোচ্চতার সর্বোচ্চ সীমা, $L = 10 \log_{10} 10^{12} = 120\ dB$। এর চেয়ে বেশি তীব্রতার শব্দ কানে জ্বালা বা অস্বস্তির উদ্রেক করে।

কোনো শব্দ উৎসের তীব্রতা I_1 হতে I_2-তে পরিবর্তিত হলে তীব্রতা লেভেলের পরিবর্তন হবে,

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 = 10 \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_1}\right) dB \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.26)$$

অনুরূপভাবে, শব্দ উৎসের ক্ষমতা P_1 হতে P_2-তে পরিবর্তিত হলে তীব্রতা লেভেল বা ক্ষমতা লেভেলের পরিবর্তন হবে,

$$\Delta\beta = 10 \log_{10} (P_2 / P_1)\ dB \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.27)$$

ফন : 1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট প্রমাণ তীব্রতার এক ডেসিবেলের একটি বিশুদ্ধ সুর যে প্রাবল্য সৃষ্টি করে তাকে **ফন** (Faun) বলে। শব্দ প্রাবল্যের আরও একটি একক আছে। এর নাম সোন (Sone)। শ্রোতার শ্রাব্যতার সীমার 40 ডেসিবেল উর্ধ্বে 1000 Hz কম্পাঙ্কের একটি বিশুদ্ধ সুর যে প্রাবল্য সৃষ্টি করে তাকে 'সোন' বলে।

সোন : 40 dB এবং 1000 Hz কম্পাঙ্কের সুরের প্রাবল্যকে সোন (Sone) বলে।

সারণি ৯.১ : কয়েকটি শব্দের তীব্রতা ও তীব্রতা লেভেল

শব্দ	তীব্রতা, I (Wm^{-2})	আপেক্ষিক তীব্রতা, I/I_0	তীব্রতা লেভেল (dB)
সর্বনিম্ন শ্রাব্য শব্দ DAT 16-17	1×10^{-12}	10^0	0
পাতার মর্মর শব্দ	1×10^{-11}	10^1	10
ফিসফিসানি/নির্জন রাস্তা	1×10^{-9}	10^3	30
শ্রেণিকক্ষের শব্দ MAT 17-18	1×10^{-7}	10^5	50
স্বাভাবিক কথাবার্তা	1×10^{-6}	10^6	60
ব্যস্ততম রাস্তার শব্দ	1×10^{-5}	10^7	70
কারখানার কোলাহল/কোলাহল পূর্ণ অফিস	1×10^{-3}	10^9	90
মাথার উপরের জেট প্লেনের শব্দ	1×10^{-2}	10^{10}	100
তীব্র বজ্রনির্ঘোষের শব্দ	1×10^{-1}	10^{11}	110
কানে বেদনা দানকারী সূচন শব্দ DAT 19-20	1×10^0	10^{12}	120

MAT 24-25

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৬

১। কোনো জনসভায় শব্দের তীব্রতা 10^{-8} watt m^{-2}। শব্দের তীব্রতা লেভেল ডেসিবেলে নির্ণয় কর। শব্দের তীব্রতা তিনগুণ হলে নতুন তীব্রতা লেভেল কত হবে ? [সি. বো. ২০১৫; দি. বো. ২০১১, ২০০৯; চ. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৭, ২০০৩; কু. বো. ২০০৪; KUET Admission Test, 2017-18 (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$= 10 \log_{10} \frac{10^{-8}}{10^{-12}}$$

$$= 10 \log_{10} (10^4) = 40\ dB$$

আবার, $\beta' = 10 \log_{10} \frac{I'}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{3 \times 10^{-8}}{1 \times 10^{-12}}$

$$= 10 \log_{10} 3 \times 10^4 = 44{\cdot}77\ dB$$

এখানে,

প্রমাণ তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$

জনসভায় শব্দের তীব্রতা, $I = 10^{-8}\ Wm^{-2}$

তীব্রতা লেভেল, $\beta = ?$

আবার, $I' = 3I = 3 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}$

$\beta' = ?$

২। একটি ক্যাসেট প্লেয়ার হতে নিঃসৃত শব্দের ক্ষমতা 30mW হতে 60mW-এ পরিবর্তিত হলে শব্দের তীব্রতা লেভেলের কত পরিবর্তন হবে ? [সি. বো. ২০০৯, ২০০৭]

মনে করি, শব্দের তীব্রতা লেভেলের পরিবর্তন = $\Delta\beta$

আমরা জানি,

$$\Delta\beta = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$= 10\log_{10}\left(\frac{60\times10^{-3}\ W}{30\times10^{-3}\ W}\right)$$

$$= 10\log_{10}(2) = 3\,dB$$

এখানে,

নিঃসৃত শব্দের প্রাথমিক ক্ষমতা,

$P_1 = 30\ mW = 30\times10^{-3}\ W$

নিঃসৃত শব্দের পরিবর্তিত ক্ষমতা,

$P_2 = 60\ mW = 60\times10^{-3}\ W$

$\Delta\beta = ?$

৩। একটি ভ্যাকুয়াম ক্লিনার ও একটি টেলিভিশনের শব্দের তীব্রতার মাত্রা যথাক্রমে 80 dB এবং 78 dB। এদের সম্মিলিত শব্দের তীব্রতার মাত্রা কত ? [Admission Test : KUET 2017-18 (মান ভিন্ন), 2014-15 (মান ভিন্ন); BUET 2012–13; RUET 2014-15 (মান ভিন্ন)]

ভ্যাকুয়াম ক্লিনার ও টেলিভিশনের তীব্রতা যথাক্রমে I_1 ও I_2 হলে,

$$\beta_1 = 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0}$$

বা, $80 = 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0}$

বা, $\log_{10}\frac{I_1}{I_0} = 8$

$\therefore$ $\frac{I_1}{I_0} = 10^8$ বা, $I_1 = 10^8\,I_0$

এবং $\beta_2 = 10\log_{10}\frac{I_1}{I_0}$

বা, $78 = 10\log_{10}\frac{I_2}{I_0}$

বা, $\frac{I_2}{I_0} = 10^{7\cdot8}$

$\therefore$ $I_2 = 10^{7\cdot8}\times I_0$

এখানে,

ভ্যাকুয়াম ক্লিনারের শব্দের তীব্রতার মাত্রা, $\beta_1 = 80\,dB$

টেলিভিশনের শব্দের তীব্রতার মাত্রা, $\beta_2 = 78\,dB$

সম্মিলিত শব্দের তীব্রতা,

$$I = I_1 + I_2 = (10^8 + 10^{7\cdot8})\,I_0$$

$$\therefore\ \beta = 10\log_{10}\frac{(10^8+10^{7\cdot8})\,I_0}{I_0} = 82\cdot12\,dB$$

৯·১৩ বীট বা স্বরকম্প
Beats

সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা ও প্রায় সমান কম্পাঙ্কের দুটি শব্দতরঙ্গ একসঙ্গে উৎপন্ন করলে দেখা যাবে যে, শব্দ একটানা হচ্ছে না—একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর একবার বাড়ছে ও একবার কমছে। শব্দের তীব্রতার এরূপ পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিকে বীট বা স্বরকম্প বলে। প্রতি সেকেন্ডে শব্দের তীব্রতার পর্যায়ক্রমিক হ্রাস বা বৃদ্ধির দ্বারা স্বরকম্পের সংখ্যা (বা কম্পাঙ্ক) নির্ণয় করা হয়।

সংজ্ঞা : সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একই দিকে অগ্রগামী দুটি শব্দতরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধির ঘটনাকে বীট বা স্বরকম্প বলে। বীটের সংখ্যা প্রতি সেকেন্ডে 10 এর বেশি হলে তা উপলব্ধি করা যায় না।

পরীক্ষাটি করে দেখ :

সমান কম্পাঙ্কের দুটি সুর শালাকা লও এবং তাদেরকে খাড়াভাবে একটি ফাঁপা বাক্সের ওপর পাশাপাশি স্থাপন কর। এখন সুর শলাকা দুটির একটিকে একবার এবং অপরটিকে আর একবার একটি রবারের প্যাডযুক্ত হাতুড়িতে আঘাত

কর। দেখা যাবে তারা প্রায় একই রকম একটানা শব্দ উৎপন্ন করছে। এবার সুর শলাকা দুটিকে একই সাথে আঘাত করলে দেখা যাবে এখনো তারা একটানা শব্দ উৎপন্ন করছে; কিন্তু শব্দের তীব্রতা অনেকখানি বৃদ্ধি পাচ্ছে। এখন একটি সুর শলাকার এক বাহুতে কিছুটা মোম লাগিয়ে একে ভারী কর। এর কম্পাঙ্ক কিছুটা কমে যাবে এবং সুর শলাকা দুটির কম্পাঙ্কের মধ্যে কিছুটা পার্থক্য সৃষ্টি হবে। এ অবস্থায় সুর শলাকা দুটিকে একই সাথে আঘাত করে শব্দ উৎপন্ন করলে একটানা শব্দ শোনা যাবে না। শব্দ পর্যায়ক্রমে জোরে এবং ধীরে ধীরে শোনা যাবে। কাছাকাছি ভিন্ন কম্পাঙ্কের দুটি সুর শলাকা হতে উৎপন্ন শব্দ প্রাবল্যের এ রকম হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটবে। শব্দ তীব্রতার এ রকম হ্রাস-বৃদ্ধির নাম বীট বা স্বরকম্প এবং শব্দ তীব্রতার একটি বৃদ্ধি এবং একটি হ্রাস নিয়ে একটি বীট সৃষ্টি হয়।

দুটি শব্দ উৎসের ক্রিয়ায় প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়—এটি বলতে কী বুঝ ?

এটি বলতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলো বুঝা যায় :

১। উৎসদ্বয়ের ক্রিয়ায় শব্দের তীব্রতা প্রতি সেকেন্ডে 5 বার হ্রাস-বৃদ্ধি হয়।

২। উৎসদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্য $N = 5$ Hz

৩। উৎসদ্বয় হতে আগত শব্দ কোনো বিন্দুতে বা কানে প্রতি সেকেন্ডে 5 বার সমদশায় ও 5 বার বিপরীত দশায় মিলিত হয়।

৪। পরপর একটি সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন তীব্রতার মধ্যে সময়ের ব্যবধান $= \frac{1}{2N} = 0.1$ সেকেন্ড।

বীট উৎপত্তির শর্ত :

১। বীট সৃষ্টিকারী শব্দতরঙ্গ দুটি একই সময়ে উৎপন্ন হতে হবে।

২। তরঙ্গ দুটির কম্পাঙ্ক ও তীব্রতা প্রায় সমান হতে হবে।

৩। তরঙ্গ দুটির দরুন মাধ্যমের কোনো একটি কণার সরণ একই রেখায় হতে হবে।

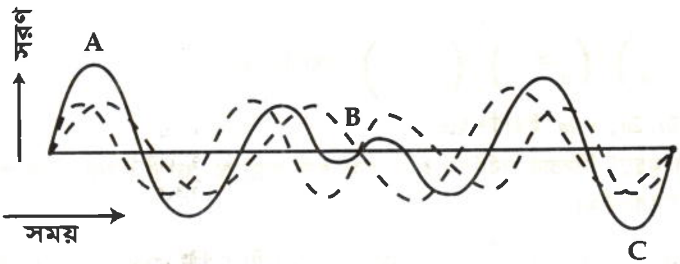
৪। মাধ্যমের কোনো একটি কণার ওপর তরঙ্গ দুটি মিলিত হবার পর তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

৫। তরঙ্গ দুটির মিলিত ক্রিয়ার বিস্তার সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

৯·১৩·১ বীট বা স্বরকম্প গঠনের কৌশল
Mechanism of formation of beats

প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট দুটি শব্দতরঙ্গ মাধ্যমের কোনো একটি কণার ওপর মিলিত হবার পর তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় এবং কোনো এক মুহূর্তে কণাটির ওপর তরঙ্গ সমদশায় আবার পরবর্তী মুহূর্তে তরঙ্গদ্বয় বিপরীত দশায় ক্রিয়া করে। এজন্য তরঙ্গদ্বয়ের মিলিত ক্রিয়ায় একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর কণাটির সরণ তথা শব্দের তীব্রতা একবার সবচেয়ে বেশি হয় এবং আর একবার সবচেয়ে কম হয়। শব্দের তীব্রতার এই পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিই স্বরকম্প।

প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট দুটি সুর শলাকা লই। তাদেরকে আঘাত করে শব্দতরঙ্গ উৎপন্ন করি। এ তরঙ্গ দুটি মাধ্যমের মধ্য দিয়ে চলতে থাকবে। এতে মাধ্যমের এক বিন্দুতে শব্দতরঙ্গ দুটি কোনো এক সময় সমদশায় এবং পরবর্তী অপর এক সময় বিপরীত দশায় মিলিত হবে। ৯·২৫ চিত্রে A বিন্দুতে দুটি শব্দতরঙ্গ একই দশায় মিলিত হওয়ায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের যোগফলের সমান হবে। ফলে লব্ধি শব্দের তীব্রতা বেশি হবে। এখানে তরঙ্গ দুটিকে সরু রেখা এবং লব্ধি শব্দতরঙ্গকে অবিচ্ছিন্ন মোটা রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে।



চিত্র ৯·২৫

যতই সময় অতিবাহিত হবে ততই একটি তরঙ্গ অপরটিকে অতিক্রম করার চেষ্টা করবে। B বিন্দুতে তরঙ্গ দুটি বিপরীত দশায় থাকায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের বিয়োগফলের সমান হবে। অতএব লব্ধি শব্দের তীব্রতা কম হবে। পুনরায় C বিন্দুতে তরঙ্গ দুটি একই দশায় থাকায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের যোগফলের সমান হবে। ফলে লব্ধি শব্দের তীব্রতা অধিক হবে। এভাবে লব্ধি শব্দের তীব্রতার পর্যায়ক্রমে হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটবে। **প্রতি সেকেন্ডে শব্দের পর্যায়ক্রমে হ্রাস বা বৃদ্ধি দ্বারা স্বরকম্পের সংখ্যা নির্ণীত হবে।**

৯.১৩.২ বীটের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of beat

১। সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একই দিকে অগ্রগামী দুটি শব্দতরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধির ফলে বীট সৃষ্টি হয়।

২। বীটের ক্ষেত্রে কোনো বিন্দুতে তরঙ্গ দুটির মধ্যে দশা পার্থক্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়।

৩। শব্দের তীব্রতা সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়।

৪। লব্ধি তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বীট উৎপন্নকারী তরঙ্গদ্বয়ের গড় কম্পাঙ্কের সমান হয়।

৯.১৩.৩ বীটের গাণিতিক রাশিমালা
Mathematical expression of beat

ধরা যাক দুটি শব্দায়িত সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2 $(n_1 > n_2)$ এবং কম্পাঙ্ক দুটির পার্থক্য খুব বেশি নয়। আরও ধরা যাক শলাকা দুটি হতে আগত শব্দতরঙ্গ মাধ্যমের কোনো একটি কণার ওপর সমদশায় আপতিত হবার t সেকেন্ড পরে তরঙ্গ দুটির দরুন কণাটির পৃথক সরণ যথাক্রমে,

$$y_1 = a \sin 2\pi n_1 t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.28)$$

ও $$y_2 = b \sin 2\pi n_2 t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.29)$$

উপরিপাতনের নীতি অনুসারে লব্ধি সরণ,

$$y = y_1 + y_2 = a \sin 2\pi n_1 t + b \sin 2\pi n_2 t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.30)$$

যদি তরঙ্গ দুটির বিস্তার সমান অর্থাৎ $a = b$ হয়, তবে

$$y = a(\sin 2\pi n_1 t + \sin 2\pi n_2 t)$$

$$= 2a \sin\left\{2\pi\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) t\right\} \cos 2\pi \frac{(n_1 - n_2)}{2} t$$

$$= \left[2a \cos 2\pi \frac{(n_1 - n_2)t}{2}\right] \sin 2\pi \left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) t$$

ধরা যাক, $A = 2a \cos 2\pi \dfrac{(n_1 - n_2)t}{2}$ এবং $n = (n_1 + n_2)/2$

$$\therefore \quad y = A \sin 2\pi n t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9.31)$$

এটি সমীকরণ (9.28) ও (9.29)-এর ন্যায় লব্ধি তরঙ্গের সমীকরণ। এর কম্পাঙ্ক n ও বিস্তার A। এই বিস্তার সময়ভেদে বিভিন্ন হবে। কারণ, শব্দতরঙ্গ দুটি কোনো একটি কণার ওপর মিলিত হলে তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়। কোনো এক মুহূর্তে কণাটির ওপর তরঙ্গদ্বয় সমদশায় আবার পরবর্তী মুহূর্তে বিপরীত দশায় ক্রিয়া করে। এতে তরঙ্গদ্বয়ের মিলিত ক্রিয়ায় একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর কণাটির সরণ তথা শব্দের তীব্রতা একবার সবচেয়ে বেশি হয় এবং আর একবার সবচেয়ে কম হয়। শব্দের এ পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিতে স্বরকম্পের উৎপত্তি হয়। যেমন—

$t = 0$, $\left(\dfrac{1}{n_1 - n_2}\right)$, $\left(\dfrac{2}{n_1 - n_2}\right)$, $\left(\dfrac{3}{n_1 - n_2}\right)$ ইত্যাদি হলে,

$A = 2a, -2a, 2a, -2a$ ইত্যাদি হবে।

সুতরাং এসব মুহূর্তে বিস্তার সর্বাধিক হবে এবং শব্দ সবচেয়ে জোরে শোনা যেতে পারে। কেননা শব্দের তীব্রতা বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

আবার, $t = \dfrac{1}{2(n_1 - n_2)}$, $\dfrac{3}{2(n_1 - n_2)}$, $\dfrac{5}{2(n_1 - n_2)}$ ইত্যাদি হলে, $A = 0$ হবে। সুতরাং এসব মুহূর্তে কোনো শব্দ শোনা যাবে না। অতএব দেখা যাচ্ছে যে, পরপর দুটি প্রবল শব্দ বা নিঃশব্দের মধ্যে সময়ের ব্যবধান $T = \dfrac{1}{(n_1 - n_2)}$ এবং এটিই শব্দের হ্রাস বা বৃদ্ধির তথা স্বরকম্পের পর্যায়কাল।

$\therefore$ **1 সেকেন্ডে স্বরকম্পের সংখ্যা বা কম্পাঙ্ক** $= \dfrac{1}{T} = (n_1 - n_2)$ **= শব্দ দুটির কম্পাঙ্কের পার্থক্য।**

সাধারণভাবে লেখা যায়, $N = (n_1 \sim n_2)$

এ সমীকরণ অনুযায়ী বীটের একক হবে "....../সেকেন্ড" বা "সেকেন্ড$^{-1}$"। সুতরাং **বলা যায় প্রতি সেকেন্ডে সৃষ্ট বীটসংখ্যা উৎসদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্যের সমান।**

যদি তরঙ্গ দুটির বিস্তার সমান না হয় তা হলে নিঃশব্দের পরিবর্তে মৃদু শব্দ শোনা যাবে কারণ তখন বিস্তারদ্বয়ের বিয়োগফল শূন্য হবে না। কম্পাঙ্কের পার্থক্য খুব বেশি হলে বীট সংখ্যাও বেড়ে যায় ফলে তীব্রতা হ্রাস-বৃদ্ধি এত দ্রুত হয় যে তা উপলব্ধি করা যায় না বরং কানে একটানা শব্দ শোনা যায়। বীটের সংখ্যা প্রতি সেকেন্ডে 10 এর বেশি হলে কানে তা উপলব্ধি করা যায় না।

৯.১৩.৪ বীট বা স্বরকম্পের প্রয়োগ
Application of beats

স্বরকম্পের তিনটি প্রয়োগ আছে; যথা—

(১) স্বরকম্পের সাহায্যে সুর শলাকার অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

(২) স্বরকম্পের সাহায্যে খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় করা যায়।

(৩) বাদ্যযন্ত্রাদির সুর নির্ণয় করা যায়।

১. অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় : স্বরকম্পের সাহায্যে কোনো স্বনকের অজানা কম্পাঙ্ক n_1 পরিমাপ করা যায়। এই স্বনকের সঙ্গে স্বরকম্প উৎপন্ন করে এরূপ একটি জানা কম্পাঙ্কের সুরশলাকা পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে বাছাই করা হয়। জানা সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক n_2 হলে স্পষ্টত n_2 অপেক্ষা n_1 প্রায় সমান হয়। এবার প্রতি সেকেন্ডে স্বরকম্পের সংখ্যা N গণনা করা হয়; সংজ্ঞানুযায়ী $N = n_1 \sim n_2$।

এরপর n_2 অপেক্ষা n_1 বড় না ছোট তা নির্ণয় করার জন্য অজানা সুরশলাকাটির যেকোনো বাহুতে মোম লাগিয়ে ওর কম্পাঙ্ক সামান্য কমানো হয়। এর ফলে স্বরকম্পের সংখ্যা বাড়লে স্পষ্টত n_2 অপেক্ষা n_1 বড়ো বা $n_1 > n_2$ হয় অতএব $N = n_1 - n_2$ বা $n_1 = n_2 + N$। কিন্তু স্বরকম্পের সংখ্যা কমে গেলে বা সমান হলে $n_2 > n_1$ হয় তখন $N = n_2 - n_1$ বা $n_1 = n_2 - N$। এভাবে অজানা কম্পাঙ্ক n_1 নির্ণয় করা যায়।

আবার অজানা সুরশালাকার বাহুতে ভর কমালে যদি বীট বাড়ে অর্থাৎ কম্পাঙ্কের পার্থক্য বাড়ে তা হলে অজানা কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক অপেক্ষা বড়ো হবে। সেক্ষেত্রে $n_1 > n_2$ হয়। $\therefore$ $N = n_1 - n_2$ হয়। আবার বীটসংখ্যা কমে বা সমান হলে, কম্পাঙ্কের পার্থক্য কমে সেক্ষেত্রে $n_1 < n_2$ হয়। $\therefore$ $N = n_2 - n_1$ হয়।

২. খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় : খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় করতে গিয়ে দুটি অভিন্ন প্রকৃতির অর্গান নল লই। একটি অর্গান নলে খনির বাতাস এবং অপরটিতে বিশুদ্ধ বাতাস নিয়ে নল দুটিতে একই সঙ্গে শব্দ উৎপন্ন করি। খনির বাতাস বিশুদ্ধ না হলে নল দুটিতে সৃষ্ট শব্দের কম্পাঙ্কের প্রভেদ থাকবে। ফলে স্বরকম্পের সৃষ্টি হবে। কিন্তু খনির বাতাস বিশুদ্ধ হলে কম্পাঙ্কের প্রভেদ থাকবে না। ফলে স্বরকম্প শোনা যাবে না।

সিদ্ধান্ত : স্বরকম্পের সৃষ্টি হলে বুঝতে হবে যে, খনির বাতাস দূষিত।

৩. বাদ্যযন্ত্রাদির সুর নির্ণয় : দুটি বাদ্যযন্ত্রকে এক সুরে আনতে হলে তাদেরকে একই সঙ্গে বাজিয়ে স্বরকম্পের উপস্থিতি লক্ষ করতে হয়। সুর মিললে স্বরকম্প আর শোনা যাবে না। এমনিভাবে বীটের সাহায্যে বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্রের সুর মিলানো এবং নির্ণয় করা যায়।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৭

১। দুটি সুরশলাকা A ও B একই সাথে শব্দায়িত হওয়ায় প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়। কিন্তু A-তে খানিকটা মোম লাগিয়ে ওজন বাড়ালে বীটসংখ্যা কমে যায়। B-এর কম্পাঙ্ক 256 Hz হলে A-এর কম্পাঙ্ক কত ?

[দি. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৫]

এখানে,
$N = 5$
$n_B = 256$ Hz
$n_A = ?$

আমরা জানি,

$$N = n_A \sim n_B$$

যেহেতু A সুর শলাকার বাহুতে মোম লাগানোর ফলে কম্পাঙ্ক কমে এবং বীটসংখ্যা হ্রাস পায়; কাজেই $n_A < n_B$ হবে। অতএব,

$$N = n_B - n_A$$
$$n_A = n_B - N = 256 - 5 = 251$$
$$\therefore \; n_A = 251 \text{ Hz}$$

২। A ও B দুটি সুরেলা কাঁটা একত্রে শব্দায়িত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট শোনা যায়। A-এর বাহুর ভর কিছু কমালে বীট উৎপত্তির হার বৃদ্ধি পায়। B-এর কম্পাঙ্ক 512 Hz হলে A-এর প্রকৃত কম্পাঙ্ক কত ?

[ঢা. বো. ২০০৮]

আমরা পাই, $N = n_1 \sim n_2$

প্রশ্নানুসারে ভর হ্রাসে A-এর কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পায়। এতে বীট উৎপত্তির হার বৃদ্ধি পায় হেতু তাদের কম্পাঙ্কের পার্থক্যও বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ A-এর কম্পাঙ্ক, $n_1 >$ B-এর কম্পাঙ্ক, n_2

সুতরাং, $n_1 - n_2 = N$

এখানে, $N = 5$ বীট/সে. ও $n_2 = 512 \text{ Hz}$

$\therefore \quad n_1 = N + n_2 = (512 + 5) \text{ Hz} = 517 \text{ Hz}$

৩। 64টি সুর শলাকা ক্রমবর্ধমান কম্পাঙ্কে সাজানো আছে। তাদের শেষটির কম্পাঙ্ক প্রথমটির দ্বিগুণ এবং পর পর যেকোনো দুটি শলাকা প্রতি সেকেন্ডে 4টি বীট উৎপন্ন করে। প্রথম সুর শলাকার কম্পাঙ্ক কত ?

[JU unit-A Admission Test, 2020-21]

ধরি, প্রথমটির কম্পাঙ্ক = n

তা হলে শেষটির কম্পাঙ্ক = $2n$

আবার, পর্যায়ক্রমিক দুটি সুর-শলাকার কম্পাঙ্কের পার্থক্য = 4 Hz

$\therefore$ দ্বিতীয় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + 4$

$= n + (2 - 1)4$

তৃতীয় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + (3 - 1)4$

চতুর্থ সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + (4 - 1)4$

64-তম সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + (64 - 1)4$

কিন্তু, $n + (64 - 1)4 = 2n$

$\therefore \quad n = (64 - 1)4 = 252 \text{ Hz}$

৪। A ও B দুটি সুরেলা কাঁটা একত্রে ধ্বনিত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়। A-কে একটু ঘষে পুনরায় ধ্বনিত করলে একই সংখ্যক বীট উৎপন্ন হয়। B-এর কম্পাঙ্ক 510 Hz। ঘষার পূর্বে ও পরে A-এর কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে করি, A ও B সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_A ও n_B

এখানে, n_A অজানা কম্পাঙ্ক, $n_B = 510 \text{ Hz}$ এবং বীট সংখ্যা, $N = 5$। A শলাকা ঘষলে কম্পাঙ্ক বাড়ে এবং বীট সমান থাকে কাজেই $n_A > n_B$

$N = n_A - n_B$

$\therefore$ ঘষার পর A-এর কম্পাঙ্ক

$n_A = N + n_B$

বা, $n_A = 510 + 5 = 515 \text{ Hz}$

এবং ঘষার পূর্বে A-এর কম্পাঙ্ক

$n_A = 510 - 5 = 505 \text{ Hz}$

যেহেতু A সুর শলাকাকে ঘষা হয়েছে তাই ঘষার পর এর কম্পাঙ্ক পূর্বের তুলনায় বেড়ে যাবে। কাজেই ঘষার পূর্বে A-এর সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক, $n_A = 515 \text{ Hz}$ বিবেচনা করলে ঘষার পর বীটসংখ্যা একই হবার সম্ভাবনা নেই। তাই ঘষার পূর্বে A-এর কম্পাঙ্ক = 505 Hz হবে এবং ঘষার পর A-এর কম্পাঙ্ক $n_A = 515 \text{ Hz}$

৫। দুটি সুর শলাকা একটি গ্যাসে 0·50 m এবং 0·505 m দৈর্ঘ্যের তরঙ্গ উৎপন্ন করে। যদি প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন হয় তবে উক্ত গ্যাসে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৪; কু. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০২; CKRUET Admission Test, 2020-21]

মনে করি, গ্যাসে শব্দের বেগ = v

আমরা জানি,

$$v = n_1\lambda_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এবং

$$v = n_2\lambda_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হতে পাই,

$$n_1 = \frac{v}{\lambda_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

এবং $n_2 = \dfrac{v}{\lambda_2}$ ... ... (iv)

কিন্তু $N = n_1 - n_2$ ... ... (v) [$\because \lambda_1 < \lambda_2$]

এখন সমীকরণ (v) হতে পাই,

$$N = \frac{v}{\lambda_1} - \frac{v}{\lambda_2}$$

বা, $6 = v\left(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\right)$

বা, $6 = v\left(\dfrac{1}{0·50} - \dfrac{1}{0·505}\right)$

বা, $v = \dfrac{0·50 \times 0·505 \times 6}{0·005} = 303 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,
$N = 6$
$\lambda_2 = 0·50$ m
$\lambda_2 = 0·505$ m

৬। দুটি সুর শলাকা A এবং B-কে একসঙ্গে কম্পিত করলে 6টি বীট উৎপন্ন হয়। A শলাকাটি একমুখ খোলা নলের 35·5 cm দীর্ঘ বায়ুস্তম্ভের সাথে অনুনাদ সৃষ্টি করে। B শলাকাটি ওই নলের 36·5 cm দীর্ঘ বায়ুস্তম্ভের সাথে অনুনাদ সৃষ্টি করে। শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

ধরা যাক, A ও B সুর শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2

$\therefore \quad n_1 \sim n_2 = 6$ অথবা $n_2 - n_1 = 6$

বায়ুতে শব্দের বেগ v হলে নলে উৎপন্ন মূল সুরের ক্ষেত্রে,

$$n_1 = \frac{v}{4l_1} = \frac{v}{4 \times 35·5} \text{ এবং } n_2 = \frac{v}{4 \times 36·5}$$

সুতরাং, এটি স্পষ্ট যে, $n_1 > n_2$। অর্থাৎ $n_1 - n_2 = 6$

এখন, $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{l_2}{l_1} = \dfrac{36·5}{35·5}$

বা, $\dfrac{n_1 - n_2}{n_2} = \dfrac{1}{35·5} \qquad \therefore \dfrac{6}{n_2} = \dfrac{1}{35·5}$

বা, $n_2 = 6 \times 35·5 = 213$ Hz

$\therefore \quad n_1 = n_2 + 6 = 213 + 6 = 219$ Hz

উত্তর : শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 213 Hz ও 219 Hz

৯·১৪ স্বরগ্রাম ও হারমোনিক্স
Musical scale and harmonics

৯·১৪·১ স্বরগ্রাম
Musical scale

আমরা জানি একটি সুরের মধ্যে নিম্ন ও উচ্চ কম্পাঙ্ক বিদ্যমান থাকে। সর্বনিম্ন কম্পাঙ্কের সুর হলো সূচনা-সুর বা মূল সুর (key note)। উচ্চতর কম্পাঙ্কগুলোর মান সূচনা-সুরের সঙ্গে নির্দিষ্ট অনুপাতে থাকে। সর্বোচ্চ কম্পাঙ্কটি

সূচনা সুরের অষ্টক হয়। যদি একটি কম্পাঙ্ক ক্রমের কম্পাঙ্কগুলো পরপর ধ্বনিত হলে খুব শ্রুতিমধুর শব্দ শোনা যায় তখন আমরা বলে থাকি যে, স্বরগ্রাম সৃষ্টি হয়েছে। সবচেয়ে সরল স্বরগ্রাম হলো সপ্তসুর স্বরগ্রাম বা ডায়াটনিক স্বরগ্রাম (diatonic musical scale)। তা হলে স্বরগ্রাম বলতে আমরা কী বুঝি ?

স্বরগ্রাম বলতে নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের কতগুলো সাজানো সুর বুঝায়। যেসব সুর আমাদের কানে সহজে সাড়া দেয় এবং কণ্ঠস্বরের উপযোগী হয় স্বরগ্রামে ওই সব সুরকে ঢেলে সাজানো হয়। পরীক্ষায় দেখা যায় যে, কোনো নির্দিষ্ট সুর ও তার দ্বিগুণ কম্পাঙ্কবিশিষ্ট অপর একটি সুরের মধ্যে প্রথম সুরের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী, বিভিন্ন কম্পাঙ্কের কতগুলো সুর সন্নিবেশ করলে সমসজ্ঞাতি বজায় থাকে। এরূপ সমসজ্ঞাতিপূর্ণ কতগুলো সুরের সমষ্টিকে **স্বরগ্রাম** বলে। সর্বাপেক্ষা কম কম্পাঙ্কের সুরকে বলা হয় সূচনা সুর বা টোনিক (key tone or tonic) বলে। সর্বোচ্চ কম্পাঙ্কটি সূচনা সুরের অষ্টক।

হারমোনিয়াম ও পিয়ানোতে কতগুলো চাবি এবং বাঁশিতে কতগুলো ছিদ্র আছে। এ চাবি বা ছিদ্রগুলো একটি নির্দিষ্ট স্বরগ্রামে সাজানো থাকে। বেহালায় হাতের কায়দায় তারের বিভিন্ন স্থানে আঙ্গুল চেপে সুরযুক্ত শব্দ সৃষ্টি করা হয়। সেতার ও এস্রাজে কতগুলো ঘাট থাকে যাদের সাহায্যে ইচ্ছেমতো স্বরগ্রামের সুরগুলোর সুরবিভেদ পরিবর্তন করা যায়।

সবচেয়ে সরল স্বরগ্রাম হলো সপ্তসুর স্বরগ্রাম (diatomic scale)। এই স্বরগ্রামে আটটি সুর থাকে। যথা—সা–রে–গা–মা–পা–ধা–নি–সা। প্রথম 'সা' হচ্ছে সূচনা সুর যার কম্পাঙ্ক 2^8 বা 256 Hz। আর শেষ 'সা'-এর কম্পাঙ্ক হচ্ছে 512 Hz। এই কম্পাঙ্ক সূচনা সুরের দ্বিগুণ অর্থাৎ সূচনা সুরের অষ্টক। এই স্বরগ্রামের বিভিন্ন কম্পাঙ্কগুলো ৯.২ সারণিতে তাদের নামসহ (বাংলাদেশি ও পাশ্চাত্য) দেখানো হলো।

সারণি ৯.২

প্রতীক	বাংলাদেশি নাম	পাশ্চাত্য নাম	কম্পাঙ্ক	কম্পাঙ্কের অনুপাত (সূচনা সুরের)
C	সা	Do	256	1
D	রে	Re	288	9/8
E	গা	Mi	320	5/4
F	মা	Fa	$341\frac{1}{3}$	4/3
G	পা	Sol	384	3/2
A	ধা	La	$426\frac{2}{3}$	5/3
B	নি	Ti	480	15/8
C	সা′	do	512	2

৯·১৪·২ হারমোনিক্স বা সমমেল
Harmonics

আমরা জানি স্বরের মধ্যে বিদ্যমান সবচেয়ে নিম্ন কম্পাঙ্কের সুরকে মূল সুর বলে। কোনো স্বরে যেসব বিভিন্ন সুর থাকে, তাদের মধ্যে যে সুরের কম্পাঙ্ক সবচেয়ে কম, **তাকে মূল সুর (fundamental tone) বলে।** অন্যান্য সুর, যাদের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের চেয়ে বেশি, **তাদের উপসুর (overtones) বলে।** আবার উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক যদি মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক হয়, তা হলে সেসব **উপসুরকে সমমেল বা হারমোনিক (harmonics) বলে।** উপসুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হলে, তাকে দ্বিতীয় সমমেল বা অষ্টক (second harmonics or octave) বলে। তিনগুণ হলে তৃতীয় সমমেল (third harmonics) এবং **চারগুণ হলে চতুর্থ সমমেল (fourth harmonics) বলে।** মূলসুরকে প্রথম সমমেলও (first harmonics) বলা হয়। যেমন কোনো মাউথ অর্গান থেকে নিঃসৃত নিচের কম্পাঙ্কগুলো হলো :

256, 268, 502, 512, 620, 768, 1020, 1280 Hz

এখানে 256 Hz মূলসুর। 512 Hz হচ্ছে মূলসুরের অষ্টক বা দ্বিতীয় হারমোনিক এবং 768 Hz ও 1280 Hz হচ্ছে যথাক্রমে তৃতীয় ও পঞ্চম হারমোনিক। 256 Hz ছাড়া অন্যান্য কম্পাঙ্কের সুর হচ্ছে উপসুর। বেহালার ছড় টেনে কোনো শব্দ উৎপন্ন করলে তাকে স্বর বলে। কারণ এতে একাধিক কম্পাঙ্কের শব্দ মিশ্রিত থাকে। স্বরগ্রামের প্রথম সা'র কম্পাঙ্কের চেয়ে শেষ সা'র কম্পাঙ্ক দ্বিগুণ হওয়ায় শেষ সা-কে প্রথম সা'র অষ্টক বলে।

সকল সমমেল উপসুর কিন্তু সব উপসুর সমমেল নয় :

উপরিউক্ত আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি, একাধিক কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরের সমন্বয়ে স্বর সৃষ্টি হয়। স্বরের মধ্যে উপস্থিত কম্পাঙ্কগুলোর মধ্যে যেটি সর্বনিম্ন সেই কম্পাঙ্কের সুরকে মূলসুর বলে। বাকি সব কম্পাঙ্ক হলো উপসুর। উপসুরগুলোর মধ্যে যাদের কম্পাঙ্ক মূলসুরের সরল গুণিতক তাদের সমমেল বা harmonic বলে। সুতরাং **সমমেলগুলো উপসুরেরই অংশ।** সেজন্য বলা হয়, **সব সমমেল উপসুর কিন্তু সব উপসুর সমমেল নয়** (all harmonics are overtones, but all overtones are not harmonics)।

শব্দ নয়েজ বা গোলমেলে মনে হবার কারণ :

আমরা অর্থবহ যেসব শব্দ শুনি তার বেশির ভাগ অনেকগুলো কম্পাঙ্কের সমন্বয়ে সৃষ্টি। এই কম্পাঙ্কগুলো পরস্পরের সরল গুণিতক হওয়ার জন্য এদের দ্বারা সৃষ্ট শব্দ আমাদের কাছে সংগীত গুণসম্পন্ন মনে হয়। কোনো স্বরের বেশির ভাগ শক্তি মূল সুরে বর্তমান থাকে বাকি শক্তি উপসুরগুলোর মধ্যে থাকে। শক্তির এই বণ্টনের ওপর স্বরের বৈশিষ্ট্য নির্ভর করে। কোনো স্বরে সমমেল উপসুরের সংখ্যা যত বেশি হবে এবং অসমমেল উপসুরের সংখ্যা যত কম হবে, শব্দ তত শ্রুতিমধুর হবে। যদি মূলসুর এবং উপসুরের মাঝে সরল গাণিতিক সম্পর্ক না থাকে তখন শব্দ গোলমেলে বা নয়েজ মনে হয়।

দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাত একটি পূর্ণসংখ্যা হলে এদের মিলিত প্রভাবে শ্রুতিমধুর শব্দের উৎপত্তি হয় এবং এদের তীক্ষ্ণতার পার্থক্য ভালোভাবে বুঝা যায়। এই কারণে **দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাতকে সুরবিরাম বা সুরানুপাত বলে। দুটি শব্দের সুর বিরাম এদের মধ্যবর্তী সুর বিরামগুলোর গুণফলের সমান।** নিচে কয়েকটি সুরবিরাম নামের তালিকা দেওয়া হলো :

সুরবিরাম	নাম	সুরবিরাম	নাম
1 : 1	সমায়ন (Unison)	3 : 2	গুরুপঞ্চম (Major fifth)
2 : 1	অষ্টক (Octave)	5 : 3	গুরু ষষ্ঠক (Major sixth)
3 : 1	পঞ্চম (Fifth)	8 : 5	লঘু ষষ্ঠক (Minor sixth)
4 : 1	গুরু ত্রিস্রক (Major third)	8 : 9	গুরু সুর (Major tone)
5 : 4	লঘু ত্রিস্রক (Minor third)	10 : 9	লঘু সুর (Minor tone)
6 : 5		16 : 15	অর্ধসুর (Semi tone)

৯·১৪·৩ সংগীতে বহুল প্রচলিত শব্দসমূহ

Terms mostly used in music

সংগীতে নিম্নলিখিত শব্দগুলোর বহুল প্রচলন দেখা যায় :

(১) **সুরযুক্ত শব্দ (Musical sound) : স্বনকের নিয়মিত পর্যাবৃত্ত কম্পনের ফলে সৃষ্ট শব্দকে সুরযুক্ত শব্দ বলে।** উদাহরণ : সেতার বাজানোর সময় সেতারের তারগুলো বা গান গাওয়ার সময় মানুষের কণ্ঠনালি নিয়মিত পর্যাবৃত্ত গতিতে কম্পিত হয়। বৃষ্টির দিনে টিনের চালে একটানা বৃষ্টির শব্দ সুরযুক্ত শব্দ।

(২) **সুরবর্জিত শব্দ (Noise) : স্বনকের অনিয়মিত বা ক্ষণস্থায়ী স্পন্দনের ফলে উৎপন্ন শব্দকে সুরবর্জিত শব্দ বলে।** উদাহরণ : হাট বাজারে লোকজনের কোলাহল সুরবর্জিত শব্দের উদাহরণ।

(৩) **সুর (Tone) : যে সুরযুক্ত শব্দে একটি মাত্র কম্পাঙ্ক উপস্থিত থাকে তাকে সুর বলে।** উদাহরণ : সুর শলাকার বাহু দুটি সরল দোল গতিতে কম্পিত হয়, তাই এ থেকে একটি মাত্র কম্পাঙ্কের শব্দ বেরোয়।

(৪) **স্বর (Note) : যে সুরযুক্ত শব্দে একাধিক কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দ থাকে তাকে স্বর বলে।** সুতরাং স্বর হলো একাধিক সুরের সংমিশ্রণ। উদাহরণ : বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র থেকে যে শব্দ বেরিয়ে আসে তাতে একাধিক কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর থাকে, তাই ওই শব্দকে স্বর বলে।

একটি স্বরের মধ্যে উপস্থিত বিভিন্ন সুরকে কম্পাঙ্কের আলোকে বিভিন্ন নামে অভিহিত করা হয়। যেমন :

~~(৫)~~ **মূল সুর** (Fundamental tone) : **একটি স্বরের মধ্যে সর্বনিম্ন কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরকে মূল সুর বলে।**

~~(৬)~~ **উপসুর** (Overtones) : **একটি স্বরে মূলসুর ছাড়া উপস্থিত অন্যান্য সুরকে উপসুর বলে।**

(৭) **সমমেল** (Harmonics) : **একটি স্বরের মধ্যে উপস্থিত যেসব সুরের কম্পাঙ্ক মূলসুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক, সেগুলোকে বলা হয় সমমেল**। মূলসুরটিও একটি সমমেল।

~~(৮)~~ **অষ্টক** (Octave) : **স্বরের মধ্যে উপস্থিত কোনো সুরের কম্পাঙ্ক মূলসুরের দ্বিগুণ হলে তাকে মূল সুরের অষ্টক বলে।**

উদাহরণ : ধরা যাক, 250 Hz, 350 Hz, 450 Hz, 550 Hz, 650 Hz, 750 Hz—এই ছয়টি সুরের সমন্বয়ে একটি সুরযুক্ত শব্দ উৎপন্ন হয়েছে।

(i) উপরোল্লিখিত শব্দের প্রত্যেকটি এক একটি সুর।

(ii) এখানে ছয়টি সুরের সংমিশ্রণে একটি স্বর উৎপন্ন হয়েছে।

(iii) এখানে 250 Hz সুরটি হলো মূলসুর।

(iv) 350 Hz, 450 Hz, 550 Hz, 650 Hz, 750 Hz—এই সুরগুলোর প্রত্যেকটি হলো এক একটি উপসুর।

(v) 500 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরটি মূল সুরের অষ্টক।

(vi) 500 Hz, 750 Hz কম্পাঙ্কযুক্ত সুর দুটির প্রতিটি এক একটি সমমেল। কেননা, এই সুর দুটি মূলসুরের (250 Hz) এর 2 এবং 3 গুণ।

~~(৯)~~ **ত্রয়ী** (Triad) : তিনটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত 4 : 5 : 6 হলে তাদের সমন্বয়ে যে সুরযুক্ত শব্দের উৎপত্তি হয় তাকে ত্রয়ী বলে। সা : গা : পা = 256 : 320 : 384 = 4 : 5 : 6 এবং মা : ধা : র্সা = 341·33 : 426·66 : 512 = 4 : 5 : 6 ; কাজেই 256, 320 ও 384 কম্পাঙ্ক এবং 341·33, 426·66 ও 512 কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরের সমন্বয়ে উৎপন্ন শব্দ ত্রয়ী।

~~(১০)~~ **স্বর-সঙ্গতি** (Chord) : চারটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত 4 : 5 : 6 : 8 হলে তাদের সমন্বয়ে এক প্রকার শ্রুতিমধুর শব্দের উৎপত্তি হয়। এরূপ সমন্বয়কে **স্বর-সঙ্গতি** বা **সমসঙ্গতি** বলে। সুতরাং ত্রয়ী ও ত্রয়ীর নিম্নতম কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দের সমন্বয় স্বর-সঙ্গতি। কিন্তু সমন্বয় যদি শ্রুতিমধুর না হয় অর্থাৎ শ্রুতিকটু হয় তবে ওই সমন্বয়কে **বিষম সঙ্গতি** বলে।

~~(১১)~~ **সমতান বা হারমোনি** (Harmony) : একই সময় কতগুলো শব্দ উৎপন্ন হলে যদি তাদের মধ্যে একটি ঐকতানের সৃষ্টি হয় তবে তাকে সমতান বলে।

~~(১২)~~ **স্বরমাধুর্য বা মেলডি** (Melody) : কতগুলো শব্দ একের পর এক উৎপন্ন হয়ে যদি একটি সুরযুক্ত শব্দের সৃষ্টি করে তবে তাকে স্বরমাধুর্য বা মেলডি বলে।

~~(১৩)~~ **সলো** (Solo) : একটি মাত্র বাদ্যযন্ত্র হতে যে স্বর সৃষ্টি হয় তাকে সলো বা একক সঙ্গীত বলে। একটি বেহালা বা পিয়ানো হতে উৎপন্ন স্বরই সলো।

~~(১৪)~~ **অর্কেস্ট্রা** (Orchestra) : যখন একাধিক বাদ্যযন্ত্র একত্রে বাজিয়ে একটি সমতান অথবা মেলডি অথবা সমতান মেলডি উভয়ই উৎপন্ন করে তখন তাকে অর্কেস্ট্রা বলে।

~~(১৫)~~ **টনিক** (Tonic) : সর্বাপেক্ষা কম কম্পাঙ্কের সূচনা সুরকে টনিক বলে।

~~(১৬)~~ **সুর বিরাম** (Musical Interval) : দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাতকে অবকাশ বা সুরবিরাম বলে। মনে করি A, B, C তিনটি বাদ্য যন্ত্রের সুরের কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1, n_2 এবং n_3 তা হলে C ও A এর মধ্যে সুর বিরাম হবে,

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{n_3}{n_2} \times \frac{n_2}{n_1}$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, দুটি শব্দের সুরবিরাম এদের মধ্যবর্তী সুরবিরামগুলোর গুণফলের সমান।

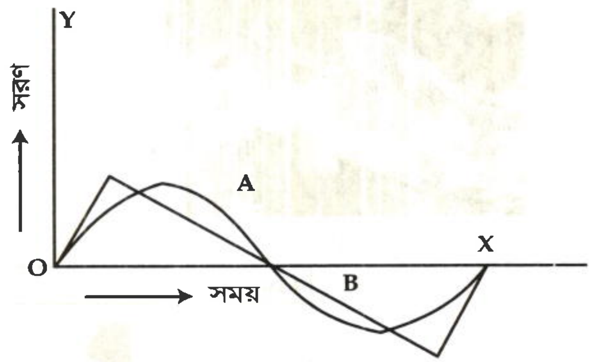
অনুধাবনমূলক কাজ : "সকল হারমোনিক উপসুর কিন্তু সকল উপসুর হারমোনিক নয়।"—ব্যাখ্যা কর।

একটি স্বরের মধ্যে যে বিভিন্ন কম্পাঙ্কের সুর থাকে তার মধ্যে সর্বাপেক্ষা কম কম্পাঙ্কের সুরকে মূল সুর বলে এবং বাকি সুরগুলোকে উপসুর বলে। উপসুরগুলোর মধ্যে যেগুলোর কম্পাঙ্ক মূল সুরের সরল গুণিতক সেগুলোকে হারমোনিক বলে। কিন্তু সকল উপসুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক নয়। তাই সকল হারমোনিক উপসুর হলেও সকল উপসুর হারমোনিক নয়।

৯.১৫ সংগীত গুণ বিশ্লেষণে পদার্থবিজ্ঞানের অবদান
Contribution of Physics in the analysis of musical sound

পদার্থবিজ্ঞানের শব্দ অধ্যায়ে আমরা শব্দের উৎপত্তি, মাধ্যমে শব্দ সঞ্চালন, বীট সৃষ্টি, শব্দের তীব্রতা, তীক্ষ্ণতা এবং এসব শব্দের গুণ বা জাতিসহ কোনটি সংগীত গুণসম্পন্ন কোনটি নয়েজ (noise) যুক্ত শব্দ ইত্যাদি বিষয়ে আলোচনা করে থাকি। সকল বাদ্যযন্ত্র পদার্থবিজ্ঞানের কোনো না কোনো বিষয়ের ওপর ভিত্তি করে তৈরি করা হয়েছে। সকল বাদ্যযন্ত্রে কম্পনের মাধ্যমে সুর সৃষ্টি করা হয়। এমনকি পানিতে কম্পন সৃষ্টি করে জলতরঙ্গের সুর তোলা যায়। সকল যন্ত্র দ্বারা সৃষ্ট শব্দই পদার্থবিজ্ঞানের তত্ত্ব দ্বারা বিশ্লেষণ করা যায়। আমরা জানি যেসব বৈশিষ্ট্য দ্বারা দুটি উৎস হতে নির্গত শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতা এক হলেও তাদের একটিকে অন্যটি হতে পৃথক করা যায় তাই জাতি বা গুণ (quality)। এই বৈশিষ্ট্য দ্বারা একই গান বাঁশি ও সেতার হতে বাজালে ওই গানের শব্দগুলো বাঁশির না সেতারের তা শোনামাত্র বুঝা যায়। একটি সংযুক্ত বা সংগীত গুণসম্পন্ন শব্দ যেসব সুরের মিশ্রণে সৃষ্টি হয় তাদের মধ্যে সুরের কম্পাঙ্ক দ্বারা তার তীব্রতার পরিচয় পাওয়া যায়। কোনো একটি সুরযুক্ত শব্দে উপস্থিত উপসুরের প্রভাবে শব্দতরঙ্গের সরণ-সময় রেখার আকার ও সাথে সাথে জাতি বদলায়। ৯.২৬ চিত্রে জাতি ভিন্ন অন্য কোনো প্রভেদ নেই এরূপ দুটি সুরযুক্ত শব্দতরঙ্গের সময়-সরণ রেখা AB দেখানো হয়েছে।

আবার কোনো সুরযুক্ত শব্দের বা সংগীত গুণসম্পন্ন (musical sound) শব্দের জাতি ওই শব্দে উপস্থিত উপসুরের সংখ্যার ওপর এবং উপসুরগুলোর বিস্তারের আপেক্ষিক মানের ওপর নির্ভর করে। একটি কম্পনরত বস্তু থেকে নির্গত শব্দে কোন কোন উপসুর উপস্থিত থাকে তা তারটিকে কোনো বিন্দুতে উদ্দীপিত করা হচ্ছে তার ওপর নির্ভর করে। যেমন একটি তারকে মধ্যবিন্দুতে টেনে ছেড়ে দিলে (plucking) এই বিন্দুটি নিস্পন্দ বিন্দু হতে পারে না। কাজেই তারের মধ্যবিন্দুতে দ্বিতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি যেসব সমমেলের নিস্পন্দ বিন্দু থাকে তারা উপস্থিত থাকে না। বস্তুত সব যুগ্ম সমমেলই অনুপস্থিত থাকে। সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায় যে, তারের উদ্দীপক বিন্দুতে (point of excitation) যেসব উপসুরের একটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকে তা তার থেকে নিঃসৃত শব্দে উপস্থিত থাকে না। বেহালা ও এই জাতীয় অন্যান্য বাদ্যযন্ত্রে যন্ত্রীরা এই নীতিকে কাজে লাগিয়ে নিঃসৃত স্বরের জাতি নিয়ন্ত্রণ করে, ফলে এই সুর সঙ্গীত গুণ সমৃদ্ধ হয়।



চিত্র ৯.২৬

কম্পনরত তারের কোনো বিন্দুকে আলতোভাবে ছুঁলে ওই বিন্দুতে একটি নিস্পন্দ বিন্দুর সৃষ্টি হয়। ফলে সেসব উপসুরের এই বিন্দুতে নিস্পন্দ বিন্দু আছে সেগুলো ছাড়া অন্য উপসুরগুলো অবদমিত (suppressed) হয়ে যায়। যেমন একটি কম্পনরত তারকে দৈর্ঘ্যের এক-তৃতীয়াংশ দূরত্বে স্পর্শ করলে তৃতীয়, ষষ্ঠ, নবম, দ্বাদশ, পঞ্চদশ ইত্যাদি যেসব সমমেল ওই বিন্দুতে নিস্পন্দ বিন্দু আছে সেগুলো ছাড়া অন্যসব সমমেল অবদমিত হয়ে যায়। তারের যন্ত্র বাজাবার সময় যন্ত্রীরা তারের বিশেষ বিশেষ জায়গায় আঙুল ছোঁয়ান, ফলে অবাঞ্ছিত সমমেলগুলো অবদমিত হয়ে নিঃসৃত স্বরের জাতি পাল্টে দেয়। সুতরাং দেখা যায় যে, সঙ্গীত গুণ, জাতি, সমমেল উপসুর সবকিছুর ধারণা ও জ্ঞান আমরা পদার্থবিজ্ঞানের শব্দ অধ্যায় থেকে নিতে পারি। আর এই লব্ধজ্ঞান দ্বারা সঙ্গীত গুণ যাচাই ও সঙ্গীত গুণের তীব্রতা, তীক্ষ্ণতা এবং মানসহ নানাবিধ বিষয়ের ব্যাখ্যা ও বিশ্লেষণ করতে পারি।

সাধারণত বাদ্যযন্ত্রে উৎপন্ন শব্দ বিশুদ্ধ সুর হয় না, বিভিন্ন সুরের মিশ্রণে গঠিত স্বর হয়। মূলসুরের তীব্রতা অপেক্ষাকৃত বেশি থাকে এবং এর কম্পন দিয়ে স্বরের তীক্ষ্ণতা নির্ধারিত হয়। উপসুরগুলোর উপস্থিতির ওপর এদের জাতি নির্ভর করে। এই জাতি সম্বন্ধে জানতে হলে অবশ্যই পদার্থবিজ্ঞানের শব্দবিজ্ঞান বিষয়ে অধ্যায়ের প্রয়োজন। আর এই জ্ঞানই সঙ্গীত গুণকে সমৃদ্ধ করে। দুটি স্বরের জাতির পার্থক্য নির্ভর করে :

(i) ওদের মূল সুরের সঙ্গে উপস্থিত উপসুরের সংখ্যার ওপর

(ii) উপসুরগুলোর কম্পাঙ্কের বিভিন্নতার ওপর এবং

(iii) উপসুরগুলোর বিস্তারের আপেক্ষিক মানের ওপর।

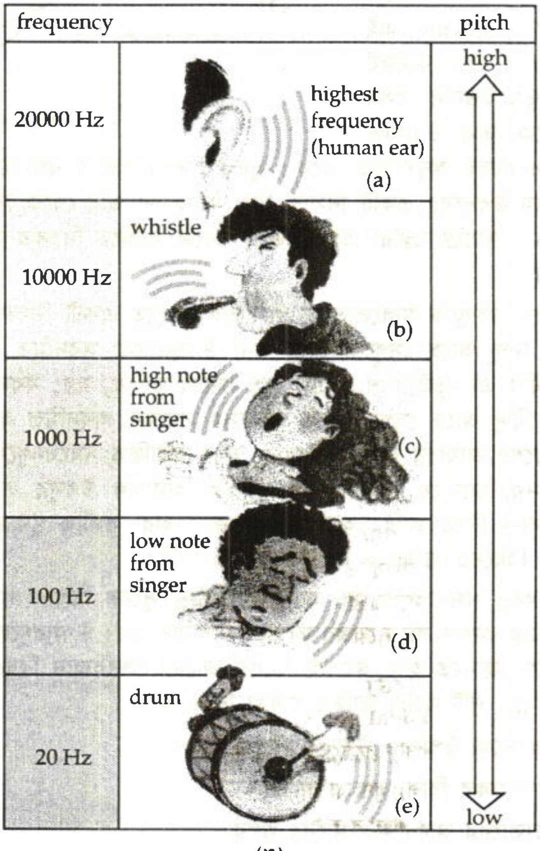
কয়েকটি বাদ্যযন্ত্র ও কয়েকজন বাদ্যবাদক

(ক)

(খ)

(গ)

(ঘ)



(ঙ)

শব্দের প্রাবল্য তরঙ্গের বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক বলে সমান তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও বিস্তারবিশিষ্ট বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র দ্বারা উৎপন্ন শব্দের প্রাবল্য সমান হয়। এই বিষয়গুলো পদার্থবিদ্যার অবদান। আবার তীক্ষ্ণতা তরঙ্গদৈর্ঘ্য দিয়ে নির্ধারিত হয় বলে শব্দের তীক্ষ্ণতাও সমান হবে। ধরা যাক, তিনটি যন্ত্রে উৎপন্ন তিনটি স্বরের প্রাবল্য ও তীক্ষ্ণতা সমান। কিন্তু তরঙ্গরূপ এক নয়। তাই এদের জাতি ভিন্ন। এসব বিষয়ে জ্ঞানলাভ অতীব জরুরি যা শব্দবিজ্ঞান অধ্যয়নের মাধ্যমে জানা সম্ভব। সুতরাং উপরিউক্ত বিষয়ের আলোকে আমরা বলতে পারি সংগীত গুণ বিশ্লেষণে পদার্থবিজ্ঞানের অবদান প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষভাবে জড়িত।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : দুটি বাদ্যযন্ত্রের সুর কীভাবে সামঞ্জস্যপূর্ণ করা হয় ? ব্যাখ্যা কর।

দুটি বাদ্যযন্ত্রকে একসঙ্গে কম্পিত করলে স্বরকম্পের সৃষ্টি হয়। এখন কোনো একটির কম্পাঙ্ক স্থির রেখে অপর বাদ্যযন্ত্রের কম্পাঙ্ক কম-বেশি করে স্বরকম্পের সংখ্যা শূন্য করলে ওই বাদ্যযন্ত্র দুটি সামঞ্জস্যপূর্ণ হয়।

৯·১৬ সোরগোল ও সংগীতগুণ এবং এদের প্রভাব
Noise and musical sound and their effect

আমাদের চারপাশে আমরা নানারকম শব্দ শুনি। যেমন বৃষ্টির রিমঝিম শব্দ, বেহালার সুর, গিটারের সুর ইত্যাদি শব্দ আমাদের শুনতে ভালো লাগে; আবার চিৎকার, হৈ চৈ, গাড়ির শব্দ আমাদের পীড়া দেয়। এসব শব্দকে মোটামুটি দুই ভাগে ভাগ করতে পারি— সুরসমৃদ্ধ শব্দ ও সুরবর্জিত শব্দ।

যেসব শব্দ শ্রুতিমধুর তাদের সুরযুক্ত শব্দ বা সঙ্গীত গুণসম্পন্ন বা সুশ্রাব্য বলা হয়।

আর যেসব শব্দ শ্রুতিকটু তাদের সোরগোল বা সুরবর্জিত শব্দ বা অপসুর বলা হয়।

এই শ্রেণিবিভাগ অনুভূতির ভিত্তিতে করা হয়েছে। কিন্তু অনুভূতির ভিত্তিতে শ্রেণিবিভাগ ঠিক বিজ্ঞানসম্মত নয়। এইজন্য এই শ্রেণিবিভাগ ভৌত ধর্মের ভিত্তিতেও করা হয়। একজনের কাছে যে শব্দ সুরযুক্ত মনে হবে অপরের নিকট তা সুরবর্জিতও মনে হতে পারে। শ্রোতার মানসিকতা, পরিবেশ ইত্যাদি অনেক কিছুর মিলিত প্রভাবই সুরযুক্ত বা সঙ্গীত গুণবিশিষ্ট শব্দকে সোরগোল বা সুরবর্জিত আবার সুরবর্জিত শব্দকে শ্রুতিমধুর মনে হতে পারে। অন্যভাবে বলা যায় সুশ্রাব্য বা সঙ্গীত গুণসম্পন্ন শব্দ ও সোরগোল বা অপসুর শব্দের মধ্যে কোনো সুস্পষ্ট বিভেদ রেখা টানা যায় না। শ্রোতার আপেক্ষিক পছন্দের দ্বারা সাধারণত এই দুই প্রকার শব্দের বিভেদ করা যায়। যেমন একজনের নিকট রবীন্দ্র সংগীত ভালো লাগে কিন্তু ব্যান্ড সংগীত ভালো লাগে না কিন্তু অপর একজনের নিকট ব্যান্ড সংগীত ভালো লাগে কিন্তু রবীন্দ্র সংগীত ভালো লাগে না।


চিত্র ৯.২৭ : হারমোনিয়ামের শব্দ।

কম্পন নিয়মিত বা পর্যায়বৃত্ত হলে যে শব্দ সৃষ্টি হয় এবং যা আমাদের শ্রুতিমধুর লাগে তাই **সংগীত গুণবিশিষ্ট** শব্দ। আবার স্বনকের উৎসের কম্পন অনিয়মিত বা অপর্যাবৃত্ত হলে যে শব্দ সৃষ্টি হয় এবং যা আমাদের শ্রুতিকটু লাগে তা গোলমাল (noise) বা সোরগোল শব্দ (non-musical sound)। তা হলে দেখা যায় হারমোনিয়াম [চিত্র ৯·২৭], গিটার, সেতার, বাঁশির শব্দে সংগীত গুণ বিদ্যমান, অপরদিকে পটকার আওয়াজ, বাজারের কোলাহল, হাতুড়ি দ্বারা পেরেক পোতার শব্দে সোরগোল বা নয়েজ বিদ্যমান। বলা যায় শব্দে উপস্থিত উপসুরের সংখ্যার ওপর এবং উপসুরগুলোর বিস্তারের আপেক্ষিক মানের ওপর সংগীত গুণ নির্ভর করে। সোরগোলে এই আপেক্ষিক মান কোনো গাণিতিক নিয়ম মানে না।

কোলাহল বা সোরগোল সুরবর্জিত শব্দ; কিন্তু অনেক সময় দূর থেকে ওই শব্দের গুণগুণ ধ্বনি শুনতে ভালোই লাগে। আবার অনেক সুরযুক্ত বা সংগীত গুণসম্পন্ন শব্দের সঙ্গে সুর বর্জিত শব্দও মিশে থাকে। যেমন হাতুড়ি দিয়ে ঘণ্টায় আঘাত করলে সোরগোল ও সংগীত গুণ উভয় প্রকার শব্দের সৃষ্টি হয়। এই দুই ধরনের শব্দের মধ্যে পার্থক্য অনেকটা ব্যক্তিনির্ভর। অবস্থাবিশেষে একই শব্দ একই লোকের কাছে কখনো শ্রুতিমধুর অথবা কখনো শ্রুতিকটু বলে মনে হয়।

আমরা যে অর্থবহ শব্দ শুনি তার বেশির ভাগ অনেকগুলো কম্পাঙ্কের সমন্বয়ে সৃষ্টি। এই কম্পাঙ্কগুলো যদি পরস্পরের সরল গুণিতক হয় তা হলে তাদের দ্বারা সৃষ্ট শব্দ সংগীত গুণসম্পন্ন হবে। আর সম্পর্কবিহীন অনেকগুলো কম্পাঙ্কের সমন্বয়ে সৃষ্ট শব্দ আমাদের কাছে নয়েজ বা গোলমেলে মনে হবে।

৯·১৬·১ সুরযুক্ত শব্দের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of a musical sound

সুরযুক্ত শব্দের তিনটি মৌলিক বৈশিষ্ট্য রয়েছে। যথা—

(ক) শব্দোচ্চতা, (খ) তীক্ষ্ণতা এবং (গ) গুণ বা জাতি

(ক) শব্দোচ্চতা : শব্দোচ্চতা বলতে শব্দ কতটা জোরে বা আস্তে হচ্ছে তা বোঝায়। যদি অতি অল্প সময়ে খুব বেশি পরিমাণ শক্তিসম্পন্ন শব্দ তরঙ্গ আমাদের কানে পৌঁছায় তবে শব্দ খুব জোরে হচ্ছে বলা হয়। এক্ষেত্রে শব্দোচ্চতা

অনেক বেশি। শব্দোচ্চতা তীব্রতা দিয়ে নির্ধারণ করা হয়। তীব্রতা বাড়লে শব্দোচ্চতা বাড়ে। আবার তীব্রতা কমলে শব্দোচ্চতা কমে। সুতরাং বলা যায় **তীব্রতা কারণ এবং শব্দোচ্চতা তার ফল।**

তীব্রতা (Intensity) : **শব্দ বিস্তারের অভিমুখে অভিলম্বভাবে রাখা একক ক্ষেত্রফলের ভেতর দিয়ে প্রতি সেকেন্ডে যে পরিমাণ শব্দশক্তি প্রবাহিত হয় তাকে ওই শব্দের তীব্রতা বলে।** S. I. পদ্ধতিতে তীব্রতার একক ওয়াট মিটার$^{-2}$ (watt metre^{-2})।

শব্দের তীব্রতা একটি পরিমাপযোগ্য ভৌতশক্তি। কিন্তু প্রাবল্য ব্যক্তিনির্ভর। প্রাবল্য হলো অনুভূতি যা সকলের কাছে এক নয়। একই শব্দ একজনের কাছে জোরালো হলেও আরেক জনের ততটা জোরালো নাও হতে পারে। একই তীব্রতার বিভিন্ন কম্পাঙ্কের শব্দ শ্রোতার কাছে বিভিন্ন শব্দোচ্চতার মনে হতে পারে। তাই, শব্দোচ্চতা কম্পাঙ্কের ওপরও নির্ভরশীল।

(খ) **তীক্ষ্ণতা বা পিচ (Pitch) : সুরযুক্ত শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন সুর চড়া ও কোন সুর মোটা বা খাদের তা বোঝায় তাকে তীক্ষ্ণতা বা পিচ বলে।** চড়া সুরের কম্পাঙ্ক বেশি, তাই এর তীক্ষ্ণতাও বেশি। তেমনি মোটা বা খাদের সুরের কম্পাঙ্ক কম, তাই এর তীক্ষ্ণতা কম।

কোনো স্বরের তীক্ষ্ণতা বলতে ওই স্বরের অন্তর্গত মূলসুরের তীক্ষ্ণতা বোঝায়। একটি হারমোনিয়ামের রিডগুলো বাদিক থেকে ডানদিকে টিপে গেলে কম তীক্ষ্ণতাবিশিষ্ট শব্দ থেকে ক্রমশ বেশি তীক্ষ্ণতাবিশিষ্ট শব্দ শোনা যায়। সুতরাং, 'সা' থেকে 'রে' সুরের তীক্ষ্ণতা বেশি, তেমনি 'রে'-এর থেকে 'গা' সুরের তীক্ষ্ণতা বেশি, 'গা' থেকে 'মা' সুরের তীক্ষ্ণতা আরও বেশি ইত্যাদি।

(গ) **গুণ বা জাতি (Quality or timbre) : শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র থেকে নির্গত একই প্রাবল্য ও তীক্ষ্ণতাযুক্ত স্বরগুলোর মধ্যে পার্থক্য করা যায়, তাকে সুরযুক্ত শব্দের গুণ বা জাতি বলে।**

এই বৈশিষ্ট্যের জন্য বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র (যেমন হারমোনিয়াম, সেতার, গিটার, বেহালা, বাঁশি ইত্যাদি) থেকে একই সুর একই তীব্রতার সঙ্গে বাজলেও প্রতিটি যন্ত্রের আওয়াজ আলাদাভাবে চেনা যায়।

সাধারণত বাদ্যযন্ত্র বিভিন্ন সুরের সংমিশ্রণে স্বর গঠিত হয়। এই সুরগুলোর মধ্যে মূলসুরের তীব্রতা সবচেয়ে বেশি থাকে, এর কম্পাঙ্ক দিয়ে স্বরের তীক্ষ্ণতা নির্দিষ্ট হয় এবং স্বরে উপস্থিত উপসুরগুলো দিয়ে স্বরের জাতি নির্ধারিত হয়।

সোরগোলযুক্ত শব্দের বৈশিষ্ট্য

(১) কোলাহল বা সোরগোলযুক্ত শব্দ শ্রুতিকটু ও বিরক্তিকর।

(২) এটি শব্দ উৎসের অনিয়মিত কম্পাঙ্কের ফলে সৃষ্টি হয়।

(৩) কোনো নির্দিষ্ট মূলসুর বা উপসুর থাকে না।

(৪) সুরবর্জিত শব্দের কোনো জাতি থাকে না।

অনুধাবনমূলক কাজ : শব্দ কখন নয়েজ বা গোলমাল মনে হয় ?

আমরা যে অর্থবহ শব্দ শুনি তার বেশির ভাগ অনেকগুলো কম্পাঙ্কের বা অনেকগুলো বাদ্যযন্ত্রের সমন্বয়ে সৃষ্টি। এই কম্পাঙ্কগুলো যদি পরস্পরের সরল গুণিতক হয় তা হলে এদের দ্বারা সৃষ্ট শব্দ আমাদের কাছে সংগীত গুণসম্পন্ন মনে হয়। আর যদি পরস্পরের সাথে সম্পর্কহীন অনেকগুলো কম্পাঙ্কের সমন্বয়ে শব্দ সৃষ্টি হয় তা হলে সে শব্দ আমাদের কাছে নয়েজ বা গোলমাল মনে হয়।

৯·১৭ টানা তারে আড় কম্পনের সূত্রাবলি

Laws of transverse vibration of a stretched string

আমরা জানি আড় তরঙ্গ প্রবাহের ক্ষেত্রে,

$$\boxed{n=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}}=\frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.32)$$

ওপরের সমীকরণগুলো হতে দেখা যাচ্ছে যে, তারের আড় কম্পনের কম্পাঙ্ক n মূলত তারের দৈর্ঘ্য l, টান T এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর m-এর ওপর নির্ভর করে। অতএব টানা তারের আড় কম্পনের **তিনটি** সূত্র পাওয়া যায়। সূত্রগুলো নিম্নে বর্ণিত হলো :

(১) **দৈর্ঘ্যের সূত্র : T ও m স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তার দৈর্ঘ্যের ব্যস্তানুপাতিক।**

কম্পাঙ্ক n এবং দৈর্ঘ্য l হলে, $n \propto \frac{1}{l}$; যখন T ও m স্থির থাকে।

(২) **টানের সূত্র : l ও m স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তার টানের বর্গমূলের সমানুপাতিক।**

কম্পাঙ্ক n এবং টান T হলে, $n \propto \sqrt{T}$; যখন l ও m স্থির থাকে।

(ঙ) ভরের সূত্র : T ও l স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তারের একক দৈর্ঘ্যের ভরের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

কম্পাঙ্ক n এবং তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর m হলে, $n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$; যখন T ও l স্থির থাকে।

উপরিউক্ত সূত্রগুলোকে একত্রে লেখা যায়—

$$n \propto \sqrt{\frac{T}{m}}$$

বা, $$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

কাজ : সেতার বা অনুরূপ অন্যান্য যন্ত্রে বিভিন্ন উপাদান ও প্রস্থচ্ছেদের টান করা তার ব্যবহার করা হয় কেন—ব্যাখ্যা কর।

কম্পনশীল তারের কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$ (এখানে l = তারের দৈর্ঘ্য, T = তারের টান এবং m = তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর।)

এখন বিভিন্ন উপাদান ও প্রস্থচ্ছেদের তারের m-এর মান ভিন্ন ভিন্ন হয়। ফলে তারগুলোর কম্পাঙ্কও ভিন্নতর হয়। তাই একটি যন্ত্রে একসঙ্গে অনেকগুলো কম্পাঙ্কের শব্দ উৎপন্ন করা সম্ভব।

৯·১৮ বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Vibration of air column

মোটামুটি চওড়া চোঙ্গাকৃতি নলে আবন্ধ বায়ু মাধ্যমকে বায়ুস্তম্ভ বলা হয়। এই বায়ুস্তম্ভের কম্পনের ফলে সুরের সৃষ্টি হয়। বাঁশের বাশি, মাউথ অর্গান প্রভৃতি নলাকৃতি বাদ্যযন্ত্রে ফুঁ দিয়ে শ্রুতিমধুর শব্দ উৎপন্ন করা যায়। এটি হতে প্রমাণিত হয় যে, নলের মধ্যে আলোড়ন সৃষ্টি করলে, নলের আবন্ধ বায়ুস্তম্ভ সুর সৃষ্টি করে থাকে। নলের বায়ুস্তম্ভের কম্পনকে কাজে লাগিয়ে যেসব সুরযন্ত্র সৃষ্টি হয়েছে তাদেরকে দুই শ্রেণিতে বিভক্ত করা যায় ; যথা— একমুখ বন্ধ নল ও দুমুখ খোলা নল। সংক্ষেপে একমুখ বন্ধ নলকে 'বন্ধ নল' এবং দুমুখ খোলা নলকে 'খোলা নল' বলে।

৯·১৯ একমুখ বন্ধ (বা বন্ধ) নলে বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Vibration of air column in a pipe closed at one end

এরূপ একটি নলের একমুখ খোলা ও অপর মুখ বন্ধ থাকে। এই নলের খোলা মুখে ফুঁ দিলে (অথবা একটি কম্পনরত সুর শলাকা ধরলে) নলের ভিতরের বায়ুস্তম্ভের মধ্য দিয়ে শব্দ লম্বিক তরঙ্গাকারে বন্ধ মুখের দিকে সঞ্চালিত হবে এবং বন্ধ মুখ হতে (সংকোচন স্পন্দন সংকোচন স্পন্দনরূপে, প্রসারণ স্পন্দন প্রসারণ স্পন্দনরূপেই) প্রতিফলিত হয়ে খোলা মুখের দিকে অগ্রসর হবে। এই প্রতিফলিত তরঙ্গ ফুঁ (বা সুর শলাকা) হতে সৃষ্ট আর একটি তরঙ্গের সাথে সুরের উৎপত্তি হবে। ফুঁ (বা সুর শলাকা)-এর মূল স্পন্দন ও বায়ুস্তম্ভের কম্পনের মধ্যে অনুনাদ হলে বায়ুস্তম্ভ সর্বাপেক্ষা বেশি আলোড়িত হবে এবং সুর জোরালো হবে।

নলের খোলা মুখের বায়ুকণাগুলো মুক্তভাবে নড়াচড়া করতে পারে। এজন্যে খোলা মুখে সর্বদাই একটি সুস্পন্দ বিন্দুর (A) সৃষ্টি হবে [চিত্র ৯·২৮]। পক্ষান্তরে নলের বন্ধ মুখ সংলগ্ন বায়ুকণার বিচলনের সুবিধা খুবই কম হেতু ওই স্থানে একটি নিস্পন্দ বিন্দুর (N) উৎপত্তি হবে। বায়ুস্তম্ভের কম্পনভেদে নলের ভিতর কতগুলো সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ বিন্দুর (A ও N) সৃষ্টি হতে পারে।

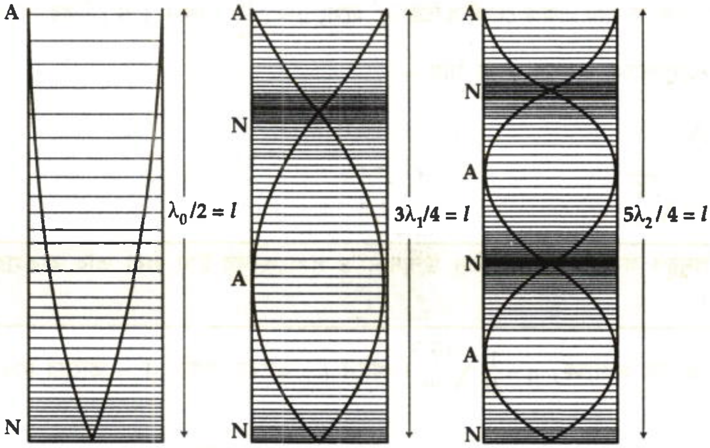
বায়ুস্তম্ভের সহজতর কম্পনে [চিত্র ৯·২৮ (ক)] বা ন্যূনতম কম্পাঙ্কের সুরে শুধুমাত্র বন্ধ মুখে একটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা মুখে একটি সুস্পন্দ বিন্দু উৎপত্তি হবে। কিন্তু পরস্পর সংলগ্ন একটি নিস্পন্দ ও একটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব তরঙ্গদৈর্ঘ্যের এক-চতুর্থাংশের সমান। সুতরাং নলের দৈর্ঘ্য l এবং এই কম্পনে সৃষ্ট শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ_0 ও কম্পাঙ্ক N_0 হলে, $\frac{\lambda_0}{4} = l$

$$\therefore \quad \lambda_0 = 4l \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.33)$$

এবং $$N_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v}{4l} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.34)$$

এখানে, v = শব্দের বেগ ও $v = n\lambda$

নলের এই সুরই **মূল সুর বা প্রথম হারমোনিক**। এই কম্পাঙ্ককে মূল সুরের কম্পাঙ্ক বা প্রথম সমমেলের কম্পাঙ্ক বলে। সমীকরণ (9.34) থেকে স্পষ্ট যে নলের দৈর্ঘ্য যত ছোটো হবে মূল সুরের কম্পাঙ্ক তত বেশি হবে।



চিত্র ৯.২৮

এই নলে পরবর্তী হারমোনিকের সুর উৎপন্নে বা আরও জোরে ফুঁ দিলে নলের বায়ুস্তম্ভে সৃষ্ট লম্বিক তরঙ্গের দৈর্ঘ্য হ্রাস পাবে এবং বায়ুস্তম্ভের কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ চড়া সুর উৎপন্ন হবে। বায়ুস্তম্ভের পরবর্তী উচ্চ কম্পাঙ্কের সুরে বা দ্বিতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ৯.২৮(খ)] খোলা মুখের সুস্পন্দ বিন্দু ও বন্ধ মুখের নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে একটি সুস্পন্দ বিন্দু ও একটি নিস্পন্দ বিন্দু উৎপন্ন হবে। ধরা যাক বায়ুস্তম্ভের এই কম্পনে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $= \lambda_1$ এবং কম্পাঙ্ক N_1।

তা হলে, $\frac{3\lambda_1}{4} = l$

$$\therefore \quad \lambda_1 = \frac{4l}{3} = \frac{\lambda_0}{3} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (9.35)$$

$$\text{এবং} \quad N_1 = \frac{v}{\lambda_1} = 3\left(\frac{v}{4l}\right) = 3N_0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (9.36)$$

এই সুরকে প্রথম উপসুর বলে। এই সুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের তিন গুণ বলে একে তৃতীয় হারমোনিক বলা হয়।

নলের তৃতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ৯.২৮ (গ)] বা পরবর্তী হারমোনিকে বন্ধ প্রান্তের নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা প্রান্তের সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দুটি সুস্পন্দ বিন্দু ও দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর উৎপত্তি হবে। কাজেই এই কম্পনে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $= \lambda_2$ এবং কম্পাঙ্ক $= N_2$ হলে, $\frac{5\lambda_2}{4} = l$

$$\therefore \quad \lambda_2 = \frac{4l}{5} = \frac{\lambda_0}{5} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (9.37)$$

$$\text{এবং} \quad N_2 = \frac{v}{\lambda_2} = 5 \times \frac{v}{4l} = 5N_0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (9.38)$$

এই সুরকে দ্বিতীয় উপসুর বা পঞ্চম হারমোনিক বলে।

উপরের সমীকরণগুলো লক্ষ করে সাধারণভাবে বলা যায় যে, একমুখ বন্ধ নলে যেসব সুর সৃষ্টি হতে পারে তাদের তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda_n = \frac{4l}{(2n+1)} = \frac{\lambda_0}{(2n+1)} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (9.39)$$

$$\text{এবং কম্পাঙ্ক,} \quad N_n = \frac{v}{\lambda_n} = (2n+1)\,\frac{v}{4l} = (2n+1)N_0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (9.40)$$

এখানে, $n = 0, 1, 2, 3$ ইত্যাদি যেকোনো একটি পূর্ণ সংখ্যা।

এই সমীকরণগুলো হতে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায় যে, **একমুখ বন্ধ নলে শুধুমাত্র অযুগ্ম হারমোনিকগুলো উৎপন্ন হতে পারে** অর্থাৎ দ্বিতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ ইত্যাদি হারমোনিকগুলো অনুপস্থিত থাকে। অবশ্য নলের ব্যাসার্ধ r হলে র‍্যালের প্রান্ত সংশোধন অনুসারে একমুখ বন্ধ নলের সুরগুলোর প্রকৃত তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda_n = \frac{4(l + 0{\cdot}6r)}{(2n+1)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.41)$$

এবং কম্পাঙ্ক, $N_n = (2n+1)\dfrac{v}{4(l + 0{\cdot}6r)}$ $\qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9.42)$

যে যে কারণে শব্দের বেগ পরিবর্তিত হবে সেসব কারণে মূল সুর এবং সাথে সাথে উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক পরিবর্তিত হবে। আবার নলের দৈর্ঘ্য যত ছোট হবে মূল সুর এবং সাথে সাথে উপসুরগুলোর কম্পাঙ্কও তত বৃদ্ধি পাবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি খালি বালতিতে পানি ঢালতে শুরু করলে বালতিটি থেকে উৎপন্ন শব্দের তীক্ষ্ণতা (Pitch) পরিবর্তিত হয় কেন ?

বালতিটির একমুখ বন্ধ থাকায় এটি বন্ধ নলের ন্যায় আচরণ করে। এর মূল সুরের কম্পাঙ্ক, $n = \dfrac{v}{4l}$ [v = শব্দের বেগ, l = বন্ধ নলে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য]

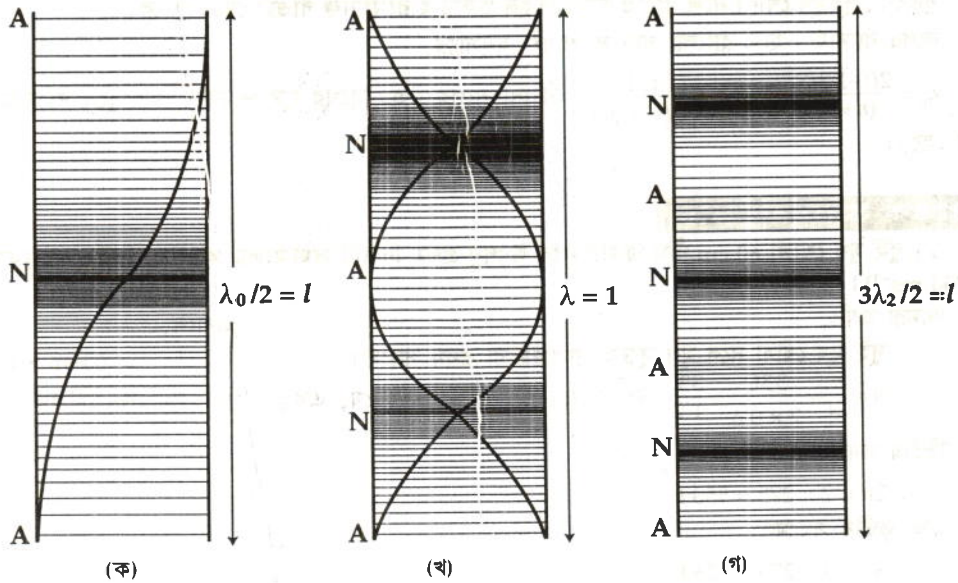
এখন বালতিটিতে পানি ভরা শুরু করলে বন্ধ নলে বায়ু স্তম্ভের দৈর্ঘ্য কমতে শুরু করে। অর্থাৎ মূল সুরের কম্পাঙ্ক পরিবর্তিত হয়। ফলে শব্দের তীক্ষ্ণতাও পরিবর্তিত হয়।

৯·২০ দুই মুখ খোলা (বা খোলা) নলে বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Vibrations of air column in a pipe opened at both ends

এরূপ একটি নলের দুইমুখ খোলা থাকে। এই নলের একমুখে ফুঁ দিলে (অথবা একটি কম্পনরত সুর শলাকা ধরলে) নলের ভিতরের বায়ুস্তম্ভের মধ্য দিয়ে একটি লম্বিক তরঙ্গ নলের অপর প্রান্তের দিকে সঞ্চালিত হবে। নলের ভিতরের বায়ু অপেক্ষা বাইরের বায়ুর বিচলনের সুবিধা বেশি থাকায় মূল তরঙ্গের কিছু অংশ নলের অপর প্রান্ত হতে ফিরে আসবে। ফলে মূল তরংগ ও প্রতিফলিত তরঙ্গ মিলে নলের বায়ুতে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি করবে এবং সুরের উৎপত্তি হবে। বায়ুস্তম্ভের কম্পাঙ্ক ফুঁ-এর (বা সুর শলাকার) কম্পাঙ্কের সমান হলে বায়ুস্তম্ভের কম্পনে অনুনাদ হবে।

নলের দুই মুখ খোলা থাকায় ওই দুই স্থানের বায়ুকণাগুলো সবচাইতে বেশি নড়াচড়া করার সুবিধা পায়। এই কারণে নলের দুই প্রান্তে সর্বদাই দুটি সুস্পন্দ বিন্দু (A , A) সৃষ্টি হবে [চিত্র ৯·২৯]। বায়ুস্তম্ভের কম্পনভেদে নলে এক বা একাধিক নিস্পন্দ বিন্দু (N) সৃষ্টি হতে পারে।

বায়ুস্তম্ভের সহজতম কম্পনে [চিত্র ৯·২৯ (ক)] বা ন্যূনতম কম্পাঙ্কে কম্পনের ক্ষেত্রে নলের দুই মুখের দুটি সুস্পন্দ বিন্দুর (A , A) মাঝে একটি নিস্পন্দ বিন্দু (N) থাকবে। কাজেই নলের দৈর্ঘ্য l হলে এই দৈর্ঘ্য সৃষ্ট শব্দের



চিত্র ৯·২৯

তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান হবে। সৃষ্ট শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ_0 এবং কম্পাঙ্ক N_0 হলে, $\frac{\lambda_0}{2} = l$

$$\therefore \quad \lambda_0 = 2l \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.43)$$

$$\text{এবং } N_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v}{2l} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.44)$$

নলে উৎপন্ন এই সুর মূল সুর বা প্রথম হারমোনিক।

দ্বিতীয় সম্ভাব্য কম্পনে অর্থাৎ ফুঁ পূর্বাপেক্ষা সুবিধামতো জোরালো বা তীক্ষ্ণতাসম্পন্ন হলে মোট তিনটি সুস্পন্দ বিন্দু এবং দুটি নিস্পন্দ বিন্দু দেখা দিবে [চিত্র ৯·২৯ (খ)]। এ স্থলে সৃষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ_1 এবং কম্পাঙ্ক N_1 হলে,

$$\lambda_1 = l = \frac{1}{2}(2l) = \frac{\lambda_0}{2} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.45)$$

$$\text{এবং } N_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{l} = 2\left(\frac{v}{2l}\right) = 2N_0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.46)$$

এই সুর দ্বিতীয় হারমোনিক বা প্রথম উপসুর।

তৃতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ৯·২৯ (গ)] বা পরবর্তী হারমোনিকে নলে মোট চারটি সুস্পন্দ বিন্দু এবং তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকবে। এক্ষেত্রে বায়ুস্তম্ভ হতে নিঃসৃত সুরের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_2 এবং কম্পাঙ্ক N_2 হলে, $3\frac{\lambda_2}{2} = l$

$$\therefore \quad \lambda_2 = \frac{2l}{3} = \frac{\lambda_0}{3} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.47)$$

$$\text{এবং } N_2 = \frac{v}{\lambda_2} = 3\left(\frac{v}{2l}\right) = 3N_0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.48)$$

এই সুর তৃতীয় হারমোনিক বা দ্বিতীয় উপসুর।

সাধারণভাবে উল্লেখ করা যায় যে, দুইমুখ খোলা নলে যেসব সুর উৎপন্ন হতে পারে তাদের তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda_n = \frac{2l}{(n+1)} = \frac{\lambda_0}{(n+1)} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.49)$$

$$\text{এবং কম্পাঙ্ক, } N_n = \frac{v}{\lambda_n} = (n+1)\frac{v}{2l} = (n+1)N_0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (9.50)$$

$n = 0, 1, 2, 3$ ইত্যাদি যেকোনো একটি পূর্ণ সংখ্যা।

সুতরাং, **দুইমুখ খোলা নলে যুগ্ম ও অযুগ্ম সকল প্রকার হারমোনিক পাওয়া যেতে পারে।**

নলের ব্যাসার্ধ r হলে র‍্যালের প্রান্ত সংশোধন অনুসারে,

$\lambda_n = \frac{2(l+1{\cdot}2r)}{(n+1)}$ এবং $N_n = \frac{(n+1)v}{2(l+1{\cdot}2r)}$, কেননা নলের উভয় মুখের সুস্পন্দ বিন্দু খোলামুখে না হয়ে $0{\cdot}6r$ দূরত্ব বাইরে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৮

১। দুই মুখ খোলা 60 cm দীর্ঘ একটি নলে উৎপন্ন প্রথম তিনটি সমমেলের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর (বায়ুতে শব্দের বেগ 330 ms^{-1})।

আমরা জানি,

দুই মুখ খোলা নলে মূল সুরের কম্পাঙ্ক বা প্রথম সমমেল,

$$n = \frac{v}{2l} = \frac{330}{2 \times 0{\cdot}6} = \frac{330}{1{\cdot}2} = 275 \text{ Hz}$$

এখানে,
$l = 60 \text{ cm} = 0{\cdot}6 \text{ m}$
$v = 330 \text{ ms}^{-1}$

দ্বিতীয় সমমেল,

$$2n = 2 \times 275 = 550 \text{ Hz}$$

এবং তৃতীয় সমমেল,

$$3n = 3 \times 275 = 825 \text{ Hz}$$

২। 550 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুর শলাকা একমুখ খোলা নলের বায়ুস্তম্ভের 12·5 cm এবং 42·5 cm দৈর্ঘ্যের সঙ্গে যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদ সৃষ্টি করে। বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। (প্রান্তীয় সংশোধন উপেক্ষা করা যেতে পারে)

আমরা জানি,

একমুখ খোলা নলে প্রথম অনুনাদের বা মূল সুরের জন্য তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda = 4l \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

এবং দ্বিতীয় অনুনাদের জন্য তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\frac{3\lambda}{4} = l_1 \quad \text{বা,} \quad 3\lambda = 4l_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) ও (ii) থেকে পাই,

$$3\lambda - \lambda = 4l_1 - 4l$$

বা, $2\lambda = 4(l_1 - l)$

বা, $\frac{\lambda}{2} = (l_1 - l)$

বা, $\lambda = 2(l_1 - l)$

$\therefore \quad \lambda = 2 \times (42{\cdot}5 - 12{\cdot}5) = 60 \text{ cm} = 0{\cdot}60 \text{ m}$

এখানে,
$l = 12{\cdot}5$ cm
$l_1 = 42{\cdot}5$ cm
$n = 550$ Hz

আবার,

$$v = n\lambda$$

$\therefore \quad v = 550 \times 0{\cdot}6 = 330 \text{ ms}^{-1}$

৩। 1·50 m দীর্ঘ একটি একমুখ বন্ধ অর্গান নল থেকে প্রথম উপসুরটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। (বায়ুতে শব্দের বেগ 330 ms^{-1})

একমুখ বন্ধ অর্গান নলে মূল সুরের ক্ষেত্রে সুস্পন্দ বিন্দু তৈরি হয় খোলা মুখে। এর পরবর্তী নিস্পন্দ বিন্দু তৈরি হয় বন্ধ প্রান্তে।

এখানে,
$l = 1{\cdot}50$ m
$v = 330$ ms^{-1}

শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ হলে, এই দুই বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব,

$$= \frac{\lambda}{4} = l = \text{নলটির দৈর্ঘ্য}$$

$\therefore$ তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda = 4l = 4 \times 1{\cdot}50 \text{ m} = 6{\cdot}0 \text{ m}$

অতএব, মূল সুরের কম্পাঙ্ক, $n_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{330}{6} = 55 \text{ Hz}$

এখন প্রথম উপসুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের তিনগুণ,

অর্থাৎ, $n_1 = 3n_0 = 3 \times 55 = 165 \text{ Hz}$

৪। কোনো একটি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক 400 Hz। এই সুর শলাকার 48 বার কম্পনে যে সময় লাগে, সেই সময়ে শব্দ 40 m দূরত্ব অতিক্রম করে। বায়ুতে শব্দের বেগ ও তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

এখানে, সুর শলাকার কম্পাঙ্ক 400 Hz

অর্থাৎ, 400 কম্পনে সময় লাগে 1 সেকেন্ড

$\therefore$ 48 " " " $\frac{48}{400}$ সেকেন্ড

এখানে,
$n = 400$ Hz
কম্পন সংখ্যা, N = 48
দূরত্ব, $s = 40$ m

এই সময়ে শব্দ 40 m যায়।

সুতরাং বায়ুতে শব্দের বেগ,

$$v = \frac{s}{t} = \frac{40}{\frac{48}{400}} = \frac{40 \times 400}{48} = 333 \text{ ms}^{-1}$$

এবং বায়ুতে তরঙ্গদৈর্ঘ্য,

$$\lambda = \frac{v}{n} = \frac{333}{400} \text{ m} = 0{\cdot}833 \text{ m}$$

৫। 100 cm দৈর্ঘ্যের একটি খাড়া নলকে পানিপূর্ণ করে 512 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুর শলাকা ওই পানিপূর্ণ নলের ওপরের খোলামুখের কাছে ধরা হলো এবং নিচের মুখ দিয়ে পানি ধীরে ধীরে নির্গত হচ্ছে। প্রান্তীয় ত্রুটি উপেক্ষা করে প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদের সময় পানি তলের অবস্থান নির্ণয় কর। বায়ুতে বাতাসের বেগ 330 ms⁻¹।

আমরা জানি, প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদের সময় বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য হয় যথাক্রমে,

$$l_1 = \frac{\lambda}{4} \text{ এবং } l_2 = \frac{3\lambda}{4}$$

এখানে, λ = শব্দের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $= \frac{v}{n} = \frac{330}{512}$ m

এখানে,
$v = 330 \text{ ms}^{-1}$
$n = 512$ Hz
$l = 100$ cm

$$\therefore \quad l_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{330}{4 \times 512} = 0{\cdot}16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$$

এবং $l_2 = \frac{3\lambda}{4} = 3 \times 16 = 48$ cm

সুতরাং, ১ম ও ২য় অনুনাদের সময় পানি তলের উচ্চতা হবে, যথাক্রমে $(100 - 16)$ cm = 84 cm এবং $(100 - 48)$ cm = 52 cm

৬। একটি সুরশলাকা 80 cm দীর্ঘ টান দেওয়া একটি তারের সাথে সমসুর। যদি তারের দৈর্ঘ্য 5 cm কমানো হয় তবে তারের কম্পাঙ্ক 8 Hz বৃদ্ধি পায়। সুর শলাকার কম্পাঙ্ক কত ?

ধরি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক n Hz
সুতরাং, 80 cm তারের কম্পাঙ্কও n হবে।
আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

এখানে,
$l = 80$ cm
$\Delta l = 5$ cm
$\Delta n = 8$ Hz

$$\therefore \quad n = \frac{1}{2 \times 80}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{160}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

তারের দৈর্ঘ্য 5 cm কমলে অর্থাৎ $l = 80 - 5 = 75$ cm হলে সেকেন্ডে 8টি কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পায়,

$$\therefore \quad n + 8 = \frac{1}{2 \times 75}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{150}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{n}{n+8} = \frac{150}{160}$$

বা, $160\,n = 150\,n + 150 \times 8$

বা, $10\,n = 150 \times 8$

$$\therefore \quad n = \frac{150 \times 8}{10} = 120 \text{ Hz}$$

৭। একটি খোলা নলের একমুখ হঠাৎ বন্ধ করা হলো। এতে দেখা গেল যে বন্ধ নলের তৃতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক খোলা নলের মূলসুরের কম্পাঙ্কের চেয়ে 80 Hz বেশি। খোলা নলে মূলসুরের কম্পাঙ্ক কত ?

ধরা যাক নলটির দৈর্ঘ্য, l

আমরা জানি খোলা অবস্থায় মূলসুরের কম্পাঙ্ক, $n_1 = \frac{v}{2l}$

এবং একমুখ বন্ধ অবস্থায় মূলসুরের কম্পাঙ্ক, $n_2 = \frac{v}{4l}$

$\therefore$ বন্ধ অবস্থায় তৃতীয় সমমেলের কম্পাঙ্ক,

$$n_2' = 3n_2 = \frac{3v}{4l}$$

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{3v}{4l} = \frac{v}{2l} + 80$$

বা, $\frac{3}{2} \times \frac{v}{2l} = \frac{v}{2l} + 80$ বা, $\frac{3}{2} n_1 = n_1 + 80$

বা, $\frac{3}{2} n_1 - n_1 = 80$ বা, $n_1 \left(\frac{3}{2} - 1\right) = 80$

বা, $\frac{1}{2} n_1 = 80$ বা, $n_1 = 80 \times 2 = 160$ Hz

৮। একটি খোলা নলের দৈর্ঘ্য 46 cm এবং ব্যাস নির্দিষ্ট। এর মূলসুরের কম্পাঙ্ক 320 Hz। বাতাসে শব্দের বেগ 320 ms^{-1}। নলের একটা মুখ বন্ধ করা হলে মূলসুরের কম্পাঙ্ক কত হবে ?

প্রথম ক্ষেত্রে :

খোলা নলের ক্ষেত্রে মূলসুরের কম্পাঙ্ক,

$$n = \frac{v}{2(l + 1.2r)} = \frac{v}{2(l + 0.6\,D)}$$

$$\therefore \quad 320 = \frac{320 \times 100}{2(46 + 0.6\,D)}$$

বা, $46 + 0.6\,D = 50$

$$\therefore \quad D = \frac{50 - 46}{0.6} = \frac{4}{0.6} = 6.67 \text{ cm}$$

এখানে,
$n = 320$ Hz
$v = 320$ ms^{-1} $= 320 \times 100$ cms^{-1}
$l = 46$ cm
D = ব্যাস

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে :

একমুখ বন্ধ নলের মূলসুরের কম্পাঙ্ক,

$$n_1 = \frac{v}{4(l + 0.6\,r)} = \frac{v}{4(l + 0.3\,D)}$$

$$\therefore \quad n_1 = \frac{320 \times 100}{4(46 + 0.3 \times 6.67)}$$

$$= \frac{320 \times 100}{184 + 1.2 \times 6.67} = \frac{320 \times 100}{184 + 8}$$

$$= \frac{320 \times 100}{192} = 166.67 \text{ Hz}$$

৯। 25 cm ব্যবধানে রক্ষিত দুটি ব্রিজের ওপর তার রেখে তাতে টান প্রয়োগ করে 0.04 cm দৈর্ঘ্য প্রসারণ ঘটানো হলো। তারের উপাদানের ঘনত্ব 1×10^4 kgm^{-3} এবং ইয়ং-এর গুণাঙ্ক 9×10^{10} Nm^{-2} হলে ওই টানে রাখা তারের মূলসুরের কম্পাঙ্ক কত?

ধরা যাক, L দৈর্ঘ্যের তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি l এবং তারটির প্রস্থচ্ছেদ 'a' এবং তারের টান T

সুতরাং, তারের দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{l}{L}$ এবং দৈর্ঘ্য পীড়ন $= \frac{T}{a}$

অতএব, ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = \dfrac{\frac{T}{a}}{\frac{l}{L}} = \frac{TL}{al}$

বা, $T = \frac{Yal}{L}$

এখন তারের উপাদানের ঘনত্ব ρ হলে একক দৈর্ঘ্য তারের ভর,

$$m = a.1.\rho = a\rho$$

আমরা জানি মূলসুরের কম্পাঙ্ক,

$$n = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Yal}{La\rho}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{Yl}{L\rho}}$$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{2 \times 0.25} \times \sqrt{\frac{9 \times 10^{10} \times 4 \times 10^{-4}}{0.25 \times 1 \times 10^4}} = 240 \text{ Hz}$$

এখানে,
L $= 25$ cm $= 0.25$ m
$l = 0.04$ cm $= 4 \times 10^{-4}$ m
Y $= 9 \times 10^{10}$ Nm^{-2}
$\rho = 1 \times 10^4$ kgm^{-3}

অনুধাবনমূলক কাজ : বন্ধ নল থেকে নিঃসৃত শব্দ অপেক্ষা খোলা নল থেকে নিঃসৃত শব্দ বেশি শ্রুতিমধুর কেন? ব্যাখ্যা কর।

কোনো স্বরের জাতি (quality) নির্ভর করে স্বরে উপস্থিত উপসুরের সংখ্যার ওপর। স্বরে উপসুরের সংখ্যা যত বেশি হয় স্বর তত বেশি শ্রুতিমধুর হয়। একমুখ বন্ধ নল থেকে মূলসুর ও তার শুধুমাত্র অযুগ্ম সমমেলগুলো নিঃসৃত হতে পারে। পক্ষান্তরে, দুইমুখ খোলা নল থেকে মূলসুর ও তার যুগ্ম এবং অযুগ্ম উভয় ধরনের সমমেল পাওয়া যায়। অতএব খোলা নল থেকে নিঃসৃত শব্দে উপসুরের সংখ্যা বেশি থাকায় স্বরটি বেশি শ্রুতিমধুর হয়।

৯·২০·১ একটি বন্ধ নল এবং খোলা নলের বায়ুস্তম্ভের কম্পনের তুলনা

Comparison of vibration of air columns in a closed pipe and an open pipe

এখানে বন্ধ নল ও খোলা নলের একই দৈর্ঘ্য বিবেচনা করা হবে।

বন্ধ নল	খোলা নল
১। নলের খোলা মুখে সুস্পন্দ বিন্দু এবং বন্ধ মুখে নিস্পন্দ বিন্দু অবস্থান করে।	১। নলের খোলা মুখ দুটিতে সুস্পন্দ বিন্দু অবস্থান করে।
২। নলে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda_n = \frac{4l}{(2n+1)} = \frac{\lambda_0}{(2n+1)}$, $n = 0, 1, 2, 3$ ...... ইত্যাদি	২। নলে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda_n = \frac{2l}{(n+1)} = \frac{\lambda_0}{(n+1)}$, $n = 0, 1, 2, 3$ ...... ইত্যাদি
৩। মূল সুরের ক্ষেত্রে $n = 0$, $l_0 = 4l$ এবং কম্পাঙ্ক $N_0 = \frac{v}{4l}$	৩। মূল সুরের ক্ষেত্রে $n = 1$, $\lambda_0 = 2l$ এবং কম্পাঙ্ক $N_0 = \frac{v}{2l}$
৪। মূল সুর এবং উপসুরগুলোর অনুপাত $1:3:5:7$ ইত্যাদি। অর্থাৎ শুধুমাত্র অযুগ্ম হারমোনিকগুলিই উপস্থিত থাকে।	৪। মূল সুর এবং উপসুরগুলোর কম্পাঙ্কের অনুপাত, $1:2:3:4$ ইত্যাদি। অর্থাৎ যুগ্ম ও অযুগ্ম সকল প্রকার হারমোনিক উপস্থিত থাকে।
৫। নিঃসৃত সুর খুব বেশি শ্রুতিমধুর নয়।	৫। নিঃসৃত সুর খুব বেশি শ্রুতিমধুর।
৬। সম্ভাব্য তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলো, $\lambda_n = \frac{4l}{(2n+1)} = \frac{\lambda_0}{(2n+1)}$	৬। সম্ভাব্য তরঙ্গদৈর্ঘ্যগুলো, $\lambda_n = \frac{2l}{(n+1)} = \frac{\lambda_0}{(n+1)}$

গাণিতিক উদাহরণ ৯.৯

১। দুটি সুরশলাকাকে একই সময়ে কম্পিত করলে প্রতি সেকেন্ডে ৫টি বীট সৃষ্টি হয়। একটি শলাকা কোনো টানা তারের 1·18 m দৈর্ঘ্যের সাথে এবং অপরটি ওই তারের 1·20 m দৈর্ঘ্যের সাথে ঐক্যতান হয়। সুরশলাকা দুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\therefore \quad n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2 \times 1{\cdot}18}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

এবং $$n_2 = \frac{1}{2 \times 1{\cdot}20}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\therefore \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18}$$

পুন, $n_1 - n_2 = 5$

এখানে,

$l_1 = 1{\cdot}18$ m

$l_2 = 1{\cdot}20$ m

$N = n_1 - n_2 = 5$

$n_1 = ?$

$n_2 = ?$

উভয়পক্ষ n_2 দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{n_1}{n_2} - 1 = \frac{5}{n_2}$$

বা, $\frac{1.20}{1.18} - 1 = \frac{5}{n_2}$

বা, $\frac{1.20 - 1.18}{1.18} = \frac{5}{n_2}$

বা, $n_2 = \frac{5 \times 1.18}{0.02} = 295 \text{ Hz}$

$\therefore \quad n_1 = \frac{1.20}{1.18} \times 295 = 300 \text{ Hz}$

২। একটি টানা তারের ভর 50 g এবং দৈর্ঘ্য 2 m। এর সাথে 5 kg ভরের বস্তু ঝুলালে মূল সুরের কম্পাঙ্ক কত? [BUET Admission Test, 2015-16]

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{\frac{m}{L}}}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2}\sqrt{\frac{5 \times 9.8}{\frac{50 \times 10^{-3}}{2}}}$$

$$= 11.07 \text{ Hz}$$

এখানে,
$m = 50 \text{ g} = 50 \times 10^{-3} \text{ kg}$
$M = 5 \text{ kg}$
$l = 2 \text{ m}$

৩। 15N বলে টানা একটি তারের কম্পাঙ্ক 160 Hz। তারের টান কত হলে কম্পাঙ্ক 400 Hz হবে? [রা. বো. ২০০৮]

আমরা পাই, $n \propto \sqrt{T}$

$\therefore \quad n = \text{ধ্রুব} \times \sqrt{T}$

কাজেই, T_1 ও T_2 টানে কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2 হলে,

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

বা, $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{T_1}{T_2}$

$\therefore \quad T_2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} \times T_1 = \frac{(400)^2}{(160)^2} \times 15 \text{ N}$

$$= 93.75 \text{ N}$$

এখানে,
$T_1 = 15 \text{ N}$
$n_1 = 160 \text{ Hz}$
$n_2 = 400 \text{ Hz}$
$T_2 = ?$

৪। 50 cm দৈর্ঘ্যের একটি টানা তার একটি সুরেলী কাঁটার সাথে ঐক্যতানে আছে। টান চারগুণ করলে ঐক্যতানে আনতে তারটির দৈর্ঘ্য কত করতে হবে? [ব. বো. ২০০৯ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \dots \dots \dots \quad \text{(i)}$$

আবার, $n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}} \quad \dots \dots \dots \quad \text{(ii)}$

এখানে,
$l_1 = 50 \text{ cm}$
$= 0.50 \text{ m}$
$l_2 = ?$

প্রশ্নমতে, $n_1 = n_2$

$\therefore \quad \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}}$

বা, $\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}}$ বা, $\frac{T}{m} = \frac{l_1^2}{l_2^2} \times \frac{4T}{m}$

বা, $1 = \frac{l_1^2}{l_2^2} \times 4$ বা, $\frac{l_2^2}{l_1^2} = 4$

বা, $\frac{l_2}{l_1} = 2$ বা, $l_2 = 2 \times l_1$

$\therefore \quad l_2 = 2 \times 0{\cdot}50\ \text{m} = 1\ \text{m}$

৫। একটি সনোমিটারের তার 200 কম্পাঙ্কযুক্ত একটি টিউনিং ফর্কের সাথে ঐক্যতানে থাকে। তারের টান ঠিক রেখে সনোমিটার তারের দৈর্ঘ্য 1% বৃদ্ধি করলে প্রতি সেকেন্ডে কয়টি বীট শোনা যাবে ?

[চ. বো. ২০১০ (মান ভিন্ন); য. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; সি. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

বা, $\frac{200}{n_2} = \frac{1{\cdot}01 l}{l}$

বা, $\frac{200}{n_2} = 1{\cdot}01$

বা, $n_2 = \frac{200}{1{\cdot}01} = 198\ \text{Hz}$

এখানে,

$n_1 = 200\ \text{Hz}$

$T = T_1 = T_2$

$l_1 = l$

$l_2 = l + 1\% l = l + \frac{l}{100} = l\left(1 + \frac{1}{100}\right)$

$= l\,(1 + 0{\cdot}01) = 1{\cdot}01\, l$

$n_2 = ?$

$n_1 \sim n_2 = ?$

$\therefore$ প্রতি সেকেন্ডে বিটের সংখ্যা $= n_1 - n_2 = 200 - 198 = 2$

৬। একটি সনোমিটারের ওপর দুটি তার বাঁধা আছে। দুটি তারের টানের অনুপাত 8 : 1। তারের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 36 : 35, দুটি তারের ব্যাসের অনুপাত 4 : 1 এবং দুটি তারের পদার্থের ঘনত্ব 1 : 2। দুটি তার একসাথে বাজালে এক সেকেন্ডে কয়টি স্বরকম্প উৎপন্ন হবে? ওই দুটি তার থেকে নির্গত শব্দের মধ্যে যার তীব্রতা বেশি তার কম্পাঙ্ক 360 Hz।

আমরা জানি, টানটান করা তারের মূল সুরের কম্পাঙ্ক,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2 \rho}}$$

তার দুটির মূল সুরের কম্পাঙ্ক n_1 ও n_2 হলে,

এখানে,

$\frac{l_1}{l_2} = \frac{36}{35}$

$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{1}$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{8}{1}$

$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2}$

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{\pi r_1^2 \rho_1}} \text{ এবং } n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{\pi r_2^2 \rho_2}}$$

$$\therefore \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1}\sqrt{\frac{T_1 \times r_2^2 \rho_2}{T_2 \times r_1^2 \rho_1}} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right) \times \left(\frac{r_2}{r_1}\right) \times \sqrt{\left(\frac{T_1}{T_2}\right) \times \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

বা, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{35}{36} \times \frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{8}{1} \times \frac{2}{1}} = \frac{35}{36} \times \frac{1}{4} \times 4 = \frac{35}{36}$

$\therefore \quad n_2 > n_1$। অর্থাৎ n_2-এর তীব্রতা বেশি।

সুতরাং, প্রশ্নানুযায়ী, $n_2 = 360\ \text{Hz}$

$\therefore \quad n_1 = \frac{35}{36} \times 360 = 350\ \text{Hz}$

সুতরাং, তার দুটি একসাথে বাজালে প্রতি সেকেন্ডে উৎপন্ন স্বরকম্পের সংখ্যা $= n_2 - n_1 = 360 - 350 = 10$টি

৭। একই পদার্থের দুটি তারের দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 এবং তাদের ব্যাস সমান। তাদের টানের অনুপাত কত হলে ছোটো তারটির কম্পাঙ্ক বড়ো তারটির কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হবে?

ধরা যাক, তার দুটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $3l$ এবং কম্পাঙ্ক n_1 এবং n_2; টান T_1 এবং T_2।

এখন যেহেতু তার দুটি একই পদার্থের এবং তাদের ব্যাস সমান, সুতরাং তাদের একক দৈর্ঘ্যের ভর m সমান।

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\therefore \quad n_1 = \frac{1}{6l}\sqrt{\frac{T_1}{m}} \text{ এবং } n_2 = \frac{1}{8l}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$$

অতএব, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{8}{6}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{n_1}{n_2} = 2$$

$$\therefore \quad 2 = \frac{8}{6}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

বা, $\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{3}{2}$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{9}{4}$$

সুতরাং, নির্ণেয় টানের অনুপাত $= 9 : 4$

৮। একটি সনোমিটারের তার কোনো একটি বল দ্বারা টানা আছে। যদি টানা বল 4 গুণ বাড়ানো হয় এবং একই সাথে তারের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হয় তবে পূর্বের ও পরের কম্পাঙ্কের অনুপাত কত হবে ?

[দি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০২]

মনে করি কম্পাঙ্ক n_1 ও n_2, টান T_1 ও T_2 এবং দৈর্ঘ্য l_1 ও l_2

তা হলে তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর m হলে,

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

এবং $n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

এখন (i)-কে (ii) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

শর্তানুসারে $l_2 = 2l_1$ এবং $T_2 = 4T_1$

$\therefore$ (iii) হতে পাই, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{2l_1}{l_1}\sqrt{\frac{T_1}{4T_1}}$

বা, $\frac{n_1}{n_2} = 2 \times \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$

বা, $\frac{n_1}{n_2} = 1$

$$\therefore \quad n_1 : n_2 = 1 : 1$$

৯। দুটি একই রকম টানা তার সমকম্পাঙ্কে আড় কম্পনে কম্পিত হচ্ছে। একটি তারের টান 2% বৃদ্ধি করে কম্পিত করলে প্রতি সেকেন্ডে 3টি বিট উৎপন্ন হয়। তার দুটির প্রারম্ভিক কম্পাঙ্ক কত?
[রা. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৯]

মনে করি, তার দুটির প্রারম্ভিক কম্পাঙ্ক n_1 এবং টান বৃদ্ধির পর কমাঙ্ক n_2

প্রশ্নমতে, $n_2 - n_1 = 3$

$n_2 = n_1 + 3$

আমরা জানি,

$$n_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_1}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এবং $n_2 \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T_2}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$

$$\therefore \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2l} \times \frac{2l}{1}\sqrt{\frac{T_2}{m} \times \frac{m}{T_1}}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

প্রশ্নমতে, $T_2 = T_1 + \dfrac{2T_1}{100} = T_1 + \dfrac{T_1}{50} = \dfrac{51\,T_1}{50}$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \frac{51}{50} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

(iii) সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{51}{50}}$$

$$\frac{n_1+3}{n_1} = \sqrt{\frac{51}{50}} \qquad (n_2 \text{ এর মান বসিয়ে পাই})$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{51}{50}}\, n_1 - 3$$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{51}{50}} - 1\right) = 3$$

$$\therefore n_1 = \frac{3}{0{\cdot}009} = 333{\cdot}33 \text{ Hz}$$

এবং $n_2 = n_1 + 3 = 333{\cdot}33 + 3 = 336{\cdot}33$ Hz

১০। দুটি সুর শলাকাকে একই সময়ে কম্পিত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বিট সৃষ্টি করে। একটি শলাকা কোনো টানা তারের 1·18 m দৈর্ঘ্যের সাথে এবং অপরটি ঐ তারের 1·20 m দৈর্ঘ্যের সাথে ঐক্যটানিক হয়। সুর শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।
[কু. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৩]

এখানে,
প্রথম তারের দৈর্ঘ্য, $l_1 = 1{\cdot}18$ m
২য় তারের দৈর্ঘ্য, $l_2 = 1{\cdot}20$ m

আমরা জানি,

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এবং $n_2 = \dfrac{1}{2l_2}\sqrt{\dfrac{T}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(yy)}$

(i) ÷ (ii) $\dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{l_2}{l_1} = \dfrac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18}$

$$n_1 = \frac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18}\, n_2$$

$$\therefore n_1 > n_2$$

আবার আমরা জানি,

$$N = n_1 - n_2 = 5$$

$$\therefore n_1 - n_2 = 5$$

বা, $\dfrac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18} n_2 - n_2 = 5$

বা, $n_2\left(\dfrac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18} - 1\right) = 5$

$\therefore \quad n_2 = \frac{5}{0.0169}$

$\therefore \quad n_2 = 295$ Hz

আবার, $\quad n_1 - n_2 = 5$

$n_1 - 295 = 5$

$\therefore \quad n_1 = 295 + 5 = 300$ Hz

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$v = n\lambda$ ... ... (1)

$T = \frac{1}{n}$ ... ... (2)

$V = -\frac{dy}{dx}$ ... ... (3)

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, একই সুর শলাকার ক্ষেত্রে ... ... (4)

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$, একই মাধ্যমের ক্ষেত্রে ... ... (5)

$y = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t$ ... ... (6)

$y = A \sin (vt - x)$ ... ... (7)

$a = -\left(\frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}\right) y$ ... ... (8)

$s = vt$ ... ... (9)

$s = N\lambda$ ... ... (10)

দশা পার্থক্য, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \times$ পথ পার্থক্য ... ... (11)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = \frac{2\pi N}{t}$ ... ... (12)

$y = y_1 + y_2$ ... ... (13)

$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x)$ ... ... (14)

নিস্পন্দ বিন্দুর শর্ত, $x = 0, \frac{2\lambda}{4}, 4\frac{\lambda}{4} \ldots 2n\frac{\lambda}{4}$ ... ... (15)

সুস্পন্দ বিন্দুর শর্ত, $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ ... ... (16)

মোট শক্তি, $E = 2\pi^2 \rho n^2 a^2$ ... ... (17)

$I = 2\pi^2 n^2 a^2 \rho v$ ... ... (18)

$I = \frac{P}{4\pi r^2}$ ... ... (19)

$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$ ... ... (20)

$\beta_1 - \beta_2 = 10 \log_{10} \left(\frac{I_2}{I}\right) dB$ ... ... (21)

$\Delta P_2 = 10 \log_{10} (P_2 / P_1)\ \alpha B$ ... ... (22)

$N = n_1 \sim n_2$ ... ... (23)

$\frac{n_3}{n_1} = \frac{n_3}{n_2} \times \frac{n_2}{n_1}$ ... ... (24)

$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$ ... ... (25)

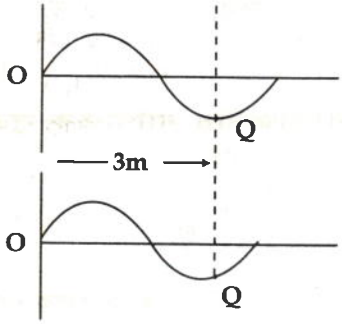
$N_1 = 3N_0$ ... ... (26)

$\lambda_n = \frac{n(l + 0.6r)}{(2n+1)}$ ... ... (27)

$\lambda_n = \frac{2(l + 1.2r)}{(n+1)}$ ... ... (28)

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। কামাল বায়ুতে 400 Hz ও 500 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট দুটি সুরশলাকা হতে সৃষ্ট তরঙ্গদ্বয়ের তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 0·165 m দেখতে পেল। সে পরবর্তীতে পানিতে একই বিন্দু Q থেকে উৎসদ্বয় আলাদাভাবে কম্পিত করল। (পানিতে শব্দের বেগ = 1600 ms^{-1})



(ক) উদ্দীপক অনুসারে বায়ুতে শব্দের বেগ কত?

(খ) Q বিন্দুতে তরঙ্গদ্বয়ের কোনো দশা পার্থক্য থাকবে কী ? উত্তরটি গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) বায়ু মাধ্যমে

$$\lambda_1 \sim \lambda_2 = 0{\cdot}165 \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু $n_2 > n_1$, কাজেই $\lambda_1 > \lambda_2$

$\therefore \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 0{\cdot}165$

বা, $\dfrac{v_a}{n_1} - \dfrac{v_a}{n_2} = 0{\cdot}165$

বা, $\dfrac{v_a}{400} - \dfrac{v_a}{500} = 0{\cdot}165$

বা, $v_a = 0{\cdot}165 \times 2000$

$\therefore \quad v_a = 330 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,
$n_1 = 400$ Hz
$n_2 = 500$ Hz

(খ) Q বিন্দুতে তরঙ্গদ্বয়ের দশা পার্থক্য থাকবে।

আমরা পাই, $\lambda_1' = \dfrac{v'}{n_1} = \dfrac{1600}{400} \quad \therefore \quad \lambda_1' = 4$ m

এবং $\lambda_2' = \dfrac{v'}{n_2} = \dfrac{1600}{500} \quad \therefore \quad \lambda_2' = 3{\cdot}2$ m

এখানে,
পানিতে শব্দের বেগ, v' = 1600 ms^{-1}
১ম তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য = λ_1'
২য় তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য = λ_2'
O থেকে Q এর দূরত্ব, x = 3m

১ম তরঙ্গের জন্য Q বিন্দুর দশা কোণ δ_1 হলে,

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1'} \times x = \frac{2\pi}{4} \times 3 \quad \therefore \quad \delta_1 = \frac{3\pi}{2}$$

২য় তরঙ্গের জন্য Q বিন্দুর দশা কোণ δ_2 হলে,

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2'} \times x = \frac{2\pi}{3{\cdot}2} \times 3 = \frac{6\pi}{3{\cdot}2}$$

$$\text{দশা পার্থক্য} = \delta_1 - \delta_2 = \frac{3\pi}{2} - \frac{6\pi}{3{\cdot}2} = \frac{3{\cdot}2 \times 3\pi - 2 \times 6\pi}{2 \times 3{\cdot}2}$$

$$= \frac{9{\cdot}6\pi - 12\pi}{6{\cdot}4} = -\frac{2{\cdot}4}{6{\cdot}4}\pi$$

২। $Y = 6 \sin\left(8\pi t - \dfrac{\pi x}{25}\right)$ একটি চলমান তরঙ্গের সমীকরণ। যেখানে x ও y-কে সেন্টিমিটারে প্রকাশ করা হয়েছে। তরঙ্গটি 0·09 kgm^{-3} ঘনত্বের মাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত হচ্ছে।

(ক) উদ্দীপকে বর্ণিত তরঙ্গের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) তরঙ্গটি শ্রাব্য কি না—তীব্রতা লেভেল নির্ণয়ের মাধ্যমে প্রমাণ কর। [চ. বো. ২০১৫]

(ক) $Y = 6 \sin\left(8\pi t - \dfrac{\pi x}{25}\right)$

$$Y = 6 \sin\frac{2\pi}{50}(200\,t - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আমরা জানি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ, $Y = A \sin\dfrac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \text{(ii)}$

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$v = 200\ \text{cms}^{-1}$ এবং তরঙ্গদৈর্ঘ্য $\lambda = 50\ \text{cm}$

$\therefore$ কম্পাঙ্ক, $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{200}{50} = 4\ \text{Hz}$

(খ) তরঙ্গের বিস্তার, $A = 6\ \text{cm} = 0{\cdot}06\ \text{m}$

দেওয়া আছে মাধ্যমের ঘনত্ব, $\rho = 0{\cdot}09\ \text{kgm}^{-3}$

তরঙ্গের তীব্রতা, $I = 2\pi^2 n^2 A^2 \rho v = 2 \times 9{\cdot}87 \times (4)^2 \times (0{\cdot}06)^2 \times 0{\cdot}09 \times 2$

$= 0{\cdot}2047\ \text{Wm}^{-2}$

$\therefore$ তীব্রতা লেভেল, $\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}\ dB$

$= 10 \log_{10} \frac{0{\cdot}2047}{10^{-12}}\ dB$

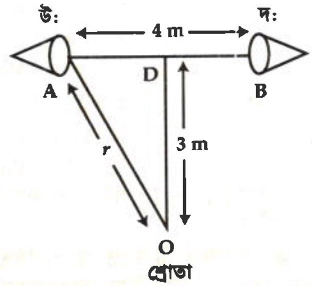
$= 113{\cdot}1\ dB$

$\therefore 113{\cdot}1\ dB < 120\ dB$। তরঙ্গটি শ্রাব্য হতে হলে তীব্রতার লেভেল $120\ dB$-এর মধ্যে থাকতে হবে। কাজেই তরঙ্গটি শ্রাব্য।

৩। একটি থিয়েটার হলে স্টেজের দৈর্ঘ্য 4 m। স্টেজের উত্তর প্রান্তে 1×10^{-3} W ক্ষমতার একটি লাউড স্পিকার স্থাপন করা হলো। স্টেজের ঠিক মধ্যবিন্দু হতে পশ্চিমে 3 m দূরে শ্রোতার নিকট উক্ত তীব্রতা কম হওয়ায় স্টেজের দক্ষিণ প্রান্তে একই ক্ষমতার আর একটি লাউড স্পিকার স্থাপন করা হলো।

(ক) প্রথম স্পিকারের জন্য স্টেজের পশ্চিম পাশে শ্রোতার নিকট শব্দের তীব্রতা কত হবে?

(খ) দুটি স্পিকার একসাথে অন করলে স্টেজের পশ্চিম পাশে দণ্ডায়মান শ্রোতার নিকট শব্দের তীব্রতা প্রথম তীব্রতার দ্বিগুণ হবে কী? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [রা. বো. ২০১৫]



(ক) প্রথম স্পিকারের জন্য পশ্চিম পাশে অর্থাৎ O বিন্দুতে শব্দের তীব্রতা,

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$r = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

$\therefore$ O বিন্দুতে তীব্রতা,

$$I_1 = \frac{1 \times 10^{-3}}{4 \times 3{\cdot}14 \times (\sqrt{13})^2}$$

$= 6{\cdot}12 \times 10^{-6}\ \text{Wm}^{-2}$

(খ) 'ক' থেকে প্রাপ্ত শব্দের তীব্রতা, $I_1 = 6{\cdot}12 \times 10^{-6}\ \text{Wm}^{-2}$

এক্ষেত্রে শব্দের তীব্রতা লেভেল,

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{6{\cdot}12 \times 10^{-6}}{10^{-12}}\ dB = 67{\cdot}87\ dB$$

যেহেতু দক্ষিণ পাশে B বিন্দুতে স্থাপিত স্পিকারের তীব্রতা সমান কাজেই, $I_2 = 6{\cdot}12 \times 10^{-6}\ \text{Wm}^{-2}$

মোট তীব্রতা, $I = I_1 + I_2 = 2 \times 6{\cdot}12 \times 10^{-6}\ \text{Wm}^{-2} = 12{\cdot}24 \times 10^{-6}\ \text{Wm}^{-2}$

এখন উভয় স্পিকারের জন্য তীব্রতা লেভেল, $\beta_1 = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$

$= 10 \log_{10} \frac{12{\cdot}24 \times 10^{-6}}{10^{-12}}\ dB$

$= 70{\cdot}88\ dB$

পূর্বের তীব্রতা লেভেলের দ্বিগুণ, $\beta_2 = 67{\cdot}87\ dB \times 2 = 135{\cdot}72\ dB$

এখানে, $\beta_1 \neq \beta_2$

তাই দুটি স্পিকার একসাথে অন করলে শ্রোতার নিকট তীব্রতা লেভেল পূর্বাপেক্ষা দ্বিগুণ হবে না।

৪। সালাম 300 Hz কম্পাঙ্ক ও 0·25 cm বিস্তারের শব্দ তরঙ্গ পরপর বায়ু ও পানিতে প্রেরণ করে তরঙ্গাদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 4·16 m পেল। উভয় মাধ্যমে শব্দের বেগ ও তীব্রতা ভিন্ন ভিন্ন পাওয়া গেল। সালাম বলল শব্দের বেগ ও তীব্রতার মান বায়ু মাধ্যম থেকে পানি মাধ্যমে বেশি পাওয়া যাবে। বায়ু মাধ্যমে শব্দের বেগ 352 ms⁻¹। বায়ু ও পানির ঘনত্ব যথাক্রমে 1·293 kg m⁻³ ও 1000 kg ms⁻³।

(ক) উদ্দীপক অনুসারে পানিতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

(খ) গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সালামের বক্তব্যের সঠিকতা যাচাই কর। [সি. বো. ২০১৫]

(ক) ধরি পানি মাধ্যমে শব্দের বেগ, v_w

উদ্দীপক থেকে পাই শব্দের কম্পাঙ্ক, $n = 300$ Hz

বায়ু মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v_a = 352 \text{ ms}^{-1}$

বায়ু মাধ্যমে শব্দের তরঙ্গাদৈর্ঘ্য $= \lambda_a$

পানি মাধ্যমে শব্দের তরঙ্গাদৈর্ঘ্য $= \lambda_w$

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে,

$$\lambda_w - \lambda_a = 4{\cdot}16 \text{ m}$$

বা, $\frac{v_w}{n} - \frac{v_a}{n} = 4{\cdot}16$

বা, $\frac{1}{n}(v_w - v_a) = 4{\cdot}16$

বা, $v_w - v_a = 4{\cdot}16 \times n$

বা, $v_w = v_a + 4{\cdot}16 \times n = 352 + 4{\cdot}16 \times 300 = 1600 \text{ ms}^{-1}$

(খ) এখানে বায়ু মধ্যেমে শব্দের বেগ, $v_a = 352 \text{ ms}^{-1}$

পানি মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v_w = 1600 \text{ ms}^{-1}$; এখানে $v_w > v_a$

আবার বায়ুর ঘনত্ব, $\rho_a = 1{\cdot}293 \text{ kg m}^{-3}$, পানির ঘনত্ব, $\rho_w = 1000 \text{ kg m}^{-3}$

শব্দের বিস্তার, $a = 0{\cdot}25 \text{ cm} = 2{\cdot}5 \times 10^{-3}$ m, শব্দের কম্পাঙ্ক, $n = 300$ Hz

এখন পানি ও বায়ু মাধ্যমে শব্দের তীব্রতা যথাক্রমে, I_w ও I_a হলে,

$$\begin{aligned} I_w &= 2\pi^2 n^2 a^2 v_w \rho_w \\ &= 2 \times (3{\cdot}14)^2 \times (300)^2 \times (2{\cdot}5 \times 10^{-3})^2 \times 1600 \times 1000 \\ &= 17{\cdot}76 \times 10^6 \text{ Wm}^{-2} \end{aligned}$$

এবং
$$\begin{aligned} I_a &= 2\pi^2 n^2 a^2 v_a \rho_a \\ &= 2 \times (3{\cdot}14)^2 \times (300)^2 \times (2{\cdot}5 \times 10^{-3})^2 \times 352 \times 1{\cdot}293 \\ &= 5{\cdot}05 \times 10^3 \text{ Wm}^{-2} \end{aligned}$$

এখানে $I_w > I_a$, অর্থাৎ শব্দের বেগ ও তীব্রতার মান বায়ু মাধ্যম থেকে পানি মাধ্যমে বেশি। এক্ষেত্রে সালামের বক্তব্য সঠিক।

৫। নাফিস টিভিতে T-20 বিশ্বকাপের বাংলাদেশ বনাম ভারত খেলাটি দেখছিল। তখন টিভির শব্দের তীব্রতা 1×10^{-6} Wm⁻²। টান টান উত্তেজনার মুহূর্তে মিতু ব্লেন্ডার মেশিনে চালু করল যার তীব্রতা লেভেল 85 *dB* এবং নাফিস টিভির সাউন্ড বাড়িয়ে দিল যার তীব্রতা লেভেল 78 *dB*।

(ক) নাফিস তীব্রতা লেভেল কতটুকু বাড়িয়েছিল ?

(খ) উদ্দীপকের ব্লেন্ডার চালু অবস্থায় সম্মিলিত তীব্রতা লেভেল অস্বস্তিকর হবে কি না—তা গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০১৬; ব. বো. ২০১৬]

এখানে,

টিভির শব্দের প্রাথমিক তীব্রতা,

$I = 1 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}$

প্রমাণ তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$

টিভির শব্দের প্রাথমিক তীব্রতা লেভল, $\beta_1 = ?$

ব্লেন্ডারের তীব্রতা লেভল, $\beta_2 = 85\, dB$

টিভির চূড়ান্ত তীব্রতা লেভল, $\beta_3 = 78\, dB$

টিভির তীব্রতা লেভল বৃদ্ধি, $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = ?$

সম্মিলিত তীব্রতা লেভল, $\beta = ?$

(ক) আমরা জানি, $\beta_1 = 10 \log \frac{I}{I_0}\, dB$

$$= 10 \log \frac{1 \times 10^{-6}}{10^{-12}} = 60\, dB$$

$$\Delta\beta = \beta_3 - \beta_1 = 78 - 60 = 18\, dB$$

(খ) আবার, $\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0}\, dB$

বা, $85 = 10 \log \frac{I_2}{I_0}\, dB$

$\therefore \log \frac{I_2}{I_0} = 8{\cdot}5$

বা, $\frac{I_2}{I_0} = 10^{8{\cdot}5}$

বা, $I_2 = 10^{8{\cdot}5} \times I_2 = 10^{8{\cdot}5} \times 10^{-12} = 3{\cdot}2 \times 10^{-4} \text{ Wm}^{-2}$

অনুরূপভাবে,

$$\beta_3 = 10 \log \frac{I_3}{I_0}\ dB$$

বা, $78 = 10 \log \frac{I_3}{I_0}\ dB$

$\therefore \log \frac{I_2}{I_0} = 7{\cdot}8$

বা, $\frac{I_2}{I_0} = 10^{7{\cdot}8}$

বা, $I_3 = 10^{7{\cdot}8} \times I_0 = 10^{7{\cdot}8} \times 10^{-12} = 6{\cdot}3 \times 10^{-5}\ Wm^{-2}$

উৎসদ্বয়ের মোট তীব্রতা, $I = I_2 + I_3 = 3{\cdot}2 \times 10^{-4} + 6{\cdot}3 \times 10^{-5} = 3{\cdot}8 \times 10^{-4}\ Wm^{-2}$

উৎসদ্বয়ের সম্মিলিত তীব্রতা লেভেল, $\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}\ dB = 10 \log \frac{3{\cdot}8 \times 10^{-4}}{10^{-12}} = 86\ dB$

$\therefore$ 50 dB থেকে 60 dB পর্যন্ত তীব্রতা লেভেলের শব্দ স্বস্তিদায়ক। কিন্তু উৎসদ্বয়ের সম্মিলিত শব্দের তীব্রতা লেভেল 86 dB হওয়ায়, তা অস্বস্তিকর হবে।

৬। বায়ু মাধ্যমে C সুরশলাকাটি A ও B দুটি সুরশলাকার সাথে 5টি করে বীট উৎপন্ন করে। A সুরশলাকার কম্পাঙ্ক 385 Hz। B সুরশলাকা হতে বায়ু মাধ্যমে নির্গত তরঙ্গের সমীকরণ হলো : $y = 0{\cdot}9 \sin 10\pi \left(\frac{30t}{0{\cdot}4} - \frac{x}{4{\cdot}8}\right)$

(ক) B সুরশলাকা হতে নির্গত তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) C সুরশলাকার কম্পাঙ্ক কীভাবে নিশ্চিত হওয়া যায় তা গাণিতিক যুক্তিসহ ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) দেওয়া আছে B সুরশলাকা থেকে বায়ু মাধ্যমে নির্গত তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = 0{\cdot}9 \sin 10\pi \left(\frac{30t}{0{\cdot}4} - \frac{x}{4{\cdot}8}\right) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

আমরা জানি অগ্রগামী তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$$\frac{10\pi}{4{\cdot}8} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\therefore \lambda = \frac{4{\cdot}8}{5} = 0{\cdot}96\ m$

(খ) উদ্দীপক হতে পাই, B সুরশলাকা হতে বায়ু মাধ্যমে নির্গত তরঙ্গের সমীকরণ,

$y = 0{\cdot}9 \sin 10\pi \left(\frac{30t}{0{\cdot}4} - \frac{x}{4{\cdot}8}\right)$ এবং

অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ তুলনা করে পাই,

$$\frac{2\pi}{\lambda} v = \frac{300\,\pi}{0{\cdot}4}$$

বা, $\frac{v}{\lambda} = \frac{150}{0{\cdot}4}$ বা, $n = \frac{150}{0{\cdot}4}$ $\left[\because \frac{v}{\lambda} = n\right]$

$\therefore n = 375\ Hz$

মনে করি A সুরশলাকার কম্পাঙ্ক, $n_A = 385\ Hz$

C সুরশলাকাটি A এর সাথে 5টি বীট সৃষ্টি করে; সুতরাং C-এর সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক,

$n_C = n_A \pm 5 = 385 \pm 5 = 390\ Hz$ বা $380\ Hz$

আবার C সুরশলাকাটি B-এর সাথে 5টি বীট সৃষ্টি করে; সুতরাং C-এর সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক,

$n_C = n_B \pm 5 = 375 \pm 5 = 380$ Hz বা 370 Hz

∴ C সুরশলাকাটির কম্পাঙ্ক কেবল 380 Hz হলেই A ও B উভয়ের সাথে 5টি বীট উৎপন্ন করে।

∴ $n_C = 380$ Hz

৭। একটি সনোমিটারে সদৃশ ও সমদৈর্ঘ্যের তিনটি তার A, B, C-এ যথাক্রমে 200, 225, 250 N বল ঝুলিয়ে টানটান করা হলো। A তারটিকে শব্দায়িত করায় 100 Hz কম্পাঙ্কের শব্দ উৎপন্ন করে। দুটি করে তার একসাথে শব্দায়িত করলে বীট উৎপন্ন হয় কি না—পরীক্ষা করা হলো।

(ক) উদ্দীপকের দ্বিতীয় তারটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) বীট উৎপন্নের পরীক্ষার ফলাফল গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক আলোচনা কর। [চ. বো. ২০১৭]

(ক) যেহেতু তারদ্বয় সদৃশ ও সমদৈর্ঘ্যের সেহেতু টানা তারের সূত্রানুসারে,

$$\frac{n_B}{n_A} = \sqrt{\frac{T_B}{T_A}}$$

বা, $n_B = n_A \sqrt{\frac{T_B}{T_A}} = 100 \times \sqrt{\frac{225}{200}} = 106{\cdot}06$ Hz বা 106 Hz

অতএব দ্বিতীয় তারটির কম্পাঙ্ক, 106 Hz

এখানে,
A তারের টান, $T_A = 200$ N
B তারের টান, $T_B = 225$ N
A তারের কম্পাঙ্ক, $n_A = 100$ Hz
B তারের কম্পাঙ্ক, $n_B = ?$

(খ) আমরা জানি টানা তারের সূত্রানুসারে,

$$\frac{n_C}{n_A} = \sqrt{\frac{T_C}{T_A}}$$

∴ $n_C = n_A \sqrt{\frac{T_C}{T_A}} = 100 \times \sqrt{\frac{250}{200}} = 111{\cdot}80$ Hz

এখানে,
A তারের টান, $T_A = 200$ N
C তারের টান, $T_C = 250$ N
A তারের কম্পাঙ্ক, $n_A = 100$ Hz
আমরা (ক) হতে পাই,
B তারের কম্পাঙ্ক, $n_B = 106$ Hz
C তারের কম্পাঙ্ক, $n_C = ?$

A ও B তার একসাথে শব্দায়িত করলে উৎপন্ন বীট,

$N_1 = n_B - n_A = 106 - 100 = 6\ s^{-1}$

A ও C তার একসাথে শব্দায়িত করলে উৎপন্ন বীট,

$N_2 = n_C - n_A = 111{\cdot}80 - 100 = 11{\cdot}80\ s^{-1}$

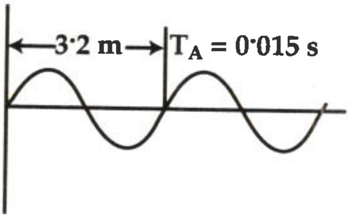
B ও C তার একসাথে শব্দায়িত করলে উৎপন্ন বীট,

$N_3 = n_C - n_B = 111{\cdot}80 - 106 = 5{\cdot}8\ s^{-1}$

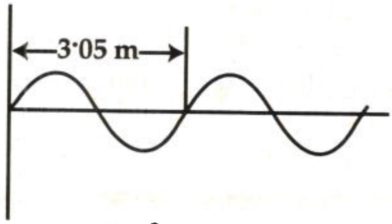
গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায়, $N_1 < 10$, $N_2 > 10$ এবং $N_3 < 10$

আমরা জানি, মানব কর্ণ প্রতি সেকেন্ডে 10টির বেশি বীট শনাক্ত করতে পারে না। তাই A ও B তার এবং B ও C তার একসাথে শব্দায়িত করলে বীট শোনা যাবে। কিন্তু A ও C তার একসাথে শব্দায়িত করলে কোনো বীট শোনা যাবে না।

৮। নিচের চিত্রে কোনো এক পরীক্ষাগারে দুটি সুর শলাকা A ও B-কে শব্দায়িত করলে যে তরঙ্গ উৎপন্ন হয় তার লেখচিত্র দেখানো হলো :



A শলাকা নিঃসৃত তরঙ্গ।



B শলাকা নিঃসৃত তরঙ্গ।

(ক) পরীক্ষাগারে A-শলাকার দ্বারা সৃষ্ট শব্দের বেগ কত নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের সুর শলাকা দুটি একত্রে বাজালে বীট উৎপন্ন করবে কি না—তা গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৯; ব. বো. ২০১৯ (মান ভিন্ন)]

(ক) আমরা জানি বেগ,

$$v = n\lambda = \frac{\lambda_1}{T_A} \quad \left[\because n = \frac{1}{T}\right]$$

$$\therefore \quad v = \frac{3.2}{0.015} = 213\ \mathrm{ms^{-1}}$$

এখানে,
$\lambda_1 = 3.2$ m
$T_A = 0.015$ s

সুতরাং, A-শলাকার দ্বারা সৃষ্ট শব্দের বেগ $213\ \mathrm{ms^{-1}}$

(খ) যেহেতু পরীক্ষাগারের মাধ্যম একই, সুতরাং A ও B নিঃসৃত শব্দ একই বেগে চলবে।

শলাকা B নিঃসৃত তরঙ্গের কম্পাঙ্ক,

$$n_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{213}{3.05} = 69.8\ \mathrm{Hz}$$

এবং শলাকা A নিঃসৃত তরঙ্গের কম্পাঙ্ক,

$$n_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{213}{3.2} = 66.6\ \mathrm{Hz}$$

এখন, $n_2 - n_1 = 69.8 - 66.6 = 3.2$ যা 10-এর চেয়ে কম। সুতরাং সুর শলাকা দুটি একত্রে বাজালে বীট উৎপন্ন হবে।

৯। A, B, C এবং D চারটি সুর শলাকা দেয়া আছে যার মধ্যে A শলাকাটি $1.3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$ ঘনত্বের মাধ্যমে 0.5 m বিস্তারের শব্দ তরঙ্গ সৃষ্টি করে। শলাকাটির কম্পাঙ্ক 250Hz এবং মাধ্যমে শব্দের বেগ $345\ \mathrm{ms^{-1}}$। A শলাকাটি B এবং D-এর সাথে যথাক্রমে প্রতি সেকেন্ডে 2টি এবং 6টি বীট উৎপন্ন করে এবং B ও D পরস্পরের সাথে প্রতি সেকেন্ডে 4টি বীট উৎপন্ন করে এবং B ও D C-এর সাথে একটি বীট উৎপন্ন করে।

(ক) A সুর শলাকার সৃষ্ট শব্দের তীব্রতা নির্ণয় কর।

(খ) "বীট গণনা করে অজানা সুর শলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয় করা সম্ভব"— C সুর শলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয় করে উক্তিটির যথার্থতা বিশ্লেষণ কর। [য. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি,

A সুর শরাকায় সৃষ্ট শব্দ তরঙ্গের তীব্রতা,

$$I = 2\pi^2 n_A^2 a^2 \rho v$$
$$= 2 \times (3.14)^2 \times (250)^2 \times (0.5)^2 \times 1.3 \times 345$$
$$= 1.382 \times 10^8\ \mathrm{Wm^{-2}}$$

এখানে,
উদ্দীপকের মাধ্যমে শব্দের বেগ,
$v = 345\ \mathrm{ms^{-1}}$
A শলাকার কম্পাঙ্ক, $n_A = 250$ Hz
মাধ্যমের ঘনত্ব, $\rho = 1.3\ \mathrm{kgm^{-3}}$
শব্দ তরঙ্গের বিস্তার, $a = 0.5$ m

(খ) যেহেতু A শলাকাটি B ও D-এর সাথে যথাক্রমে প্রতি সেকেন্ডে 2টি ও 6টি বীট উৎপন্ন করে।

সুতরাং B শলাকার কম্পাঙ্ক হবে,

$$n_B = n_A \pm N = 250 \pm 2$$
$$= 252\ \mathrm{Hz}\ \text{অথবা}\ 248\ \mathrm{Hz}$$

D শলাকার কম্পাঙ্ক হবে,

$$n_D = n_A \pm N = 250 \pm 6$$
$$= 256\ \mathrm{Hz}\ \text{অথবা}\ 244\ \mathrm{Hz}$$

সুতরাং B-এর কম্পাঙ্ক 252 Hz হলে D-এর কম্পাঙ্ক হবে 256 Hz এবং B এর কম্পাঙ্ক 248 Hz হলে D-এর কম্পাঙ্ক হবে 244 Hz। আবার যেহেতু B ও D C-এর সাথে প্রতি সেকেন্ডে সমান সংখ্যক বীট উৎপন্ন করে,

সুতরাং C-এর কম্পাঙ্ক হবে,

$$n_C = \frac{n_B + n_D}{2}$$
$$= \frac{252 + 256}{2}\ \text{বা}\ \frac{248 + 244}{2}$$
$$= 254\ \mathrm{Hz}\ \text{বা}\ 246\ \mathrm{Hz}$$

সুতরাং উদ্দীপকের তথ্যানুযায়ী প্রাপ্ত চূড়ান্ত ফলাফল থেকে দেখা যাচ্ছে যে, C শলাকাটির সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক দুটি। কিন্তু একটি সুর শলাকার দুটি কম্পাঙ্ক থাকতে পারে না। কাজেই উদ্দীপকের তথ্য অনুযায়ী প্রশ্নোক্ত উক্তিটি যথার্থ নয়। উল্লেখ যে, B ও D শলাকার কম্পাঙ্ক সঠিকভাবে নির্ণয় করা সম্ভব হলে C এর একটি কম্পাঙ্ক পাওয়া যেত। কিন্তু উদ্দীপকে পর্যাপ্ত তথ্য না থাকায় সেটা সম্ভব হচ্ছে না।

১০। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ নিম্নরূপ যা পরবর্তীতে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি করে।

$$\mathbf{Y = 0{\cdot}5 \sin\left(800\,\pi t - \frac{2\pi}{0{\cdot}5}x\right)}$$

(ক) অগ্রগামী তরঙ্গটির তরঙ্গবেগ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে যে স্থির তরঙ্গটি সৃষ্টি হবে তার কম্পাঙ্ক এবং মূল তরঙ্গটির কম্পাঙ্কের তুলনামূলক বিশ্লেষণ গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০১৭]

(ক) অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$Y = 0{\cdot}5 \sin\left(800\,\pi t - \frac{2\pi}{0{\cdot}5}x\right)$$

এখানে,

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{\cdot}5}$$

বা, $\lambda = 0{\cdot}5$

আবার, $2\,\pi n = 800\,\pi$

বা, $n = 400$ Hz

$\therefore$ বেগ, $v = n\lambda = 400 \times 0{\cdot}5 = 200$ একক

(খ) অপর তরঙ্গটি, $Y' = 0{\cdot}5 \sin\left(800\,\pi t + \dfrac{2\pi}{0{\cdot}5}x\right)$

Y_1 লব্ধি তরঙ্গ হলে,

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y + Y' \\ &= 0{\cdot}5 \sin\left(800\,\pi t - \frac{2\pi}{0{\cdot}5}x\right) + 0{\cdot}5 \sin\left(800\,\pi t + \frac{2\pi}{0{\cdot}5}x\right) \\ &= 0{\cdot}5 \times 2 \sin 800\,\pi t \cos\frac{2\pi}{0{\cdot}5}x \\ &= 1 \sin 800\,\pi t \,.\, \cos\frac{2\pi}{0{\cdot}5}x \end{aligned}$$

লব্ধি তরঙ্গের কম্পাঙ্ক n_1 হলে,

$2\,\pi n_1 = 800\,\pi$

বা, $n_1 = 400$ Hz যা মূল তরঙ্গের কম্পাঙ্কের সমান।

১১। $y = 0{\cdot}5 \sin 2\pi(50t - 0{\cdot}75x)$ একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ।

(ক) তরঙ্গটি 6 সে. এ কত দূরত্ব অতিক্রম করে?

(খ) যদি এরূপ আর একটি তরঙ্গ বিপরীত দিক হতে পরস্পরের ওপর আপতিত হয় তবে সৃষ্ট তরঙ্গটি কীরূপ হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) প্রদত্ত অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} y &= 0{\cdot}5 \sin 2\pi(50t - 0{\cdot}75\,x) \\ &= 0{\cdot}5 \sin(100\,\pi t - 1{\cdot}5\,\pi x) \end{aligned}$$

এখানে, $\dfrac{2\pi}{\lambda} = 1{\cdot}5\,\pi$

বা, $\lambda = 1{\cdot}33$ একক

এবং $2\,\pi n = 100\,\pi$

বা, $n = 50$ Hz

$\therefore$ বেগ, $v = n\lambda = 50 \times 1{\cdot}33 = 66{\cdot}5$ একক

6s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $x = vt = 66{\cdot}5 \times 6 = 399$ একক

(খ) ধরি তরঙ্গ দুটি,

$y_1 = 0\text{·}5 \sin(100\pi t - 1\text{·}5\pi x)$

$y_2 = 0\text{·}5 \sin(100\pi t + 1\text{·}5\pi x)$

তা হলে,

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= 0\text{·}5 \sin(100\pi t - 1\text{·}5\pi x) + 0\text{·}5 \sin(100\pi t + 1\text{·}5\pi x) \\ &= 0\text{·}5 \times 2 \sin 100\pi t \,.\, \cos(1\text{·}5\pi x) \\ &= \cos(1\text{·}5\pi x) \sin 100\pi t \\ &= A \sin 100\pi t \end{aligned}$$

; যা একটি স্থির তরঙ্গ

কারণ এখানে $(vt - x)$ জাতীয় রাশি নাই।

লব্ধি তরঙ্গের বিস্তার, $A = \cos(1\text{·}5\pi x)$

১২। 16 m দীর্ঘ টানা তারে আড় কম্পন সৃষ্টি করতে পর্যাবৃত্ত বল প্রয়োগ করা হলে সৃষ্ট অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হবে—

$$y = 2 \sin \pi \left(30t - \frac{x}{4}\right)$$ **; সকল রাশি S. I. এককে প্রকাশিত।**

(ক) টানা তারে যে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি হবে তার কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত তারটিতে আন্দোলনের ফলে জোড় সংখ্যক লুপ সৃষ্টি হবে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [ব. বো. ২০১৭]

(ক) টানা তারে যে স্থির তরঙ্গের সৃষ্টি হবে তা—

$y = y_1 + y_2$

এখানে,

$$y_1 = 2 \sin \pi \left(30\,t - \frac{x}{4}\right)$$

এবং $$y_2 = 2 \sin \pi \left(30\,t + \frac{x}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad y &= 2 \sin \pi \left(30\,t - \frac{x}{4}\right) + 2 \sin \pi \left(30\,t + \frac{x}{4}\right) \\ &= 2 \times 2 \sin(30\pi t) \,.\, \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ &= 4 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) . \sin(30\pi t) \\ &= A \sin(30\pi t) \end{aligned}$$

আমরা জানি,

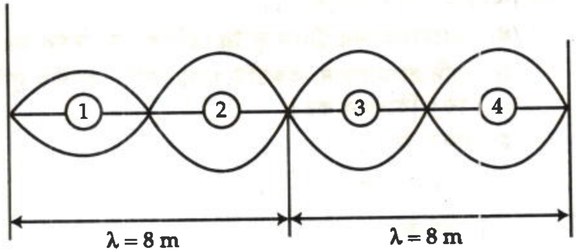
$2\pi n = \omega = 30\pi$

$\therefore \quad n = 15\text{ Hz}$

(খ) আমরা জানি,

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore \quad \lambda = 8\text{m}$



λ দৈর্ঘ্যে দুটি লুপ সৃষ্টি হয়।

অর্থাৎ 8 m দৈর্ঘ্যে 2টি লুপ তৈরি হয়।

$\therefore$ 16 m দৈর্ঘ্যে সৃষ্টি হবে $2 \times 2 = 4$টি লুপ।

সুতরাং জোড় সংখ্যক লুপ তৈরি হবে।

১৩। পদার্থবিজ্ঞানের শিক্ষার্থী লিয়ানা দুটি সুরশলাকা নিয়ে দেখল যে, একটির গায়ে 312 Hz লেখা আছে। সে শলাকা দুটি একত্রে শব্দায়িত করে প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট শুনতে পেল। এবার সে অজানা সুরশলাকার গায়ে তার পেঁচিয়ে একইভাবে শব্দায়িত করে প্রতি সেকেন্ডে একই সংখ্যক বীট শুনতে পেল। এখানে অজানা সুরশলাকা থেকে সৃষ্ট শব্দের বেগ $340\ ms^{-1}$।

(ক) কতটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করে জানা কম্পাঙ্কের সুরশলাকার সৃষ্ট শব্দ 130m দূরত্ব অতিক্রম করবে?

(খ) লিয়ানা ভর বাড়ানোর পূর্বে ও পরে নির্ণীত অজানা কম্পাঙ্কের মধ্যে কোনো পার্থক্য পেয়েছিল কি না— গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও। [সি. বো. ২০১৭]

(ক) ধরি, সুরশলাকা A ও B যাদের কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্য যথাক্রমে n_A ও n_B এবং λ_A ও λ_B।
n_A জানা কম্পাঙ্ক ও n_B অজানা কম্পাঙ্ক।

আমরা জানি,

$$v_A = n_A\lambda_A$$

$$\therefore \lambda_A = \frac{v_A}{n_A} = \frac{340}{312} = 1{\cdot}09\ m$$

এখানে,
$v_A = 340\ ms^{-1}$
$n_A = 312\ Hz$
$\lambda_A = ?$

$1{\cdot}09$ m যেতে পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন হয় 1টি

$\therefore$ 130 m যেতে পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন হয় $= \frac{130}{1{\cdot}09}$ টি = 119টি

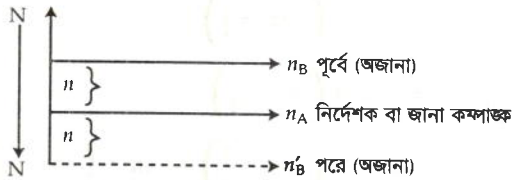
(খ) আমরা জানি, ভর বৃদ্ধি পেলে কম্পাঙ্ক কমে যায় ফলে বীটের সংখ্যাও কমে যায় যদি অজানা কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক হতে বেশি থাকে।

এখন, অজানা কম্পাঙ্কের সুরশলাকার বাহুতে ভর বৃদ্ধি করা হলো এবং বীটের সংখ্যা একই পাওয়া গেল। এর কারণ ভর বৃদ্ধির ফলে অজানা কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক হতে কমতে থাকে এবং বীটের সংখ্যাও কমতে থাকে।

[বীট N = অজানা কম্পাঙ্ক — জানা কম্পাঙ্ক]

এবং এক পর্যায়ে অজানা কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্কের সমান হয় ফলে N = 0 বা বীট শূন্য হয়ে যায় পরবর্তীতে অজানা কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক হতে আরও কমতে থাকে। এক্ষেত্রে বীট N′ = জানা কম্পাঙ্ক — অজানা কম্পাঙ্ক এবং এক পর্যায়ে N′ = N হয়। অর্থাৎ, কম্পাঙ্কের পার্থক্য একই হয়।

ব্যাপারটিকে চিত্রিত করি,



$\therefore$ কম্পাঙ্কের পার্থক্য :

ভর বাড়ানোর পূর্বে n_B হলে,

$$n_B = N + n_A = 6 + 312 = 318\ Hz$$

ভর বাড়ানোর পর কম্পাঙ্ক n_B' হলে,

$$n_B' = n_A - N = 312 - 6 = 306\ Hz$$

কম্পাঙ্কের পার্থক্য = (318 — 306) Hz = 12 Hz
লিয়ানো কম্পাঙ্কের পার্থক্য 12 Hz পেয়েছিল।

১৪। রেকর্ডিং কাজে ব্যবহৃত একটি গ্রামোফোন রেকর্ড প্রতি মিনিটে 10টি ঘূর্ণন সম্পন্ন করে। এতে 2টি ট্র্যাকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6 cm এবং 8 cm।

(ক) গ্রামোফোনের ট্র্যাক দুটির রৈখিক দ্রুতি নির্ণয় কর।

(খ) যদি গ্রামোফোন রেকর্ডটি 10% বেশি কৌণিক দ্রুতিতে ঘুরে তবে শব্দের তীব্রতার কোনো পরিবর্তন হবে কি? বিশ্লেষণ কর। [ব. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$v = \omega r = 2\pi\frac{N}{t}r$$

১ম ট্রাকের জন্য,

$$v_1 = \frac{2\pi N_1 r_1}{t} = \frac{2\pi \times 10 \times 0{\cdot}06}{60} = 0{\cdot}063\ ms^{-1}$$

এখানে,
$N_1 = 10$
$t = 1\ min = 60\ sec$
$r_1 = 6\ cm = 0{\cdot}06\ m$
$v_1 = ?$

২য় ট্রাকের জন্য,

$$v_2 = \frac{2\pi N_2 r_2}{t} = \frac{2\pi \times 10 \times 0.08}{60}$$
$$= 0.084\ \text{ms}^{-1}$$

(খ) আমরা জানি তীব্রতা,

$$I = 2\pi^2 a^2 n^2 \rho v$$
$$= 2\pi^2 a^2 n^2 \rho . r\omega$$
$$= 2\pi^2 a^2 n^2 \rho r . \omega$$

প্রাথমিক অবস্থায় কৌণিক দ্রুতি ω_0 এবং তীব্রতা I_0। শেষ অবস্থায় কৌণিক দ্রুতি ω_f এবং তীব্রতা I_f।

প্রশ্নমতে,

$$\omega_f = \omega_0 + 10\%\ \omega_0$$
$$= 1.1\ \omega_0$$

$$\therefore \frac{I_f}{I_0} = \frac{\omega_f}{\omega_0} = \frac{1.1\ \omega_0}{\omega_0} = 1.1$$

বা, $$\frac{I_f - I_0}{I_0} = \frac{1.1 - 1}{1} = \frac{0.1}{1} = 10\%$$

তীব্রতার পরিবর্তন মূল তীব্রতার 10% হবে।

১৫। A ও B দুটি সুর শলাকা একটি গ্যাসে 50 cm ও 51 cm তরঙ্গদৈর্ঘ্যের শব্দ উৎপন্ন করে। শলাকা দুটিকে একত্রে শব্দায়িত করলে প্রতি সেকেন্ডে 6টি বিট শোনা যায়। A-এর কম্পাঙ্ক 500 Hz।

(ক) গ্যাসটিতে শব্দের বেগ কত হবে হিসাব কর।

(খ) B শলাকাটিকে একটু ঘষে পুনরায় শব্দায়িত করলে বিট সংখ্যার কোনো পরিবর্তন হয় না—ঘটনাটি ব্যাখ্যা কর। [দি. বো. ২০১৭]

ধরি,

$$\lambda_A = 50\ \text{cm} = 0.5\ \text{m}$$
$$\lambda_B = 51\ \text{cm} = 0.51\ \text{m}$$

$\lambda_B > \lambda_A$ ফলে $n_A > n_B$ $\quad [\because v = n\lambda$ বা, $\lambda \propto \frac{1}{n}]$

$$\therefore N = n_A - n_B$$

বা, $$n_B = n_A - N = 500 - 6$$
$$= 494\ \text{Hz}$$

(ক) বেগ,

$$v = n\lambda = n_A \lambda_A = 500 \times 0.5 = 250\ \text{ms}^{-1}$$

(খ) আমরা জানি, ঘষলে কম্পাঙ্ক বেড়ে যায়। এমনভাবে বেড়ে যায় যে A-এর কম্পাঙ্ককে অতিক্রম করে এমন এক কম্পাঙ্কে পৌঁছে যেন বীট সংখ্যা সমান থাকে। পরবর্তী কম্পাঙ্ক n'_B হলে,

$$N = n'_B - n_A$$

বা, $$n'_B = 6 + 500 = 506\ \text{Hz}$$

১৬। একটি গাড়ির হর্ণ মহাসড়কে নিম্নোক্ত অগ্রগামী শব্দ তরঙ্গ সৃষ্টি করলো।

$y = 5\sin(200\pi t - 1.57x)$। গাড়ি হতে 1 km দূরে একটি গরু রাস্তা পার হচ্ছিল।

(ক) উদ্দীপকে তরঙ্গটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) হর্ণ দেওয়ার 3 sec পর গরুটি রাস্তা থেকে চলে গেলে শব্দ তরঙ্গটি গরুটিকে রাস্তা থাকাকালীন সময়ে স্পর্শ করবে কী?

(ক) আমরা জানি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = a \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$
$$= a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

উদ্দীপকে দেওয়া আছে

$$y = 5 \sin(200\pi t - 1.57x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii)নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$$\omega = 200\pi$$

বা, $2\pi f = 200\pi$

$$\therefore f = \frac{200}{2} = 100 \text{ Hz}$$

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী,

$$y = 5 \sin (200\pi t - 1{\cdot}57x)$$

বা, $y = 5 \sin 1{\cdot}57 (127{\cdot}39\pi t - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$

আমরা জানি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

(iii) ও (iv) তুলনা করে পাই,

তরঙ্গ বেগ, $v = 127{\cdot}39\pi \text{ ms}^{-1}$

শব্দ তরঙ্গটির 1 km = 1000 m যেতে প্রয়োজনীয় সময়,

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1000}{400} = 2{\cdot}5 \text{ sec}$$

যেহেতু গরুটির রাস্তা পার হতে প্রয়োজনীয় সময় 3 sec। অন্যদিকে উৎপন্ন শব্দ তরঙ্গ গরুর কাছে আসতে সময় লাগে 2·5 sec. কাজেই শব্দ তরঙ্গটি গরুটিকে রাস্তায় থাকাকালীন সময়ে স্পর্শ করবে।

১৬। একটি গাড়ির হর্ণ মহাসড়কে নিম্নোক্ত অগ্রগামী শব্দ তরঙ্গ সৃষ্টি করলো।

$y = 5 \sin(200\pi t - 1{\cdot}57x)$। গাড়ি হতে 1 km দূরে একটি গরু রাস্তা পার হচ্ছিল।

(ক) উদ্দীপকে তরঙ্গটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) হর্ণ দেওয়ার 3 sec পর গরুটি রাস্তা থেকে চলে গেলে শব্দ তরঙ্গটি গরুটিকে রাস্তা থাকাকালীন সময়ে স্পর্শ করবে কী?

(ক) আমরা জানি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

$$= a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

উদ্দীপকে দেওয়া আছে

$$y = 5 \sin (200\pi t - 1{\cdot}57x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii)নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$$\omega = 200\pi$$

বা, $2\pi f = 200\pi$

$$\therefore f = \frac{200}{2} = 100 \text{ Hz}$$

(খ) উদ্দীপক অনুযায়ী,

$$y = 5 \sin (200\pi t - 1{\cdot}57x)$$

বা, $y = 5 \sin 1{\cdot}57 (127{\cdot}39\pi t - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$

আমরা জানি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ,

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

(iii) ও (iv) তুলনা করে পাই,

তরঙ্গ বেগ, $v = 127{\cdot}39\pi \text{ ms}^{-1}$

শব্দ তরঙ্গটির 1 km = 1000 m যেতে প্রয়োজনীয় সময়,

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1000}{400} = 2{\cdot}5 \text{ sec}$$

যেহেতু গরুটির রাস্তা পার হতে প্রয়োজনীয় সময় 3 sec। অন্যদিকে উৎপন্ন শব্দ তরঙ্গ গরুর কাছে আসতে সময় লাগে 2·5 sec. কাজেই শব্দ তরঙ্গটি গরুটিকে রাস্তায় থাকাকালীন সময়ে স্পর্শ করবে।

সার-সংক্ষেপ

তরঙ্গ : কোনো স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের কণাগুলোর স্থানান্তর ছাড়া যে পর্যাবৃত্ত আন্দোলনের দ্বারা এক স্থান হতে অন্য স্থানে শক্তি সঞ্চালিত হয় তাকে তরঙ্গ বলে।

সরল দোল তরঙ্গ বা সাইন তরঙ্গ : মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোল গতিতে কম্পিত হলে যে তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তাকে সরল দোল তরঙ্গ বা সাইন তরঙ্গ বলে।

আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ : মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গ গতির অভিমুখের সমকোণে কম্পিত হতে থাকলে সেই তরঙ্গাকে আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ বলে।

লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ : মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গের গতির অভিমুখের সমান্তরালে কম্পিত হতে থাকলে, সেই তরঙ্গাকে লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বলে।

তীক্ষ্ণতা বা পিচ : শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন সুর সরু ও কোন সুর মোটা তা বোঝা যায় তাকে তীক্ষ্ণতা বা পিচ বলে।

শব্দ : শব্দ এক প্রকার শক্তি যা একটি স্থিতিস্থাপক নিরবচ্ছিন্ন মাধ্যমের মধ্য দিয়ে আমাদের কানে পৌঁছে শ্রুতির অনুভূতি জন্মায় বা জন্মাতে চেষ্টা করে।

শব্দের উৎপত্তি : কোনো বস্তুর কম্পনের দরুন শব্দ উৎপন্ন হয়। সকল প্রকার শব্দ উৎপত্তির মূল উৎস বস্তুর কম্পন।

পূর্ণ কম্পন : তরঙ্গাস্থিত কোনো একটি কম্পমান বস্তু একটি বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে আবার একই দিক হতে সেই বিন্দুতে ফিরে এলে তাকে পূর্ণ কম্পন বলে।

তরঙ্গ বেগ : কোনো একটি তরঙ্গ কোনো মাধ্যমে এক সেকেন্ডে যতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তরঙ্গ বেগ বলে।

তরঙ্গদৈর্ঘ্য : কোনো মাধ্যমে কোনো একটি কম্পমান বস্তু একটি পূর্ণ কম্পনে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ওই তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে। একে λ দিয়ে সূচিত করা হয়।

কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা : কোনো একটি কম্পমান বস্তু এক সেকেন্ডে যত সংখ্যক পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে, তাকে উক্ত বস্তুর কম্পাঙ্ক বলে। একে n দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

দোলনকাল বা পর্যায়কাল : কোনো একটি কম্পমান বস্তুর একটি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করতে যে সময় লাগে তাকে ওই বস্তুর দোলনকাল বা পর্যায়কাল বলে। একে T দিয়ে সূচিত করা হয়।

বিস্তার : কোনো একটি কম্পমান বস্তু তার সাম্যাবস্থান থেকে ডানে বা বামে যে সর্বাধিক দূরত্ব অতিক্রম করে, তাকে ওই বস্তুর বিস্তার বলে।

দশা : দশা কোনো একটি কম্পমান বস্তুর কোনো মুহূর্তের দোলনের অবস্থা প্রকাশ করে।

আদি দশা : কোনো একটি কম্পমান বস্তু যে দশা নিয়ে কম্পন শুরু করে, তাকে আদি দশা বলে।

তরঙ্গ মুখ : কোনো একটি তরঙ্গের উপরিস্থিত সমদশাসম্পন্ন সকল বিন্দুর মধ্য দিয়ে অংকিত তলকে তরঙ্গ মুখ বলে।

তরঙ্গ শীর্ষ : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ধনদিকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ শীর্ষ বলে।

তরঙ্গ পাদ : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ঋণদিকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ পাদ বলে।

তরঙ্গ রেখা : কোনো এক মুহূর্তে মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গের উপর যে রেখায় আপনা-আপনি অবস্থান করে সে রেখাকে তরঙ্গ রেখা বলে।

অগ্রগামী তরঙ্গ : কোনো তরঙ্গ যদি কোনো বিস্তৃত মাধ্যমের এক স্তর হতে অন্য স্তরে সঞ্চালিত হয়ে সামনের দিকে অগ্রসর হতে থাকে, তবে তাকে অগ্রগামী তরঙ্গ বলে।

তরঙ্গের উপরিপাতন : দুটি শব্দ তরঙ্গ একই সঙ্গে কোনো মাধ্যমের একটি কণাকে অতিক্রম করলে ওই কণা তরঙ্গ দুটির সম্মিলিত প্রভাবে আলোড়িত হবে। কোনো মুহূর্তে কণাটির লব্ধি সরণ প্রত্যেকটি তরঙ্গ পৃথকভাবে ওই বিন্দুতে যে সরণ সৃষ্টি করে তাদের ভেক্টর যোগফলের সমান। এর নাম তরঙ্গের উপরিপাতন।

স্থির তরঙ্গ : কোনো মাধ্যমের একটি সীমিত অংশে পরস্পর বিপরীতমুখী সমান বিস্তার ও তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুটি অগ্রগামী তরঙ্গ একে অপরের উপর আপতিত হলে যে নতুন তরঙ্গ সৃষ্টি হয় তাকে স্থির তরঙ্গ বলে।

সুস্পন্দ বিন্দু : স্থির তরঙ্গের ক্ষেত্রে কোনো কোনো বিন্দুতে বস্তুকণার বিস্তার শূন্য এবং কোনো কোনো বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক। যে বিন্দুগুলোতে বিস্তার সর্বাধিক তাদেরকে সুস্পন্দ বিন্দু বলে।

নিস্পন্দ বিন্দু : যেসব বিন্দুতে বিস্তার শূন্য তাদেরকে নিস্পন্দ বিন্দু বলে।

শব্দোচ্চতা : যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা একটি শব্দ অন্য একটি শব্দ হতে যত বেশি জোরালো তা বুঝা যায় তাকে শব্দোচ্চতা বলে।

তীব্রতা : শব্দ সঞ্চালনের অভিমুখের সাথে লম্বভাবে স্থাপিত একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে যে পরিমাণ শক্তি প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত হয় তাকে তীব্রতা বলে।

প্রমাণ তীব্রতা : 1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দের শ্রাব্যতার সীমা 10^{-12} Wm^{-2} তীব্রতার সমান ধরা হয় এবং একেই প্রমাণ বা আদর্শ তীব্রতা বলে।

তীব্রতা লেভেল : যেকোনো শব্দের তীব্রতা এবং আদর্শ বা প্রমাণ তীব্রতার শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে তীব্রতা লেভেল বলে।

বেল : শব্দের তীব্রতা যখন 10 গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যে পরিমাণ বাড়ে তাকে 1 বেল বলে।

ডেসিবেল : শব্দের তীব্রতা যখন $10^{0.1}$ গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যতটুকু বাড়ে তাকে 1 ডেসিবেল বলে।

বীট বা স্বরকম্প : সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একইদিকে অগ্রগামী দুটি শব্দতরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের হ্রাস-বৃদ্ধির ঘটনাকে বীট বা স্বরকম্প বলে।

জাতি বা গুণ (Quality) : যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা দুটি ভিন্ন উৎস থেকে নির্গত শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতা এক হলেও তাদের একটিকে অপরটি থেকে পৃথক করা যায়, তাকে তার জাতি বা গুণ বলে।

দশা পার্থক্য : অগ্রগামী তরঙ্গের যেকোনো দুটি অবস্থানে অবস্থিত দুটি কণার দশা পার্থক্য বলতে একই সময়ে ওই দুটি অবস্থানের দশা কোণের পার্থক্যকে বোঝায়।

মুক্ত কম্পন বা স্বাভাবিক কম্পন : স্পন্দনক্ষম যেকোনো বস্তুকে আন্দোলিত করলে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে স্পন্দিত হয়। এই স্পন্দনকে মুক্ত কম্পন বা স্বাভাবিক কম্পন বলে।

পরবশ কম্পন : স্পন্দনক্ষম বস্তুর ওপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের জন্য বস্তুটি তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হওয়ার পরিবর্তে যখন আরোপিত কম্পনের কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হতে থাকে তখন এ কম্পনকে আরোপিত বা পরবশ কম্পন বলে।

অনুনাদ : কোনো বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বলের কম্পাঙ্ক বস্তুটির স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয়। এ ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে।

সুশ্রাব্য বা সংগীত গুণসম্পন্ন শব্দ : যেসব শব্দ শ্রুতিমধুর তাদের সুরযুক্ত শব্দ বা সংগীত গুণসম্পন্ন বা সুশ্রাব্য শব্দ বলে।

সোরগোল বা সুরবর্জিত শব্দ বা অপসুর : যেসব শব্দ শ্রুতিকটু তাদের সোরগোল বা সুরবর্জিত শব্দ বা অপসুর বলে।

স্বরগ্রাম : সমসজ্ঞাতিপূর্ণ কতগুলো সুরের সমষ্টিকে স্বরগ্রাম বলে।

মূল সুর : কোনো স্বরের মধ্যে যে সুরের কম্পাঙ্ক সবচেয়ে কম, তাকে মূল সুর বলে।

উপসুর : অন্যান্য সুর, যাদের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের চেয়ে বেশি, তাদের উপসুর বলে।

অষ্টক : উপসুরের কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হলে, তাকে অষ্টক বা দ্বিতীয় সমমেল বলে।

সমমেল : উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক যদি মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক হয়, তা হলে সেই সকল উপসুরকে সমমেল বা হারমোনিক বলে।

সুর বিরাম বা সুরানুপাত : দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাতকে সুর বিরাম বা সুরানুপাত বলে।

ত্রয়ী : তিনটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত 4 : 5 : 6 হলে তাদের সমন্বয়ে যে সুরযুক্ত শব্দের উৎপত্তি হয় তাকে ত্রয়ী বলে।

স্বর-সজ্ঞাতি : চারটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত 4 : 5 : 6 : 8 হলে তাদের সমন্বয়ে এক প্রকার শ্রুতিমধুর শব্দের উৎপত্তি হয়। এরূপ সমন্বয়কে স্বর-সজ্ঞাতি বা সমসজ্ঞাতি বলে।

সমতান বা হারমনি : একই সময় কতগুলো শব্দ উৎপন্ন হলে যদি তাদের মধ্যে একটি ঐক্যতানের সৃষ্টি হয় তবে তাকে সমতান বা হারমনি বলে।

মেলডি বা স্বর মাধুর্য : কতগুলো শব্দ একের পর এক উৎপন্ন হয়ে যদি একটি সুরযুক্ত শব্দের সৃষ্টি করে তবে তাকে স্বর মাধুর্য বা মেলডি বলে।

সলো : একটিমাত্র বাদ্যযন্ত্র হতে যে স্বর সৃষ্টি হয় তাকে সলো বা একক সংগীত বলে।

অর্কেস্ট্রা : যখন একাধিক বাদ্যযন্ত্র একত্রে বাজিয়ে একটি সমতান বা মেলডি বা সমতান মেলডি উভয়ই উৎপন্ন করে তখন তাকে অর্কেস্ট্রা বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। একটি কণার পূর্ণ কম্পনে দশা পার্থক্য 2π। শব্দের তীব্রতার একক Wm^{-2}।

২। $1\ GHz = 10^9\ Hz$, $1\ MHz = 10^6\ Hz$, কানের শ্রুতি শুরু হয় $0\ dB$ থেকে। পুরুষের কণ্ঠস্বর অপেক্ষা মহিলাদের কণ্ঠস্বরের তীক্ষ্ণতা বেশি। 200 Hz মূল সুরের কম্পাঙ্ক হলে 400 Hz মূল সুরের অষ্টক।

৩। অষ্টক হচ্ছে সেই উপসুর যার কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ।

৪। সুরযুক্ত শব্দের বৈশিষ্ট্য হলো শব্দোচ্চতা। কোনো শব্দের তীব্রতা সূচন তীব্রতার 26% বৃদ্ধি করলে তীব্রতা লেভেল $1\ dB$ বৃদ্ধি পাবে।

৫। ভূমিকম্পের ফলে উৎপন্ন তরঙ্গের কম্পাঙ্ক $f < 20\ Hz$।

৬। কোনো গ্যাসে $0{\cdot}50\ m$ এবং $0{\cdot}505\ m$ তরঙ্গদৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি তরঙ্গ প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন করে; শব্দের বেগ হবে $303\ ms^{-1}$। স্থির তরঙ্গ সৃষ্টিকারী তরঙ্গগুলোর বিস্তার A হলে সুস্পন্দ বিন্দুগুলোর বিস্তার $\pm 2A$।

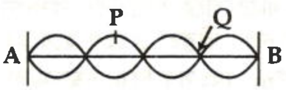
৭। 256 Hz কম্পাঙ্ক যদি মূল সুর হয় তা হলে 512 Hz কম্পাঙ্ক অষ্টক বা দ্বিতীয় সমমেল হবে।

৮। শব্দ যখন বায়ু হতে পানিতে প্রবেশ করে তখন বদলে যায়— বেগ, তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

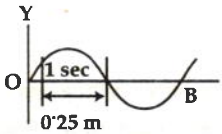
৯। ফন হলো শব্দোচ্চতার একক। আড় তরঙ্গ চেনা যাবে সমবর্তন বৈশিষ্ট্যের দ্বারা।

১০। দুইটি তরঙ্গ একই দশায় মিলিত হলে তীব্রতা বেড়ে যায়।

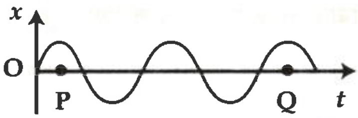
১১। শ্রোতার শ্রাব্যতার সীমার $40\ dB$ এর উর্ধ্বে 1000 Hz কম্পাঙ্কের একটি বিশুদ্ধ সুর যে প্রাবল্য সৃষ্টি করে তাকে সোন বলে।



$n = 120\ Hz$, P ও Q এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{3\lambda}{4}$।

১২। 

O এবং B বিন্দুতে অবস্থিত কণাদ্বয়ের দশা পার্থক্য 2π।



$OQ = \frac{9\lambda}{4}$।

১৩। তরঙ্গের কণাসমূহের গতি হলো পর্যায়বৃত্ত গতি এবং সরল ছন্দিত গতি।

১৪। অগ্রগামী তরঙ্গের ক্ষেত্রে (ক) তরঙ্গ প্রবাহের অভিমুখ মাধ্যমের কণাগুলোর কোনো স্থানান্তর ঘটে না। (খ) মাধ্যমের স্থানান্তর ছাড়াই শক্তি স্থানান্তরিত হয়।

১৫। তরঙ্গের মাধ্যমে শক্তি স্থানান্তরিত হয়। স্থিতিস্থাপক তরঙ্গের উদাহরণ হলো শব্দতরঙ্গ।

১৬। স্থিতিস্থাপক মাধ্যমে সৃষ্ট তরঙ্গের নাম যান্ত্রিক তরঙ্গ। তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ মাধ্যম ছাড়া চলাচল করতে পারে। আলো এক প্রকার তড়িৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ। $\frac{4d^2x}{dt^2} + 100x = 0$ সমীকরণে কণার কৌণিক কম্পাঙ্ক $5\ rad\ s^{-1}$।

১৭। পানিতে সৃষ্ট তরঙ্গ, টান করা তারে সৃষ্ট তরঙ্গ আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ। অন্যদিকে শব্দ একটি অনুদৈর্ঘ্য বা লম্বিক তরঙ্গ। স্প্রিংকে খাড়াভাবে ঝুলিয়ে নিচে টান দিয়ে ছেড়ে দিলে লম্বিক তরঙ্গের সৃষ্টি হয়।

১৮। $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}x$ অগ্রগামী তরঙ্গের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। এই তরঙ্গের জন্য মাধ্যমের কণাগুলোর দশা এক কণা হতে অন্য কণায় সঞ্চালিত হয়। তরঙ্গের দুটি বিন্দুর মধ্যে দশা পার্থক্য 2π হলে পথ পার্থক্য λ।

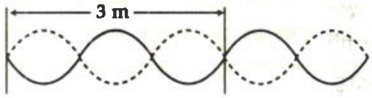
১৯। সমদশাসম্পন্ন পরপর দুইটি কণার মধ্যবর্তী দূরত্বকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে।

২০। স্থির তরঙ্গের নিস্পন্দ বিন্দুতে কণার বেগ শূন্য হয় এবং সুস্পন্দ বিন্দুতে বেগ সর্বাধিক হয়।

২১। স্থির তরঙ্গে পরপর দুইটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বা পরপর দুইটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{2}$ হয়। আর একটি সুস্পন্দ ও একটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{\lambda}{4}$ হয়। সরল ছন্দিত স্পন্দনে কম্পিত বস্তুর দোলনকাল বল ধ্রুবকের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

২২। তরঙ্গের তীব্রতা বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক অর্থাৎ $I = 2\pi^2n^2a^2\rho v$। এই তীব্রতা বিস্তারের বর্গের, কম্পাঙ্কের বর্গের, ঘনত্বের এবং বেগের সমানুপাতিক।

২৩। গঠনমূলক ব্যতিচারের ক্ষেত্রে পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$-এর জোড় গুণিতক হয় এবং ধ্বংসাত্মক ব্যতিচারের ক্ষেত্রে পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$-এর বেজোড় গুণিতক হয়।



তরঙ্গটির তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 2 m।

২৪। সুস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির জন্য পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{4}$-এর বেজোড় গুণিতক এবং নিস্পন্দ বিন্দুর জন্য $\frac{\lambda}{4}$-এর জোড় গুণিতক হয়।

২৫। শব্দের তীব্রতা ঘনত্বের সমানুপাতিক এবং কম্পাঙ্কের বর্গের সমানুপাতিক হয়। স্বরের মধ্যে বিদ্যমান সবচেয়ে নিম্ন কম্পাঙ্ক হবে মূল সুর।

২৬। মূল তরঙ্গ এবং প্রতিফলিত তরঙ্গের মধ্যে দশা পার্থক্য 2π হয়।

২৭। সৈন্যদল ব্রিজের উপর দিয়ে মার্চ করে যাওয়ার সময় বুটের কম্পাঙ্ক ব্রিজের কম্পাঙ্কের সমান হলে— (ক) অনুনাদ সৃষ্টি হয় (খ) ব্রিজটি অধিক বিস্তারে কাঁপতে থাকে (গ) ব্রিজটি ভেঙ্গে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে।

২৮। পরবশ কম্পনের ক্ষেত্রে— (ক) প্রথম বস্তুর কম্পাঙ্ককে আরোপিত কম্পাঙ্ক বলে (খ) দ্বিতীয় বস্তুটি প্রথমে তার নিজস্ব স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হয়। (গ) দ্বিতীয় বস্তুটি পরবর্তীতে ধীরে ধীরে আরোপিত কম্পনে কম্পিত হয়। শব্দের তীব্রতা 10^{-8} Wm^{-2}। শব্দের তীব্রতা তিনগুণ বৃদ্ধি করা হলে নতুন তীব্রতা লেভেল হবে 44·77 dB।

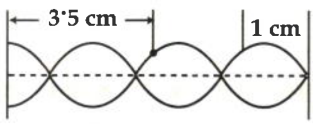
২৯। মানব কর্ণে সহনীয় সবচেয়ে জোরালো তীব্রতার শব্দতরঙ্গের বিস্তার 10^{-5} m এবং সবচেয়ে নিম্নতম বা ক্ষীণতম যে তরঙ্গ অনুভব করে তার বিস্তার 10^{-11} m।

৩০। মানুষের শ্রবণ সীমার দুই প্রান্তের তীব্রতার অনুপাত 10^{12}।

৩১। অজানা সুর কম্পাঙ্ক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $N = n_1 \sim n_2$ সূত্র ব্যবহার করা হয়। বীট উপরিপাতন ঘটনার ফল।

৩২। হারমোনিক বা সমমেল হচ্ছে সেই উপসুরের কম্পাঙ্ক যা মৌলিক বা মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক। আর মূল সুর হচ্ছে কোনো স্বরের মধ্যে বিদ্যমান সুরগুলোর মধ্যে বিদ্যমান সবচেয়ে কম কম্পাঙ্কের সুর।

৩৩। উৎসের কম্পাঙ্কের সাথে তীব্রতার সম্পর্ক হলো $I \propto n^2$।

৩৪। 

পরপর তিনটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 4 cm।

৩৫। শব্দ উৎপত্তির মূল উৎস বস্তুর কম্পন।

৩৬। শব্দ বিস্তারের জন্য জড় মাধ্যম স্থিতিস্থাপক ও অবিচ্ছিন্ন হতে হবে।

৩৭। আড় তরঙ্গে মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গ গতির অভিমুখের সমকোণে কম্পিত হয়। আর লম্বিক তরঙ্গে মাধ্যমের কণাগুলি তরঙ্গের গতির অভিমুখের সমান্তরালে কম্পিত হয়।

৩৮। আড় তরঙ্গ প্রবাহের মাধ্যমে তরঙ্গ শীর্ষ এবং তরঙ্গ পাদ সৃষ্টি হয়। পক্ষান্তরে, লম্বিক তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমের সংকোচন ও প্রসারণ ঘটে।

৩৯। বাঁশির সুর, স্প্রিং-এ সৃষ্ট তরঙ্গ লম্বিক তরঙ্গ এবং পানি তরঙ্গ, টানা তারের তরঙ্গ আড় তরঙ্গ।

৪০। বায়ু মাধ্যমে আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হতে পারে না; কেবল অণুদৈর্ঘ্য বা লম্বিক তরঙ্গ বিস্তার লাভ করে।

৪১। একক দৈর্ঘ্যের মধ্যে যে কয়টি পূর্ণ তরঙ্গ থাকে তাকে ওই তরঙ্গের তরঙ্গ সংখ্যা বলে। অর্থাৎ $\bar{\gamma} = \frac{1}{\lambda}$

৪২। শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন সুর চড়া ও কোন সুর মোটা তা বুঝা যায় তাকে তীক্ষ্ণতা বা পিচ বলে।

৪৩। তরঙ্গের তীব্রতার এস. আই. একক $Js^{-1}m^{-2}$ বা Wm^{-2}।

৪৪। যেসব শব্দ শ্রুতিমধুর তাদের সুরযুক্ত বা সুশ্রাব্য শব্দ বলে এবং যেসব শব্দ শ্রুতিকটু তাদের সোরগোল বা অপসুর বলে।

৪৫। সুরযুক্ত শব্দের তিনটি বৈশিষ্ট্য রয়েছে। যেমন— (ক) শব্দোচ্চতা, (খ) তীক্ষ্ণতা ও (গ) গুণ বা জাতি।

৪৬। সোরগোলযুক্ত শব্দের কোনো নির্দিষ্ট মূল সুর বা উপসুর এবং কোনো নির্দিষ্ট জাতি থাকে না।

৪৭। শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র থেকে নির্গত একই প্রাবল্য ও তীক্ষ্ণতাযুক্ত সুরগুলোর মধ্যে পার্থক্য করা যায়, তাকে সুরযুক্ত শব্দের গুণ বা জাতি বলে।

৪৮। বন্ধ নল থেকে নিঃসৃত শব্দ অপেক্ষা খোলা নল থেকে নিঃসৃত শব্দ বেশি শ্রুতিমধুর।

৪৯। বন্ধ নলে মূলসুর ও উপসুরগুলোর অনুপাত $1:3:5:7$ এবং খোলা নল মূলসুর ও উপসুরগুলোর কম্পাঙ্কের অনুপাত $1:2:3:4$। অর্থাৎ বন্ধ নলে শুধুমাত্র অযুগ্ম উপসুরগুলোই উপস্থিত থাকে এবং খোলা নলে যুগ্ম ও অযুগ্ম সকল প্রকার হারমোনিক উপস্থিত থাকে।

৫০। সমবর্তন বৈশিষ্ট্য দ্বারা আড় তরঙ্গ চেনা যায়।

৫১। পথ পার্থক্য λ এর জন্য দশা পার্থক্য হচ্ছে 2π।

৫২। দুটি তরঙ্গের পথ পার্থক্য x এবং দশা পার্থক্য δ হলে এদের মধ্যে সম্পর্ক, $x = \frac{\lambda}{2\pi}\delta$।

৫৩। বস্তুর কম্পাঙ্ক আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দন কম্পাঙ্কের সমান হলে অনুনাদ সৃষ্টি হয়।

৫৪। কোনো শ্রেণিকক্ষের শব্দের তীব্রতা $1 \times 10^{-6}\ Wm^{-2}$ হলে শব্দের তীব্রতা লেভেল $60\ d\beta$।

৫৫। তিনটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত $4:5:6$ হলে তাদের সমন্বয়ে যে সুরযুক্ত শব্দ তৈরি হয় তাকে ত্রয়ী বলে।

৫৬। একটি টানা তারে টানের পরিমাণ 4 গুণ বৃদ্ধি করলে কম্পাঙ্ক 2 গুণ বৃদ্ধি পাবে।

৫৭। উপরিপাতন ঘটনার ফল হচ্ছে বীট।

৫৮। সমসঙ্গাতিসম্পন্ন স্বরসমষ্টিকে স্বরগ্রাম বলে।

৫৯। দুটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত $5:6$ হলে তরঙ্গদৈর্ঘ্যের অনুপাত হবে $6:5$।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। শব্দ যখন বায়ু থেকে পানিতে প্রবেশ করে তখন পরিবর্তন হয়— [য. বো. ২০১৫; দি. বো. ২০১৫; Admission Test : BUET 2013-14; JU 2019-20; RU 2016-17; SUST 2019-20; MBSTU 2019-20]

(i) বেগ
(ii) কম্পাঙ্ক
(iii) তরঙ্গদৈর্ঘ্য

নিচের কোনটি সঠিক ?

ⓚ i ও ii
ⓛ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓘ i, ii ও iii

২। লম্বিক তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য হলো—

(i) মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমান্তরাল হয়
(ii) মাধ্যমে এর সমবর্তন বা পোলারণ ঘটে না
(iii) স্থিতিস্থাপক ধর্মসম্পন্ন মাধ্যমে এ তরঙ্গ সৃষ্টি হয়

নিচের কোনটি সঠিক ?

ⓚ i ও ii
ⓛ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓘ i, ii ও iii

৩। আড় তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য হলো—

(i) মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমান্তরাল হয়
(ii) তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমে তরঙ্গ শীর্ষ ও তরঙ্গ পাদ সৃষ্টি হয়
(iii) মাধ্যমে এর সমবর্তন বা পোলারণ ঘটে

নিচের কোনটি সঠিক ?

ⓚ i ও ii
ⓛ i ও iii
ⓖ ii ও iii
ⓘ i, ii ও iii

৪। আড় তরঙ্গ চেনা যাবে নিচের কোন বৈশিষ্ট্যের দ্বারা ? [ব. বো. ২০১৬; COM Admission Test, 2019-20]

ⓚ প্রতিফলন
ⓛ ব্যতিচার
ⓖ সমবর্তন
ⓘ অপবর্তন

৫। কোনো তরঙ্গের উপর সমদশাসম্পন্ন কণাগুলোর গতিপথকে বলে— [Admission Test : JU 2018-19; CU 2012-13; BMA 2017-18

ⓚ তরঙ্গদৈর্ঘ্য
ⓛ কম্পাঙ্ক
ⓖ বিস্তার
ⓘ তরঙ্গমুখ